第3卷 第1期 高能物理与核物理 Vol. 3, No. 1
1979年1月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS Jan., 1979

内含谱的精细结构(I)

求和规则及费曼-杨振宁比例律的推广

刘汉昭
(南开大学)

摘要

本文阐明内含谱和半内含谱的精细结构(可称为近邻粒子的内含谱和半内含谱,是指若干个相邻的粒子在以快度 y、横向动量 $P_{\perp x}$、$P_{\perp z}$ 为坐标的三维相空间中的区域性的分布)的重要意义,找到了它们的某些基本性质,即求和规则及费曼-杨振宁比例律的推广形式.

例如,其中有一个求和规则是:

$$\int f_{(1;k)}(S, x_1, P_{\perp 1}, \cdots, x_k, P_{\perp k}) \underbrace{\frac{d^3P_1}{\omega_1}\cdots\frac{d^3P_k}{\omega_k}}_{(x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_k)} = \sum_{n=k}^{\infty} (n-k+1)\frac{\sigma_n}{\sigma(s)},$$

其中 $f_{(1;k)}$ 表 k 个快度紧邻的粒子的归一化的内含截面. 由上式便知近邻粒子的内含谱和通常内含谱是有质量上的明显差别的.

又例如,对 k 个紧邻的粒子而言,费曼-杨振宁比例律的推广形式是:

$$f_{(1;k)}(S, x_1, P_{\perp 1}, \cdots x_k, P_{\perp k}) \xrightarrow{\quad} \infty, \ (s \to \infty, x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_k).$$

其中"$\xrightarrow{\quad}\infty$"代表趋向一个极限值. 当 $k=2$ 时,利用现有的快度隙长度分布的实验数据,证明在 FNAL 能量下,pp 碰撞的 $f_{(1;k)}$ 已经接近它的极限形式.

近邻粒子的内含谱和半内含谱可望有效地反映短程关联效应.

一、引言

本文的研究工作是目前对内含谱、半内含谱1)和速度隙长度分布[1-3]的研究工作的一个新发展,其目的是揭露各种近邻粒子之间的关联,一个近邻粒子群和另一个近邻粒子群之间的关联、成团效应、电荷的区域性守恒、玻色-爱因斯坦统计效应及同这些关联和效应相联系的多粒子产生的机理.

通常所谓的双粒子内含谱或半内含谱所指的双粒子的两个快度之间还可以存在其他同类型的任意个粒子的快度,这种内含谱或半内含谱,实际上已计入了这些快度介于其间的其他粒子的影响. 通常双粒子的两个快度 y_1、y_2 之间存在的同类型的粒子数,当然要

本文1977年4月6日收到,1978年9月18日收到修改稿.

1) 本文所指的半内含谱不仅包括通常的半内含谱(即已知带电粒子数 n)而且包括作者于两年前探讨过的各种新型的半内含谱[4].

比近邻的双粒子的同样快度 y_1、y_2 之间的同类型的粒子数大．当 $y_2 - y_1 \leqslant$ 一个集团(Cluster)所占的平均快度间隔时，如果短程关联效应主要是由集团结构所引起的，近邻的双粒子来自同一个集团的衰变的几率，要比通常内含谱的双粒子相应的几率大．这就是说，前者受集团结构的影响要比后者的大．因此，近邻粒子内含谱和半内含谱应能更有效地反映出集团的结构及其他短程关联的多粒子产生的机理．

近邻粒子的或几个近邻粒子群的内含谱，是指近邻粒子或几个相邻的粒子群在三维相空间(以快度 y、动量的横向分量 $P_{\perp x}$、$P_{\perp z}$ 为坐标)中的区域性的分布．设通常的 m 个粒子内含谱(半内含谱)中的第一个粒子有 k_1 个近邻的粒子受到测量，第二个粒子有 k_2 个近邻的粒子受到测量，…第 m 个粒子有 k_m 个近邻的粒子受到测量，本文把这种内含结构称为 $(m; k_1 \cdots k_m)$ 型内含谱(半内含谱)．显然，若对这 m 个粒子的近邻的粒子的动量求积分(不对 m 个粒子本身的动量求积分)，便成为通常的 m 个粒子内含谱(半内含谱)．所以 $(m; k_1 \cdots k_m)$ 型内含谱(半内含谱)既包括简单的近邻粒子内含谱(半内含谱)(指 $(1; k_1)$ 型的)，又包括通常的内含谱(半内含谱)．这里所说的近邻粒子不必是紧邻的，可以是任意规定的近邻粒子．

在本文第二、四节中将导出一些重要的求和规则．在第三节中，将引进费曼-杨振宁比例律的推广形式，并作不依赖于模型的一般的论证．

二、求和规则

设 $(1; k)$ 型(即 $(1; k_1)$ 型)半内含谱的 k 个粒子是同种紧邻的粒子．可用下式来描写这一过程：

$$a + b \to \underline{1} + \underline{2} + \cdots \underline{k} + \underline{(n-k)} + X, \tag{1}$$

其中 $1, 2 \cdots k$ 表动量被测量的 k 个同种粒子(例如带电的粒子)；2 表粒子 2 是粒子 1 的右邻，余类推 $(x_k \geqslant x_{k-1} \geqslant \cdots \geqslant x_1$, x_i 表第 i 个粒子的费曼变数)；$(n-k)$ 表把 $1, 2, \cdots k$ 除外的其他的同种粒子，$\underline{(n-k)}$ 表这 $(n-k)$ 个粒子的费曼变数都不介入 (x_1, x_k) 之间；X 表另一种粒子(例如中性粒子)．按照通常半内含谱的归一化的不变截面的定义[5]，$(1; k)$ 型半内含过程的归一化的不变截面应为：

$$\begin{aligned} f^{(n)}_{(1;k)}(s, x_1, P_{\perp 1}, \cdots x_k, P_{\perp k}) &\equiv \frac{1}{\sigma(s)} \frac{d\sigma_n}{d^3P_1/\omega_1 d^3P_2/\omega_2 \cdots d^3P_k/\omega_k} \\ &\quad \times (a + b \to \underline{1} + \cdots + \underline{k} + \underline{(n-k)} + X) \\ &= \frac{1}{\sigma(s)} \frac{1}{(n-k)!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \int \frac{d^3P_{k+1}}{\omega_{k+1}} \cdots \frac{d^3P_{n+l}}{\omega_{n+l}} \delta^4\left(P_a + P_b - P_1 - P_2 - \cdots - P_k - \sum_{j=k+1}^{n+l} P_j\right) \\ &\quad \cdot |T(a + b \to 1 + 2 + \cdots + n + \cdots + (n+l))|^2, \\ &\qquad (x_{k+1} \cdots x_n \text{ 不介入} (x_1, x_k),\ n > k), \end{aligned} \tag{2}$$

其中 l 表另一种粒子(如中性粒子)的数目，其他符号都是常用的．当 $n = k$ 时，$f^{(n)}_{(1;k)}$ 的表式是显而易见的．类似地，可以写出 $(m; k_1 \cdots k_m)$ 型半内含过程的归一化的不变截面 $f^{(n)}_{(m;k_1 \cdots k_m)}(x_{11}, P_{\perp 11}, \cdots x_{1k_1}, P_{\perp 1k_1}, \cdots x_{m1}, P_{\perp m1}, \cdots x_{mk_m}, P_{\perp mk_m})$ 的表式．

先证明下面的关系式：

$$\int f^{(n)}_{(1;k)}(s, x_1, P_{\perp 1}\cdots x_k, P_{\perp k})d^3P_k/\omega_k = f^{(n)}_{(1;k-1)}(s, x_1, P_{\perp 1}, \cdots x_{k-1}, P_{\perp,k-1}) - A^{(n)}_{k-1}(s, x_1, P_{\perp 1}\cdots x_{k-1}, P_{\perp,k-1}), \quad (n \geqslant k), \tag{3}$$

其中

$$A^{(n)}_{k-1}(s, x_1, P_{\perp 1}\cdots x_{k-1}, P_{\perp,k-1}) \equiv \frac{1}{\sigma(s)}\frac{1}{(n-k+1)!} \cdot \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\int \underbrace{\frac{d^3P'_k}{\omega'_k}\cdots\frac{d^3P'_n}{\omega'_n}}_{(x'_k\cdots x'_n\text{均}\leqslant x_1\leqslant\cdots\leqslant x_{k-1})}\cdots\frac{d^3P'_{n+l}}{\omega'_{n+l}}\delta^4|T|^2, \tag{4}$$

证：

$$(3)\text{式左边} = \frac{1}{\sigma(s)}\frac{1}{(n-k)!}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\int \frac{d^3P_k}{\omega_k}\underbrace{\frac{d^3P_{k+1}}{\omega_{k+1}}\cdots\frac{d^3P_n}{\omega_n}}_{(x_{k+1}\cdots x_n\text{ 均不介入 }(x_1,\ x_k))}\cdots\frac{d^3P_{n+l}}{\omega_{n+l}}\delta^4|T|^2$$

$$= \frac{1}{\sigma(s)}\frac{1}{(n-k+1)!}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\int \underbrace{\frac{d^3P_k}{\omega_k}\cdots\frac{d^3P_n}{\omega_n}}_{(x_k\cdots x_n\text{ 既不介入 }(x_1,\ x_{k-1})\text{且最少有一个}\geqslant x_{k-1})}\cdots\frac{d^3P_{n+l}}{\omega_{n+l}}\delta^4|T|^2 = (3)\text{ 式右}$$

边.

由(4)式可证明：

$$\int A^{(n)}_{k-1}(s, x_1, P_{\perp 1}\cdots x_{k-1}, P_{\perp,k-1})\underbrace{d^3P_1/\omega_1\cdots d^3P_{k-1}/\omega_{k-1}}_{(x_1\leqslant\cdots\leqslant x_{k-1})} = \sigma_n/\sigma(s). \tag{5}$$

证：

$$(5)\text{式左边} = \frac{1}{\sigma(s)}\frac{1}{(n-k+2)!}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\int \underbrace{\frac{d^3P_2}{\omega_2}\cdots\frac{d^3P_{k-1}}{\omega_{k-1}}\frac{d^3P'_1}{\omega'_1}\frac{d^3P'_k}{\omega'_k}\cdots\frac{d^3P'_n}{\omega'_n}}_{(x'_1, x'_k, x'_{k+1}\cdots x'_n\text{ 均}\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_{k-1})}\cdots\frac{d^3P'_{n+l}}{\omega'_{n+l}}\delta^4|T|^2$$

$$= \frac{1}{\sigma(s)}\frac{1}{(n-1)!}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\int \frac{d^3P_{k-1}}{\omega_{k-1}}\underbrace{\frac{d^3P'_1}{\omega'_1}\cdots\frac{d^3P'_{k-2}}{\omega'_{k-2}}\frac{d^3P'_k}{\omega'_k}\cdots\frac{d^3P'_n}{\omega'_n}}_{(x'_1\cdots x'_{k-2}, x'_k\cdots x'_n\text{ 均 }\leqslant x_{k-1})}\cdots\frac{d^3P'_{n+l}}{\omega'_{n+l}}\delta^4|T|^2 = (5)\text{式}$$

右边.

由(3)、(5)式得

$$\int f^{(n)}_{(1;k)}(s, x_1, P_{\perp 1}\cdots x_k,\ P_{\perp k})\underbrace{\frac{d^3P_1}{\omega_1}\cdots\frac{d^3P_k}{\omega_k}}_{(x_1\leqslant\cdots\leqslant x_k)}$$

$$= \int f^{(n)}_{(1;k-1)}(s, x_1, P_{\perp 1}\cdots x_{k-1}, P_{\perp,k-1})\underbrace{\frac{d^3P_1}{\omega_1}\cdots\frac{d^3P_{k-1}}{\omega_{k-1}}}_{(x_1\leqslant\cdots\leqslant x_{k-1})} - \frac{\sigma_n}{\sigma(s)}. \tag{6}$$

利用(6)式多次，便得[1)]

1) 从半内含谱的定义及(7)式的积分的意义也可以直接看出(7)式是成立的。

$$\underbrace{\int f_{(1;k)}^{(n)}(s, x_1, P_{\perp 1} \cdots x_k, P_{\perp k}) \frac{d^3P_1}{\omega_1} \cdots \frac{d^3P_k}{\omega_k}}_{(x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_k)} = (n-k+1)\sigma_n/\sigma(s). \quad (n \geqslant k). \tag{7}$$

由(7)式及关系式

$$f_{(1;k)}(s, x_1, P_{\perp 1}, \cdots x_k, P_{\perp k}) = \sum_{n=k}^{\infty} f_{(1;k)}^{(n)}(s, x_1, P_{\perp 1} \cdots x_k, P_{\perp k})$$

得

$$\underbrace{\int f_{(1;k)}(s, x_1, P_{\perp 1} \cdots x_k, P_{\perp k}) \frac{d^3P_1}{\omega_1} \cdots \frac{d^3P_k}{\omega_k}}_{(x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_k)} = \sum_{n=k}^{\infty} (n-k+1)\sigma_n/\sigma(s). \tag{8}$$

将式(3)对一切可能的 n 值 $(n \geqslant k)$ 求和便得下述 $(1;k)$ 型内含谱的求和规则

$$\int f_{(1;k)}(s, x_1, P_{\perp 1} \cdots x_k, P_{\perp k}) d^3P_k/\omega_k = f_{(1;k-1)}(s, x_1, P_{\perp 1} \cdots x_{k-1}, P_{\perp, k-1})$$
$$-A_{k-1}(s, x_1, P_{\perp 1} \cdots x_{k-1}, P_{\perp, k-1}) - B_{k-1}(s, x_1, P_{\perp 1} \cdots x_{k-1}, P_{\perp, k-1}). \tag{9}$$

其中

$$B_{k-1}(s, x_1, P_{\perp 1} \cdots x_{k-1}, P_{\perp, k-1}) \equiv \frac{1}{\sigma(s)} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \int \frac{d^3P_{01}}{\omega_{01}} \cdots \frac{d^3P_{0l}}{\omega_{0l}} \delta^4 |T|^2, \tag{10}$$

$P_{01}, \cdots P_{0l}$ 表另一种粒子(另如中性粒子)的动量,

$$A_{k-1}(s, x_1, P_{\perp 1} \cdots x_{k-1}, P_{\perp, k-1}) \equiv \sum_{n=k}^{\infty} A_{k-1}^{(n)}(s, x_1, P_{\perp 1} \cdots x_{k-1}, P_{\perp, k-1}). \tag{11}$$

从式(9),(8)可得

$$\int [A_{k-1}(s, x_1, P_{\perp 1} \cdots x_{k-1}, P_{\perp, k-1}) + B_{k-1}(s, x_1, p_{\perp 1} \cdots x_{k-1}, P_{\perp, k-1})] \underbrace{d^3P_1/\omega_1 \cdots d^3P_{k-1}/\omega_{k-1}}_{(x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_{k-1})}$$
$$= \sum_{n=k-1}^{\infty} \sigma_n/\sigma(s) \leqslant 1. \tag{12}$$

$$\int f_{(1;k-1)}(s, x_1, P_{\perp 1} \cdots x_{k-1}, P_{\perp, k-1}) \underbrace{d^3P_1/\omega_1 \cdots d^3P_{k-1}/\omega_{k-1}}_{(x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_{k-1})}$$
$$= \sum_{n=k-1}^{\infty} (n-k+2)\sigma_n/\sigma(s)$$
$$\approx \langle n \rangle \to \infty, \quad (s \to \infty). \tag{13}$$

由于(12),(13)式的积分中的被积函数对一切变数值 $x_1, P_{\perp 1} \cdots x_{k-1}, P_{\perp, k-1}$ 是正定的,所以(9)式的最后两项同 $f_{(1;k-1)}(s, x_1, P_{\perp 1} \cdots x_{k-1}, P_{\perp, k-1})$ 相比一般是可以忽略的[1]. 于是得

$$\int f_{(1;k)}(s, x_1, P_{\perp 1}, \cdots x_k, P_{\perp k}) d^3P_k/\omega_k \approx f_{(1;k-1)}(s, x_1, P_{\perp 1} \cdots x_{k-1}, P_{\perp, k-1}),$$
$$(s \to \infty). \tag{14}$$

1) 容易估计: $A_{k-1}^{(n)}(s, x_1, P_{\perp 1} \cdots x_{k-1}, P_{\perp, k-1}) / f_{(1;k-1)}^{(n)}(s, x_1, P_{\perp 1} \cdots x_{k-1}, P_{\perp, k-1}) \approx y_1^{n-k+1} / [Y - (y_{k-1} - y_1)]^{n-k+1} \longrightarrow 0, (s \longrightarrow \infty)$, 其中 $Y \approx \ln s$, y_i 是粒子 i 在实验室坐标系中的快度。

当 $k=2$ 时，此式变成

$$\int f_{(1;2)}(s,x_1,P_{\perp 1},x_2,P_{\perp 2})d^3P_2/\omega_2 \doteq \frac{1}{\sigma(s)}\frac{d\sigma}{d^3P_1/\omega_1},\quad (s\to\infty). \tag{15}$$

式(6)、(7)、(8)、(9)、(12)、(13)和(14)是 $(1;k)$ 型半内含谱和内含谱的一些较重要的求和规则. 从它们的推导过程，不难看出，这些求和规则的推导，应用了下述通常半内含归一化的不变截面 $f^{(n)}(s,x_1,P_{\perp 1}\cdots x_k,P_{\perp k})$ 所满足的归一化条件：

$$\int f^{(n)}(s,x_1,P_{\perp 1}\cdots x_k,P_{\perp k})\frac{d^3P_1}{\omega_1}\cdots\frac{d^3P_k}{\omega_k}=n(n-1)\cdots(n-k+1)\sigma_n/\sigma(s). \tag{16}$$

将(7)式同(16)式相比较，不难看出半内含谱 $f^{(n)}$ 和近邻粒子半内含谱 $f^{(n)}_{(1;k)}$ 的结构，一般会有质量上的明显差别. 内含谱，当然也是这样.

三、费曼-杨振宁比例律的推广

费曼-杨振宁比例律[6]是众所周知的内含谱的基本性质之一. 在近邻粒子内含谱的情况下，可以把它作自然的推广. 费曼-杨振宁比例律的推广形式可表述为：

$$f_{(1;k)}(s,x_1,P_{\perp 1}\cdots x_k,P_{\perp k}) \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\to \infty,\quad (s\to\infty,\ x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_k), \tag{17}$$

$$f_{(m;k_1\cdots k_m)}(s,x_{11},P_{\perp 11}\cdots x_{1k_1},P_{\perp 1k_1}\cdots x_{m_1},P_{\perp m1},\cdots x_{mk_m},P_{\perp mk_m}) \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\to \infty,$$
$$(s\to\infty,\ x_{11}\leqslant\cdots\leqslant x_{1k_1},\ \cdots,\ x_{m1}\leqslant\cdots\leqslant x_{mk_m}). \tag{18}$$

其中符号 $\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\to\infty$ 代表趋向一个极限值. 也可叙述为：当 $s\to\infty$ 时，描写 $(1;k)$ 型和 $(m;k_1\cdots k_m)$ 型近邻粒子内含谱的归一化的不变截面均渐近地变成与 s 无关. 有许多论据可以被用来支持这个推广形式. 例如，在杨振宁等的原始文献[6]中提出的某些论据，可以被类似地应用在这个推广的形式上. 在随后一文中，我们将利用几种有代表性的模型来验证这个推广的形式.

在本节，我们将以费曼-杨振宁比例律为基础，对(17)、(18)式作不依赖于模型的推导.

为了讨论的方便，可将变数 x_i, $P_{\perp i}$ 通过一个简单的与能量无关的变换，用实验室坐标系的 y_i, $P_{\perp i}$ 表出. 然后再用变数 $y_1,P_{\perp 1},r_2,P_{\perp 2}\cdots r_k,P_{\perp k}$ 表出，其中 $r_2=y_2-y_1$，$\cdots r_k=y_k-y_{k-1}$. 为简单计，仍用 $f_{(1;k)}$ 表示用新变数表出的函数，即 $f_{(1;k)}(s,y_1,P_{\perp 1},r_2,P_{\perp 2},\cdots r_k,P_{\perp k})$. 由于新变数和原来变数的关系是与 s 无关的，所以，如果用新变数表出的 $f_{(1;k)}$ 满足费曼-杨振宁比例律的推广形式，用原来变数表出的 $f_{(1;k)}$ 也必然满足它.

我们采用的是反证法. 假设当 $s\to\infty$ 时，$f_{(1;k)}(s,y_1,P_{\perp 1}\cdots y_k,P_{\perp k})$ 渐近地变成和 s 有关. 那么，最少存在一组 $(y'_1,P'_{\perp 1},\cdots y'_k,P'_{\perp k})$ 值能使 $f_{(1;k)}(s,y'_1,P'_{\perp 1}\cdots y'_k,P'_{\perp k})\to\infty$, $(s\to\infty)$. 由于对任何有限大的 s 正值而言，$f_{(1;k)}$ 是 $y_1,P_{\perp 1},\cdots y_k,P_{\perp k}$ 的连续函数［这是因为全部粒子的微分截面是各粒子的快度 y_i 和横向动量 $P_{\perp i}$ 的连续函数(例如，见文献[7])，而 $(1;k)$ 型内含谱的截面 $f_{(1;k)}$ 是这一连续函数对一些变数在有限大区间内积分的结果］，所以当 $s\to\infty$ 时，在 $(y'_2,P'_{\perp 2}\cdots y'_k,P'_{\perp k})$ 点附近的一个不为 0 的区域内所有的点 $(y_2,P_{\perp 2}\cdots y_k,P_{\perp k})$ 都会使 $f_{(1;k)}\to\infty$. 又由于 $f_{(1;k)}$ 是正定的函数，所以必有 $f(s,y'_1,P'_{\perp 1})=\int f_{(1;k)}(s,y'_1,P'_{\perp 1},y_2,P_{\perp 2}\cdots y_k,P_{\perp k})\,dy_2d^2P_{\perp 2}\cdots dy_kd^2P_{\perp k}\to\infty,\quad (s\to\infty),$ (19)

这是和费曼-杨振宁比例律矛盾的。所以当 $s \to \infty$ 时，必有 $f_{(1;k)}(s, y_1, P_{\perp 1} \cdots y_k, P_{\perp k}) = f_{(1;k)}(y_1, P_{\perp 1} \cdots y_k, P_{\perp k})$，即 $f_{(1;k)}$ 渐近地与 s 无关.

同理可证 $f_{(m;k_1 \cdots k_m)}$ 也渐近地变成与 s 无关.

当 $s \to \infty$ 时，所谓"中心区"，相当于 $x \to 0$，或

$$y_1 \approx \frac{1}{2} \ln s + y_1^*, \tag{20}$$

其中 y_1^* 可为任何有限大的数，是代表第 1 个粒子相对质心系的快度.以下是证明 $f_{(1;k)}(y_1, P_{\perp 1}, r_2, P_{\perp 2}, \cdots r_k, P_{\perp k})$ 渐近地变成与 y_1 无关. 假设与此相反，$f_{(1;k)}(y_1, P_{\perp 1}, r_2, P_{\perp 2}, \cdots r_k, P_{\perp k})$ 渐近地变成与 y_1 有关. 那么，由于 $y_1 \to \frac{1}{2} \ln s \to \infty$，最少存在一组 $(r'_2, P'_{\perp 2}, \cdots r'_k, P'_{\perp k})$ 值，能使 $f_{(1;k)}(y_1, P_{\perp 1}, r'_2, P'_{\perp 2} \cdots r'_k, P'_{\perp k}) \to \infty, (s \to \infty)$. 以下的证明过程便同上述的证明渐近地变成与 s 无关的过程完全相同.

当 $k = 2$ 时，可以将费曼-杨振宁比例律的推广形式和实验相比较. 为此，只须采用横向动量为有限（指横向动量的平均值，当 $s \to \infty$ 时，为有限值）的合理假设，将 (8) 式写成

$$\int dy_1 dr_2 \tilde{f}_{(1;2)}(s, y_1, r_2) \approx \langle n - 1 \rangle, \tag{21}$$

其中

$$\tilde{f}_{(1;2)}(s, y_1, r_2) \equiv \int d^2P_{\perp 2} \int d^2P_{\perp 1} f_{(1;2)}(s, y_1, P_{\perp 1}, r_2, P_{\perp 2}). \tag{22}$$

由(21)式知 $dy_1 \int dr_2 \tilde{f}_{(1;2)}$ 可视为位于 $(y_1, y_1 + dy_1)$ 间隔且有带电的右邻存在的带电粒子的平均数；故 $dr_2 \int_0^{Y-r_2} dy_1 \tilde{f}_{(1;2)}$ 代表有带电的右邻粒子位于 $(r_2, r_2 + dr_2)$ 间隔的带电粒子平均数，所以快度隙长度分布为

$$P(r_2) \equiv \int dy_1 \tilde{f}_{(1;2)}(s, y_1, r_2) / \langle n - 1 \rangle. \tag{23}$$

由费曼-杨振宁比例律及横向动量为有限的假设，即知当 $s \to \infty$ 时，在中心区有 $\int \tilde{f}_{(1;2)}(s, y_1, r_2) dr_2 > 0$. 再由费曼-杨振宁比例律的推广形式，便知，当 $s \to \infty$ 时有

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{(1;2)}(s, y_1, r_2) &\to \gamma_c(r_2) \lessgtr_0^\infty, \quad (\text{在中心区 } C), \\ &\to \gamma_F(y_1, r_2) \lessgtr_0^\infty, \quad (\text{在碎裂区 } F). \end{aligned} \tag{24}$$

注意到碎裂区的快度间隔长度与 s 无关，从 (23)，(21) 式便得（设 Y 表 y_1 的积分间隔 $\approx \ln s$）：

$$P(r_2) \approx \gamma_c(r_2) \Big/ \int_0^\infty \gamma_c(r_2) dr_2. \quad (s \to \infty) \tag{25}$$

目前只有两个紧邻的带电粒子间的快度隙长度的分布 $P(r_2)$ 已由实验定出. 将文献[2]中的入射动量为 100, 200, 400 GeV/c 时的 $P(r_2)$ 曲线相比较，便可看出这三根曲线是很接近的。这表示这三根曲线已接近于它们的 $s \to \infty$ 时的极限位置. 这就是说：当 $k = 2$ 时，由费曼-杨振宁比例律的推广形式导出的结果（指(25)式）和实验是符合的. 反之，由实验结果 $P(r_2) < \infty, (s \to \infty)$，及(23)式，并注意到实验结果 $\langle n - 1 \rangle \approx \ln s$，$y_1$ 的积

分间隔 $Y \approx \ln s$ 及 $\int \tilde{f}_{(1;2)}(s, y_1, r_2)\, dr_2$ 和 y_1 无关，便知自然的结果是 $\tilde{f}_{(1;2)}(s, y_1, r_2) < \infty$，$(s \to \infty)$，再由横向动量为有限的假设，可得 $f_{(1;2)}(s, y_1, P_{\perp 1}, y_2, P_{\perp 2}) < \infty$，$(s \to \infty)$，即当 $k = 2$ 时，费曼-杨振宁比例律的推广形式成立.

四、其他近邻粒子的内含谱和半内含谱

一般说来，可以设 1、2 两个近邻的粒子之间还存在 j_{12} 个同类型的其他粒子，2、3 两个近邻的粒子之间还存在 j_{23} 个同类型的其他粒子，余类推. 为简单计，以下取 $j_{12} = j_{23} = \cdots = j_{k-1,k} = j - 1$. 这种 $(1; k)$ 型谱，可称为第 j 种 $(1; k)$ 型谱，以 $(1; k)_j$ 表之. 当 $j = 1$ 时，就是在第二节中所讨论的情况.

就揭示多粒子产生的机理而言，不同的 j 值的 $(1; k)_j$ 型谱可以发挥不同的作用. 这一点可以双粒子 $(1; k)_j$ 型谱 $(k = 2)$ 为例说明之. 这两个粒子间的快度隙长度可称为第 j 种快度隙长度. 为了对它有一个很粗略的概念，下面是用一维型的 Chew-Pignotti 模型（未计入集团 (Cluster) 的影响）计算的结果：

(1) 粒子数为 $n + 2$ 的近邻粒子半内含谱的第 j 种快度隙长度 r_2 的分布（令 $Y = \ln s$，g 表顶角耦合常数的平方）

$$\frac{\partial \sigma_{n+2}}{\partial y_1 \partial r_2} = g^{n+2} e^{(\beta-1)Y} \cdot r_2^{j-1}(Y - r_2)^{n-j-1}/(j-1)!(n-j-1)!,\ (\text{与 } y_1 \text{ 无关}). \tag{26}$$

通常半内含谱快度间隔 $r_2 (\equiv y_2 - y_1)$ 的分布

$$\frac{\partial \sigma_{n+2}}{\partial y_1 \partial r_2} = g^{n+2} e^{(\beta-1)Y} Y^{n-2}/(n-2)!,\quad (\text{与 } y_1,\ r_2 \text{ 无关}). \tag{27}$$

(2) 近邻粒子内含谱的第 j 种快度隙长度 r_2 的分布

$$\frac{\partial \sigma}{\partial y_1 \partial r_2} = g^{j+3} r_2^{j-1} e^{-g r_2}/(j-1)!,\quad (\text{与 } Y,\ y_1 \text{ 无关}), \tag{28}$$

通常内含谱的快度间隔 $r_2 (\equiv y_2 - y_1)$ 的分布

$$\frac{\partial \sigma}{\partial y_1 \partial r_2} = g^4,\quad (\text{与 } Y,\ y_1,\ r_2 \text{ 无关}). \tag{29}$$

由 (28) 式知当 $j > 1$ 时，快度隙长度为 0 的几率为 0，j 值愈大时，几率的极大值所对应的快度隙长度愈大. 第 j 种快度隙长度 $y_2 - y_1$ 的平均值 $\approx 0.5j$（0.5 表紧邻的带电粒子间的平均快度间隔）. 由此可见，当 $j > 1 (j = 1)$ 时，第 j 种快度隙长度的分布最适宜于用来揭露与快度距离 $\doteqdot 0.5j$ $(\lesssim 0.5)$ 有关系的多粒子产生的机理. 通常的双粒子内含谱代表所有第 j 种快度隙长度的贡献之和. 显然，为了有效地揭露相空间的区域性的结构（例如集团的结构），同时又增大数据的统计度，最好是采用所有 $j \lesssim j_0$（$0.5\, j_0$ 代表所探讨的区域性结构所占的快度间隔）的第 j 种快度隙长度的贡献之和来探讨. 反之，要揭露非区域性的关联（即长程关联）的机理，最好是采用所有 $j > j_0$ 的第 j 种快度隙长度的贡献之和来探讨，因为它从一开始就消除了代表短程关联的集团结构的影响.

推广第二节对(7)式的证明过程可得下述的求和规则：

$$\underbrace{\int\cdots\int f^{(n)}_{(1;k);j}(s,\ x_1,\ P_{\perp 1},\ \cdots x_k,\ P_{\perp k})\ \frac{dP_1}{\omega_1}\cdots\frac{dP_k}{\omega_k}}_{(x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_k)} = (n+j-jk)\ \frac{\sigma_n}{\sigma(s)},$$

$$(n \geqslant (j-1)(k-1)+k), \tag{30}$$

参 考 文 献

[1] C. Quigg, G. Thomas and P. Pirilä, *Phys. Rev. Lett.*, **34**(1975), 290.
[2] T. Ludlam and R. Slansky, *Phys. Rev.*, D12(1975), 65.
[3] 见 A. Krzywicki, C. Quigg and G. Thomas, *Phys. Lett.*, **57B**(1975), 369 一文文末的参考文献[4,5].
[4] 刘汉昭，中国科学，1978, **5**, 508. 科学通报，**21** (1976), 483.
[5] Z. Koba, H. B. Nielsen and P. Olesen, *Phys. Lett.*, **38B**(1972), 25. *Nucl, Phys.*, **B40**(1972), 317.
[6] J. Benecke, T. T. Chou, C. N. Yang and E. Yen, *Phys. Rev.*, 188(1969), 2159; R. P. Feynman, *Phys. Rev. Lett.*, **23**(1969), 1415.
[7] P. Pirilä and G. Thomas, *Phys. Rev.*, D11(1975), 2532.

FINE STRUCTURES OF INCLUSIVE SPECTRA (I)——SUM RULES AND THE GENERALIZATION OF FEYNMAN-YANG SCALING

LIU HAN-ZHAO

(*Nankai University*)

ABSTRACT

Important implications of the fine structure of inclusive spectra (to be called inclusive and semi-inclusive spectra of nearby particles, which represent the local distributions of nearby particles in three-dimensional phase space with rapidity y and transverse momenta $P_{\perp x}$, $P_{\perp z}$ as independent coordinates are explained, and some basic features of the fine stucture are found, namely, sum rules and the generalized form of the Feynman-Yang scaling.

One of the sum rules, for example, is:

$$\underbrace{\int f_{(1;k)}(s,\ x_1,\ P_{\perp 1},\cdots x_k,\ P_{\perp k})\ \frac{d^3P_1}{\omega_1}\cdots\frac{d^3P_k}{\omega_k}}_{(x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_k)} = \sum_{n=k}^{\infty}(n-k+1)\ \frac{\sigma_n}{\sigma(s)}$$

where $f_{(1;k)}$ denotes the normalized invariant inclusive cross section of k closely neighboring particles. It follows that the inclusive the spectra of nearby particles are qualitatively different from the usual ones.

The generalized form of the Feynman-Yang scaling for the case of k closely neighboring particles, for example, is:

$$f_{(1;k)}(s,\ x_1,\ P_{\perp 1},\cdots x_k,\ P_{\perp k}) \nrightarrow \infty,\quad (s\to\infty,\ x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_k).$$

where '$\nrightarrow\infty$' denotes 'approaches a definite limit'. For $k=2$, the existing experimental data for the rapidity gap-length distributions show that for FNAL energies, $f_{(1,k)}$ is already close to its limiting form. The inclusive (semi-inclusive) spectra of nearby particles way be able to reflect effectively short-range correlation effects.