第3卷 第1期 高能物理与核物理 Vol. 3, No. 1
1979年1月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS Jan., 1979

规范场的正则量子化(II)
——自发破缺规范场

赵保恒 阎沐霖
(中国科学技术大学)

摘 要

我们在 R_ξ 规范下对 $SU(2)$ 自发破缺规范场进行正则量子化，并求出了规范补偿项.

一、引 言

我们讨论 R_ξ 规范下 $SU(2)$ 自发破缺规范场的正则量子化和纯杨-Mills 场一样，在我们的理论中包含着两个非物理场 χ 和 χ'，它们和其他场的耦合，破坏了物理态之间的 S 矩阵的幺正性. 为了求出规范补偿项，我们用上一文[1]的方法，得到了 χ 和 χ' 的有效拉氏量，然后求出了规范补偿项. 在作用量中添上规范补偿项以后，物理态空间中的 S 矩阵可以表示成物理粒子和非物理粒子没有耦合的形式，显示出它的幺正性.

在我们讨论的 $SU(2)$ 模型中，通过自发破缺，规范场的两个同位旋分量得到质量，它们相当于中间玻色子场 $\mathbf{W}_\mu$，另一个分量仍是零质量的，可以完全按照[1]处理纯杨-Mills 场的方法进行正则量子化，对于 $\mathbf{W}_\mu$ 场则还需要进一步讨论.

二、量 子 化

假定除了杨- Mills 场 $\mathbf{A}_\mu$，还有一个同位旋三重态的实标量场 $\boldsymbol{\varphi}$，它们以规范不变的形式耦合起来. 标量场的位能 $V(\boldsymbol{\varphi})=\mu^2\boldsymbol{\varphi}^2+\lambda(\boldsymbol{\varphi}^2)^2$, $\mu^2<0, \lambda>0$, $V(\boldsymbol{\varphi})$ 在 $\boldsymbol{\varphi}=\mathbf{v}\neq 0$ 有极小值. 我们取同位旋空间的 z 轴和 $\mathbf{v}$ 平行. 设 $\boldsymbol{\eta}$ 是 z 轴上的单位矢量，$\mathbf{v}=v\boldsymbol{\eta}$. 我们把 $\boldsymbol{\varphi}$ 分解成两部分:

$$\boldsymbol{\varphi}=\mathbf{s}+(v+\phi)\boldsymbol{\eta}, \quad \boldsymbol{\eta}\cdot\mathbf{s}=0. \tag{1}$$

$\mathbf{s}$ 是垂直于 z 轴的分量，$\mathbf{s}$ 和 ϕ 的真空期望值在树图近似下为零. 在 R_ξ 规范下[2]，场的拉氏量可以写成:

本文1978年1月27日收到.

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu + g\mathbf{A}_\mu \times \mathbf{A}_\nu)^2 + \frac{1}{2}[(\partial_\mu + g\mathbf{A}_\mu \times)\boldsymbol{\varphi}]^2$$
$$- V(\boldsymbol{\varphi}) + \left(\partial^\mu \mathbf{A}_\mu - g\frac{v}{\xi}\boldsymbol{\eta}\times\boldsymbol{\varphi}\right)\cdot\boldsymbol{\chi} + \frac{1}{2\xi}\boldsymbol{\chi}^2, \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{\chi}$ 是拉氏乘子场，ξ 是规范参数.

我们把 $\mathbf{A}_\mu$ 和 $\boldsymbol{\chi}$ 也各分解为两部分，

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{A}_\mu = \mathbf{W}_\mu + \mathscr{A}_\mu\boldsymbol{\eta}, \quad \mathbf{W}_\mu\cdot\boldsymbol{\eta} = 0, \\ &\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\chi}_t + \chi_0\boldsymbol{\eta}, \qquad \boldsymbol{\chi}_t\cdot\boldsymbol{\eta} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$\mathbf{W}_\mu$ 和 $\boldsymbol{\chi}_t$ 的方向与 z 轴垂直. 于是(2)可以改写成:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_{Ws} + \mathscr{L}_{\mathscr{A}\psi} + \mathscr{L}_I, \tag{4}$$

其中 $\mathscr{L}_{Ws}$ 和 $\mathscr{L}_{\mathscr{A}\psi}$ 是场量的二次项，$\mathscr{L}_I$ 是相互作用项.

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{L}_{Ws} = &-\frac{1}{4}(\partial_\mu \mathbf{W}_\nu - \partial_\nu \mathbf{W}_\mu)^2 + \frac{1}{2}M^2\mathbf{W}_\mu^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \mathbf{s})^2 + M\mathbf{W}_\mu \\ &\cdot(\boldsymbol{\eta}\times\mathbf{s}) + \left(\partial^\mu \mathbf{W}_\mu - \frac{M}{\xi}\boldsymbol{\eta}\times\mathbf{s}\right)\cdot\boldsymbol{\chi}_t + \frac{1}{2\xi}\boldsymbol{\chi}_t^2, \\ \mathscr{L}_{\mathscr{A}\psi} = &-\frac{1}{4}(\partial_\mu\mathscr{A}_\nu - \partial_\nu\mathscr{A}_\mu)^2 + \frac{1}{2}[(\partial_\mu\psi)^2 - M^2\psi^2] \\ &+ \chi_0\partial^\mu\mathscr{A}_\mu + \frac{1}{2\xi}\chi_0^2. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

式中

$$M = gv, \quad m^2 = 8\lambda v^2. \tag{6}$$

$\mathscr{L}_I$ 的具体表示式从略.

在忽略 $\mathscr{L}_I$ 时，$\mathscr{L}_{Ws}$ 和 $\mathscr{L}_{\mathscr{A}\psi}$ 互相独立. 我们可以用和[1]完全相同的方法对 $\mathscr{L}_{\mathscr{A}\psi}$ 进行正则量子化. 参考[1]就知道:

$$\mathscr{A}_\mu = B_\mu - \partial_\mu\chi_0' + C_\mu \tag{7}$$

B_μ 是横光子场，C_μ 和 χ_0 有关，

$$\left.\begin{aligned} &\partial^\mu C_\mu = -\frac{1}{\xi}\chi_0, \\ &\Box C_\mu = \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\partial_\mu\chi_0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

χ_0 和 χ_0' 都是非物理的零度规的场.

$$\left.\begin{aligned} &\Box\chi_0 = 0, \quad \Box\chi_0' = 0, \\ &[\chi_0(x), \chi_0(y)] = 0, \quad [\chi_0'(x), \chi_0'(y)] = 0, \\ &[\chi_0(x), \chi_0'(y)] = iD(x-y). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

χ_0, χ_0' 和物理场 B_μ, ψ 之间的收缩为零: $\overline{\chi_0 B_\mu} = 0$, $\overline{\chi_0\psi} = 0$, $\overline{\chi_0' B_\mu} = 0$, $\overline{\chi_0'\psi} = 0$, 但是 $\overline{\chi_0\chi_0'} = iD_F$.

现在讨论 $\mathscr{L}_{Ws}$ 的量子化. 令

$$\mathbf{f} = \boldsymbol{\eta}\times\mathbf{s}, \tag{10}$$

则 $\mathscr{L}_{Wf}$ 可以写成

$$\mathscr{L}_{Wf} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu \mathbf{W}_\nu - \partial_\nu \mathbf{W}_\mu)^2 + \frac{1}{2}M^2\mathbf{W}_\mu^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \mathbf{f})^2 + M\mathbf{W}_\mu \cdot \partial^\mu \mathbf{f} + \left(\partial^\mu \mathbf{W}_\mu - \frac{M}{\xi}\mathbf{f}\right)\cdot \boldsymbol{\chi}_t + \frac{1}{2\xi}\boldsymbol{\chi}_t^2. \tag{11}$$

相应的运动方程为:

$$\boldsymbol{\chi}_t = -\xi\left(\partial^\mu \mathbf{W}_\mu - \frac{M}{\xi}\mathbf{f}\right), \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned}&(\Box + M^2)\mathbf{W}_\mu - \partial_\mu(\partial^\nu \mathbf{W}_\mu) - \partial_\mu \boldsymbol{\chi}_t + M\partial_\mu \mathbf{f} = 0,\\ &\Box \mathbf{f} + M\partial^\mu \mathbf{W}_\mu + \frac{M}{\xi}\boldsymbol{\chi}_t = 0.\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

于是

$$\left.\begin{aligned}&\left(\Box + \frac{M^2}{\xi}\right)(\Box + M^2)\mathbf{W}_\mu = 0,\\ &\left(\Box + \frac{M^2}{\xi}\right)\mathbf{f} = 0,\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$$\left(\Box + \frac{M^2}{\xi}\right)\boldsymbol{\chi}_t = 0. \tag{15}$$

定义和 $\mathbf{W}_\mu$、$\mathbf{f}$ 分别共轭的正则变量如下:

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{\pi}_0 = \frac{\partial \mathscr{L}_{Wf}}{\partial \dot{\mathbf{W}}^0} = \boldsymbol{\chi}_t, \quad \boldsymbol{\pi}_k = \frac{\partial \mathscr{L}_{Wf}}{\partial \dot{\mathbf{W}}^k} = \partial_k \mathbf{W}_0 - \dot{\mathbf{W}}_k,\\ &\mathbf{p} = \frac{\partial \mathscr{L}_{Wf}}{\partial \dot{\mathbf{f}}} = \dot{\mathbf{f}} + M\mathbf{W}_0.\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

引进等时对易关系,对场进行正则量子化. 然后利用场方程和等时对易关系可以求出 x_0、y_0 任意的对易关系:

$$\left.\begin{aligned}&[W_\mu^a(x), W_\nu^b(y)] = -i\delta_{ab}\left(g_{\mu\nu} + \frac{\partial_\mu^x \partial_\nu^x}{M^2}\right)\Delta(x-y, M^2) + i\delta_{ab}\frac{\partial_\mu^x\partial_\nu^x}{M^2}\Delta\left(x-y, \frac{M^2}{\xi}\right),\\ &[W_\mu^a(x), \chi^b(y)] = -i\delta_{ab}\partial_\mu^x\Delta\left(x-y, \frac{M^2}{\xi}\right),\\ &[f^a(x), f^b(y)] = i\delta_{ab}\Delta\left(x-y, \frac{M^2}{\xi}\right),\\ &[f^a(x), \chi^b(y)] = i\delta_{ab}M\Delta\left(x-y, \frac{M^2}{\xi}\right),\\ &[W_\mu^a(x), f^b(y)] = 0,\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

$$[\chi^a(x), \chi^b(y)] = 0. \tag{18}$$

其中 $a, b = 1, 2$;

$$\Delta(x, M^2)=\frac{-i}{(2\pi)^3}\int d^4k\epsilon(k_0)\delta(k^2-M^2)e^{-ikx}. \tag{19}$$

在动量空间内，$\mathbf{W}_\mu$ 的传播子为：

$$-i\delta_{ab}\left[g_{\mu\nu}-\left(1-\frac{1}{\xi}\right)k_\mu k_\nu\Big/\left(k^2-\frac{M^2}{\xi}+i\epsilon\right)\right]\Big/(k^2-M^2+i\epsilon), \tag{20}$$

$\mathbf{f}$ 和 $\mathbf{s}$ 的传播子为：

$$i\delta_{ab}\Big/\left(k^2-\frac{M^2}{\xi}+i\epsilon\right), \tag{21}$$

定义

$$\boldsymbol{\chi}_t'=\frac{\xi}{2M^2}\left(\partial^\mu\mathbf{W}_\mu+\frac{M}{\xi}\mathbf{f}\right), \tag{22}$$

则

$$\left.\begin{aligned}&\left(\Box+\frac{M^2}{\xi}\right)\boldsymbol{\chi}_t'=0,\\&[\chi'^a(x),\chi'^b(y)]=0,\\&[\chi^a(x),\chi'^b(y)]=i\delta_{ab}\Delta\left(x-y,\frac{M^2}{\xi}\right),\\&a,b=1,2.\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

所以 $\boldsymbol{\chi}_t'$ 也是一个非物理的零度规的场．我们用下式再定义一个 $\mathbf{V}_\mu$ 场，

$$\mathbf{W}_\mu=\mathbf{V}_\mu-\partial_\mu\boldsymbol{\chi}_t'+\frac{1}{2M^2}\partial_\mu\boldsymbol{\chi}_t. \tag{24}$$

易证

$$\left.\begin{aligned}&(\Box+M^2)\mathbf{V}_\mu=0,\quad\partial^\mu\mathbf{V}_\mu=0,\\&[V_\mu^a(x),V_\nu^b(y)]=-i\delta_{ab}\left(g_{\mu\nu}+\frac{\partial_\mu^x\partial_\nu^x}{M^2}\right)\Delta(x-y,M^2),\\&a,b=1,2.\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

所以 $\mathbf{V}_\mu$ 是正度规的物理场，描写一种质量为 M 的矢量介子，其传播子为：

$$-i\delta_{ab}(g_{\mu\nu}-k_\mu k_\nu/M^2)/(k^2-M^2+i\epsilon). \tag{26}$$

(24)式把 $\mathbf{W}_\mu$ 分解成物理部分 $\mathbf{V}_\mu$ 和非物理部分 $-\partial_\mu\boldsymbol{\chi}_t'+\frac{1}{2M^2}\partial_\mu\boldsymbol{\chi}_t$.

由(12)和(22)

$$\mathbf{f}=\frac{1}{2M}(\boldsymbol{\chi}_t+2M^2\boldsymbol{\chi}_t'), \tag{27}$$

所以 $\mathbf{f}$ 是两个非物理场的组合．

我们用 $\boldsymbol{\chi}$ 的正频率部分定义物理态，

$$\boldsymbol{\chi}^{(+)}(x)|\text{phys}\rangle=0. \tag{28}$$

物理态中有物理粒子 (B_μ, $\mathbf{V}_\mu$, ϕ)，还可能有 $\boldsymbol{\chi}$ 引起的规范激发，但后者不导致可观测的物理效应．

现在考虑有相互作用的情况($\mathscr{L}_I \neq 0$). 当忽略 $\mathscr{L}_I$ 时, $\Box \chi_0 = 0$, $\left(\Box + \frac{M^2}{\xi}\right)\boldsymbol{\chi}_t = 0$, 但是如果 $\mathscr{L}_I \neq 0$, 这两个方程应有所修正. 为了求出 $\boldsymbol{\chi}$ 的方程, 比较方便的办法是直接从(2)的 $\mathscr{L}$ 出发,并利用恒等式

$$(\partial_\mu + g\mathbf{A}_\mu \times)[(\partial_\nu + g\mathbf{A}_\nu \times)\mathbf{F}^{\mu\nu}] = 0, \tag{29}$$

就可以得到

$$\Box \boldsymbol{\chi} + g\partial^\mu(\mathbf{A}_\mu \times \boldsymbol{\chi}) + \frac{M}{g\xi}\boldsymbol{\eta} \times (\boldsymbol{\chi} \times \boldsymbol{\varphi}) = 0. \tag{30}$$

此式也可以写成

$$\left.\begin{aligned} &\Box \chi_0 + g\partial^\mu(\mathbf{A}_\mu \times \boldsymbol{\chi}) \cdot \boldsymbol{\eta} = 0. \\ &\left(\Box + \frac{M^2}{\xi}\right)\boldsymbol{\chi}_t + g\partial^\mu(\mathbf{A}_\mu \times \boldsymbol{\chi})_t + g\frac{M}{\xi}(\phi \boldsymbol{\chi}_t - \chi_0 \mathbf{s}) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

(31)说明有相互作用时 $\Box \chi_0 \neq 0$, $\left(\Box + \frac{M^2}{\xi}\right)\boldsymbol{\chi}_t \neq 0$. 这导致物理态条件不成立, 因此 S 矩阵在物理态空间不么正. 么正性破坏是由 $\boldsymbol{\chi}$ 和其他场的耦合引起来的.

三、$\boldsymbol{\chi}$ 和 $\boldsymbol{\chi}'$ 的相互作用拉氏量

把(7)和(24)代入 $\mathscr{L}_{A\phi}$ 和 $\mathscr{L}_{Wf}$, 并且利用(8)、(12)和(27), 可以求出 $\mathscr{L}_I = 0$ 时 $\mathscr{L}$ 中包含 $\boldsymbol{\chi}$ 和 $\boldsymbol{\chi}'$ 的部分:

$$\mathscr{L}_\chi = \partial^\mu \boldsymbol{\chi}'_t \cdot \partial_\mu \boldsymbol{\chi}_t - \frac{M^2}{\xi}\boldsymbol{\chi}'_t \cdot \boldsymbol{\chi}_t + \partial^\mu \chi'_0 \partial_\mu \chi_0. \tag{32}$$

此式也可以由 $\boldsymbol{\chi}$ 和 $\boldsymbol{\chi}'$ 满足的方程和对易关系(9)、(15)、(18)和(23)推出.

当 $\mathscr{L}_I \neq 0$ 时, $\mathscr{L}$ 中包含 C_μ, $\boldsymbol{\chi}$ 和 $\boldsymbol{\chi}'$ 的部分可以写成

$$\mathscr{L}_\chi = \partial^\mu \boldsymbol{\chi}'_t \cdot \partial_\mu \boldsymbol{\chi}_t - \frac{M^2}{\xi}\boldsymbol{\chi}'_t \cdot \boldsymbol{\chi}_t + \partial^\mu \chi'_0 \partial_\mu \chi_0 + \mathscr{L}_{\chi I}, \tag{33}$$

$\mathscr{L}_{\chi I}$ 是相互作用拉氏量. 从(30)我们知道 $\mathscr{L}_{\chi I}$ 应当有下面的性质:

$$\frac{\delta}{\delta \boldsymbol{\chi}'}\int d^4x \left(\mathscr{L}_{\chi I} - \frac{M^2}{\xi}\boldsymbol{\chi}'_t \cdot \boldsymbol{\chi}_t\right) = -g\partial^\mu(\mathbf{A}_\mu \times \boldsymbol{\chi}) - \frac{M}{g\xi}\boldsymbol{\eta} \cdot (\boldsymbol{\chi} \times \boldsymbol{\varphi}). \tag{34}$$

现在把 $\mathscr{L}_\chi$ 改写成

$$\mathscr{L}_\chi = \partial^\mu \boldsymbol{\chi}' \cdot \partial_\mu \boldsymbol{\chi} - g\boldsymbol{\chi}' \cdot \partial^\mu(\mathbf{A}_\mu \times \boldsymbol{\chi}) - \frac{M}{g\xi}\boldsymbol{\chi}' \cdot [\boldsymbol{\eta} \times (\boldsymbol{\chi} \times \boldsymbol{\varphi})] + \mathscr{L}'. \tag{35}$$

其中

$$\mathscr{L}' \equiv \mathscr{L}_{\chi I} - \frac{M^2}{\xi}\boldsymbol{\chi}'_t \cdot \boldsymbol{\chi}_t + g\boldsymbol{\chi}' \cdot \partial^\mu(\mathbf{A}_\mu \times \boldsymbol{\chi}) + \frac{M}{g\xi}\boldsymbol{\chi}' \cdot [\boldsymbol{\eta} \times (\boldsymbol{\chi} \times \boldsymbol{\varphi})]. \tag{36}$$

上式右边最后一项可以写成

$$\frac{M}{g\xi}\boldsymbol{\chi}' \cdot [\boldsymbol{\eta} \times (\boldsymbol{\chi} \times \boldsymbol{\varphi})] = \frac{M^2}{\xi}\boldsymbol{\chi}'_t \cdot \boldsymbol{\chi}_t + \frac{M}{g\xi}(\boldsymbol{\chi}'_t \cdot \boldsymbol{\chi}_t \phi - \chi_0 \boldsymbol{\chi}'_t \cdot \mathbf{s}). \tag{37}$$

(36)右边第二项和(37)右边第一项互相抵消,所以 $\mathscr{L}'$ 实际上是一个相互作用拉氏量.

现在把 $\mathscr{L}'$ 中的 $\boldsymbol{\chi}'$ 换成 $\boldsymbol{\chi}'+\boldsymbol{\chi}_c$, $\boldsymbol{\chi}_c$ 是一个任意的经典部分,但是(36)右边第三项中的 $\mathbf{A}_\mu$ 和第四项中的 $\boldsymbol{\varphi}$ 不动, $\mathscr{L}'$ 变成 $\mathscr{L}'_c$. 由(34)立即得到

$$\frac{\delta}{\delta \boldsymbol{\chi}_c}\int d^4x \mathscr{L}'_c\Big|_{\chi_c=0}=0. \tag{38}$$

让我们研究 $\mathscr{L}'$ 对应顶角的 Feynman 规则. 如果我们暂时忽略 (36) 右边第三和第四项中 $\mathbf{A}_\mu$ 和 $\boldsymbol{\varphi}$ 内的 $\boldsymbol{\chi}'$ 未用 $\boldsymbol{\chi}'+\boldsymbol{\chi}_c$ 代替的事实,从(38)我们立即得到这样的结论: $\mathscr{L}'$ 对应的至少与一根 $\boldsymbol{\chi}'$ 线相连的顶角为零.

Feynman 规则是在相互作用表象中写出的. 在相互作用表象中, $\boldsymbol{\chi}'_t\cdot\mathbf{s}=\boldsymbol{\chi}'_t\cdot(\mathbf{f}\times\boldsymbol{\eta})=\frac{1}{2M}\boldsymbol{\chi}'_t\cdot(\boldsymbol{\chi}_t\times\boldsymbol{\eta})$, 再注意到(37), 便知道从(36)右边最后一项的 $\boldsymbol{\varphi}$ 是引不出 $\boldsymbol{\chi}'$ 线来的. 我们可以把(34)右边第三项用 $-g\partial^\mu\boldsymbol{\chi}'\cdot(\mathbf{A}_\mu\times\boldsymbol{\chi})$ 代替,这样就容易看出,从(36)右边第三项的 $\mathbf{A}_\mu$ 也引不出 $\boldsymbol{\chi}'$ 线. 所以虽然没有把(36)右边最后两项中的 $\mathbf{A}_\mu$ 和 $\boldsymbol{\varphi}$ 包含的 $\boldsymbol{\chi}'$ 换成 $\boldsymbol{\chi}'+\boldsymbol{\chi}_c$, 但是关于与 $\boldsymbol{\chi}'$ 线相连的 $\mathscr{L}'$ 顶角为零的 Feynman 规则仍是正确的. 可以认为 $\mathscr{L}'$ 包含 $\boldsymbol{\chi}$ 和 C_μ 但不包含 $\boldsymbol{\chi}'$. 重复[1]中有关的讨论便知道, $\mathscr{L}'$ 对物理态之间的 S 矩阵元没有贡献. 在计算物理态之间的 S 矩阵元时,可以取

$$\mathscr{L}_{\chi\text{eff}}=\partial^\mu\boldsymbol{\chi}'\cdot\partial_\mu\boldsymbol{\chi}-g\boldsymbol{\chi}'\cdot\partial^\mu(\mathbf{A}_\mu\times\boldsymbol{\chi})-\frac{M}{\xi g}\boldsymbol{\chi}'\cdot[\boldsymbol{\eta}\times(\boldsymbol{\chi}\times\boldsymbol{\varphi})], \tag{39}$$

并且上式相互作用项内的 $\boldsymbol{\chi}$ 和 $\boldsymbol{\chi}'$ 必须收缩成封闭的回路(这里所说的 $\boldsymbol{\chi}$ 和 $\boldsymbol{\chi}'$ 不是指 $\mathbf{A}_\mu$ 和 $\boldsymbol{\varphi}$ 中所包含的).

四、规范补偿项

根据上一节的讨论,我们知道在相互作用表象中计算物理态之间的 S 矩阵元时,可以取

$$S=T\exp i\int d^4x(\mathscr{L}_{pI}+\chi'^a\gamma_{ab}\chi^b), \tag{40}$$

其中 $\mathscr{L}_{pI}$ 是 $\mathscr{L}_I$ 中只包含物理场 $(\mathbf{V}_\mu, B_\mu, \phi)$ 的部分, $\chi'^a\gamma_{ab}\chi^b(a, b=1, 2, 3)$ 是 (39) 中的相互作用拉氏量,其中 $\boldsymbol{\chi}$ 和 $\boldsymbol{\chi}'$ 必须收缩成封闭的回路. (40)也可以写成:

$$S=T\exp i\int d^4x\mathscr{L}_{pI}\exp i\int d^4x\chi'^a\gamma_{ab}\chi^b. \tag{41}$$

现在研究一下,当 $\boldsymbol{\chi}$ 和 $\boldsymbol{\chi}'$ 收缩成封闭回路时,上式右边最后一个因子的贡献. 为此我们计算

$$W=\langle 0|T\exp i\int d^4x\chi'^a\gamma_{ab}\chi^b|0\rangle. \tag{42}$$

$|0\rangle$是把 γ 看成是外场时 $\boldsymbol{\chi}$ 和 $\boldsymbol{\chi}'$ 的真空态.

令同位旋空间×四维空间-时间中的矩阵元为:

$$
\left.\begin{array}{l}
\langle x, a|G^{-1}|y,b\rangle = \delta_{ab}\delta^4(x-y) \\
\cdot\begin{pmatrix} -\left(\Box + \dfrac{M^2}{\xi} - i\varepsilon\right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\Box + \dfrac{M^2}{\xi} - i\varepsilon\right) & 0 \\ 0 & 0 & -(\Box - i\varepsilon) \end{pmatrix} \\
\langle x, a|\Gamma|y, b\rangle = \delta^4(x-y)\gamma_{ab}.
\end{array}\right\} \tag{43}
$$

把 γ 视为外场时，$\boldsymbol{\chi}$ 和 $\boldsymbol{\chi}'$ 的两点 Green 函数满足方程

$$(G^{-1}+\Gamma)\langle 0|T\chi\tilde{\chi}'S'|0\rangle = i1, \tag{44}$$

其中，～表示转置，

$$S' = T\exp i\int d^4x\chi'^a\gamma_{ab}\chi^b. \tag{45}$$

令

$$i\mathscr{D} = \langle 0|T\chi\tilde{\chi}'S'|0\rangle/W, \tag{46}$$

则(44)可以写成

$$(G^{-1}+\Gamma)\mathscr{D} = 1. \tag{47}$$

此式有形式解

$$\mathscr{D} = G(1+\Gamma G)^{-1}. \tag{48}$$

我们令外场有小变化，它导致 W 也有小变化，

$$
\begin{aligned}
\delta W &= \langle 0|Ti\int d^4x\chi'^a\delta\gamma_{ab}\chi^b S'|0\rangle \\
&= \mathrm{Tr}\, i\delta\Gamma\langle 0|T\chi\tilde{\chi}'S'|0\rangle \\
&= -\mathrm{Tr}\,\delta\Gamma\mathscr{D}W,
\end{aligned} \tag{49}
$$

或写成：

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta W}{W} &= -\mathrm{Tr}\,\delta\Gamma\mathscr{D} \\
&= -\mathrm{Tr}\,\delta\Gamma G(1+\Gamma G)^{-1} \\
&= -\mathrm{Tr}\,\delta(1+\Gamma G)(1+\Gamma G)^{-1} \\
&= \delta\log\,[\det(1+\Gamma G)]^{-1}.
\end{aligned} \tag{50}
$$

于是

$$W = e^{-\mathrm{Tr}\log(1+\Gamma G)}. \tag{51}$$

所以在计算物理态之间的 S 矩阵元时，可以取

$$S = T\exp i\left[\int d^4x\mathscr{L}_{pl} + i\,\mathrm{Tr}\log\,(1+\Gamma G)\right]. \tag{52}$$

(40)和(52)中的 S 矩阵在物理态空间中不是么正的，因为它们包含了 $\boldsymbol{\chi}$ 和 $\boldsymbol{\chi}'$ 的相互作用的贡献。(52)告诉我们，为了得到一个么正的 S 矩阵，只需要把作用量 $A=\int d^4x\mathscr{L}$ 用有效作用量 $A_{\mathrm{eff}} = A - i\,\mathrm{Tr}\,\log(1+\Gamma G)$ 代替。代替以后，物理态之间的 S 矩阵可以写成

$$S = T\exp i\int d^4x\mathscr{L}_{pl}. \tag{53}$$

在这个 S 矩阵中，不包含物理粒子和非物理粒子的耦合，因此在物理态空间是么正的。和 (53) 完全等价的另一形式为：

$$S = T\exp i\left[\int d^4x \mathscr{L}_I - i\,\mathrm{Tr}\log(1+\Gamma G)\right]. \tag{54}$$

其中 $\mathscr{L}_I$ 是(1)中 $\mathscr{L}$ 的相互作用部分。

也可以用 $\mathscr{L}_{\text{eff}}$ 代替 $\mathscr{L}$，

$$\mathscr{L}_{\text{eff}} = \mathscr{L} + \bar{C}(G^{-1}+\gamma)C. \tag{55}$$

C 是 Faddeev-Popov 鬼粒子场。根据 [1] 的讨论，我们知道，$\mathscr{L}_{\text{eff}}$ 给出的物理态之间的 S 矩阵和(53)或(54)相同。

如果令

$$\left.\begin{aligned} &W_\mu^{\pm} = (W_\mu^1 \mp iW_\mu^2)/\sqrt{2}, \quad s^{\pm} = (s^1 \mp is^2)/\sqrt{2}, \\ &C^{\pm} = (C^1 \mp iC^2)/\sqrt{2}, \quad C^0 = C^3, \\ &C = \begin{pmatrix} C^+ \\ C^0 \\ C^- \end{pmatrix}, \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

则

$$\gamma = \begin{pmatrix} ig\partial^\mu \mathscr{A}_\mu - \frac{M}{g\xi}\phi & -ig\partial^\mu W_\mu^+ + \frac{M}{g\xi}s^+ & 0 \\ -ig\partial^\mu W_\mu^- & 0 & ig\partial^\mu W_\mu^+ \\ 0 & ig\partial^\mu W_\mu^- + \frac{W}{g\xi}s^- & -ig\partial^\mu \mathscr{A}_\mu - \frac{M}{g\xi}\phi \end{pmatrix} \tag{57}$$

其中 $\partial^\mu \mathscr{A}_\mu \equiv (\partial^\mu \mathscr{A}_\mu) + \mathscr{L}_\mu \partial^\mu$，$\partial^\mu W_\mu$ 有类似意义。我们得到的 Faddeev-Popov 鬼粒子的拉氏量和用轨道积分方法求出的相同[2]。

参　考　文　献

[1] 赵保恒，阎沐霖，高能物理与核物理，**2** (1978), 501.
[2] K. Fujikawa, B. W. Lee and A. I. Sanda, *Phys. Rev.*, **D6** (1972), 2923.

CANONICAL QUANTIZATION OF GAUGE FIELDS (II) ——SPONTANEOUSLY BROKEN GAUGE FIELDS

ZHAO BAO-HENG　　YAN MU-LIN
(*University of Science and Technology of China*)

ABSTRACT

In R_ξ gauges a $SU(2)$ spontaneonly broken gauge theory is qnantized within the canonical formalism, and the gauge compensating term is derived.