第3卷 第2期 高能物理与核物理 Vol. 3, No. 2
1979年3月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS March, 1979

华德等式和贝特-沙尔披特方程、介子和重子的电磁跃迁矩阵元

李 炳 安

（中国科学院高能物理研究所）

摘 要

在这篇文章中，用华德等式给出了介子、重子的贝特-沙尔披特方程的积分核与其电流跃迁矩阵元的积分核的关系，用这些关系作为讨论方程和跃迁矩阵元时做的假定的限制，从而使电流守恒得到保证. 文中在不考虑封闭的层子线圈图的贡献时，用华德等式给出的关系可从贝特-沙尔披特方程的积分核将电流跃迁矩阵元的积分核算出来. 文中在对方程的积分核作位势假定以后，得到了跃迁矩阵元的表达式. 用方程的核和解出的波函数可将电流跃迁矩阵元算出，而且保证电流守恒.

层子模型[1]对于基态强子许多跃迁过程和电磁、弱作用的弹性、准弹性过程都给出了与实验相符合的结果. 在这个基础上，有许多工作从 B-S 方程出发对介子波函数进行了研究. 在解方程和用方程解出的波函数去计算电流矩阵元时，都要做一些假定. 这里就需要研究，这些分别做的假定是否一致，是否保证电流守恒？ 这是一些强子结构模型所面临的问题. 在文献 [2] 中，用华德等式讨论了标量粒子 B-S 方程中的传播函数与积分核之间的关系. 本文将这一结果推广到自旋 1/2 粒子的情况，并进一步用华德等式讨论了 B-S 方程的积分核与相应束缚态的电流跃迁矩阵元的积分核之间的关系. 将这些关系作为讨论问题做假定取近似时的限制，从而使电流守恒不被破坏. 文中指出，在忽略积分核中封闭的层子线圈图的贡献以后，可以用华德等式从 B-S 方程的核得到相应束缚态电流跃迁矩阵元的核. 一般在解 B-S 方程时，对积分核做位势假定，文中在不考虑封闭的层子线圈图的贡献并对 B-S 方程的核作位势假定下，给出了介子与重子电流跃迁矩阵元的表达式.

为了讨论问题的方便，下面给出介子波函数所满足的方程. 介子波函数定义为:

$$\begin{aligned}\chi_{\alpha\beta}(x_1, x_2)_i^j &= \langle 0 | T\{\psi_{\alpha i}(x_1)\bar{\psi}_{\beta j}(x_2)\} | a\rangle, \\ \bar{\chi}_{\alpha\beta}(x_1, x_2)_i^j &= \langle a | T\{\psi_{\alpha i}(x_1)\bar{\psi}_{\beta j}(x_2)\} | 0\rangle,\end{aligned} \tag{1}$$

$\psi(x)$、$\bar{\psi}(x)$ 是层子场量，在动量表象中写为

$$\chi(p_1, p_2) = \int e^{-ip_1x_1+ip_2x_2}\chi(x_1, x_2)d^4x_1d^4x_2$$

本文 1977 年 9 月 14 日收到.

$$= (2\pi)^4\delta^4(p_1 - p_2 - P)\chi(k),$$

$$p_1 = \frac{P}{2} + k, \quad p_2 = -\frac{P}{2} + k, \tag{2}$$

它满足下面方程

$$\left\{S_F'^{-1}\left(\frac{P}{2} + k\right)\chi(k)_i^j S_F'^{-1}\left(-\frac{P}{2} + k\right)\right\}_{\alpha\beta}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4}\int G'_{\alpha\beta,\alpha'\beta'}\left(\frac{P}{2} + k, -\frac{P}{2} + k, -\frac{P}{2} + k', \frac{P}{2} + k'\right)\chi_{\beta'\alpha'}(k')_i^j d^4k' \tag{3}$$

(3)式中 $S_F'^{-1}(p)$ 是海森堡表象中层子传播子 $S_F'(p)$ 的逆，它包含各级自能图的贡献．零级项取为

$$S_F(p) = i\,\frac{i\hat{p} - m}{p^2 + m^2}, \qquad S_F^{-1}(p) = i(i\hat{p} + m). \tag{4}$$

(3)式中的积分核定义为:

$$G_1(p_1, p_2, p_2', p_1') = \int e^{-ip_1x_1 + ip_2x_2 - ip_2'x_2' + ip_1'x_1'} G_1(x_1, x_2, x_2', x_1')d^4x_1d^4x_2d^4x_1'd^4x_2'$$

$$= (2\pi)^4\delta^4(p_1 - p_2 - p_1' + p_2')G'\left(\frac{P}{2} + k,\right.$$

$$\left. -\frac{P}{2} + k, -\frac{P}{2} + k', \frac{P}{2} + k\right), \tag{5}$$

$$p_1' = \frac{P}{2} + k', \qquad p_2' = -\frac{P}{2} + k', \tag{6}$$

由于平移不变性，$G'(x_1, x_2, x_2', x_1')$ 仅仅是时空点差的函数，因而有(5)式中的 δ 函数出现．

在动量表象中，共轭波函数为:

$$\bar{\chi}(p_1, p_2) = \int e^{-ip_1x_1 + ip_2x_2}\bar{\chi}(x_1, x_2)d^4x_1d^4x_2$$

$$= (2\pi)^4\delta^4(p_2 - p_1 - P)\bar{\chi}(k),$$

$$p_1 = -\frac{P}{2} + k, \qquad p_2 = \frac{P}{2} + k, \tag{7}$$

它满足方程

$$\left[S_F'^{-1}\left(-\frac{P}{2} + k\right)\bar{\chi}(k)_j^i S_F'^{-1}\left(\frac{P}{2} + k\right)\right]_{\alpha\beta}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4}\int \bar{\chi}_{\alpha'\beta'}(k')_j^i G'_{\beta'\alpha',\alpha\beta}\left(\frac{P}{2} + k', -\frac{P}{2} + k', -\frac{P}{2} + k, \frac{P}{2} + k\right)d^4k'. \tag{8}$$

(3)、(8)式中 i、j 是么旋指标(包括 SU_3' 与 SU_3'') 假定积分核是 $SU'(3)\otimes SU''(3)$ 不变的．

在层子模型中，认为重子是由三个层子构成的．重子波函数中包括 $SU_3'\otimes SU_3''$、自旋和时空部份． 取相互作用具有 $SU_3'\otimes SU_3''$ 的不变性，要求重子波函数具有全反对称性，目前已发现的重子处于 SU_3'' 的单态．重子波函数定义为:

$$B_{\alpha\beta\gamma}^{ijk}(x_1, x_2, x_3) = \langle 0|T\{\psi_{\alpha i}(x_1)\psi_{\beta j}(x_2)\psi_{\gamma k}(x_3)\}|B\rangle$$

$$\bar{B}^{ijk}_{\alpha\beta\gamma}(x_1, x_2, x_3) = \langle B | T\{\bar{\Phi}_{\alpha i}(x_1)\bar{\Phi}_{\beta j}(x_2)\bar{\Phi}_{\gamma k}(x_3)\} | 0 \rangle. \tag{9}$$

在动量表象中定义为 (i, j, k是么旋指标，包括 SU'_3 与 SU''_3，下同)：

$$B(p_1, p_2, p_3) = \int e^{-ip_1x_1 - ip_2x_2 - ip_3x_3} B(x_1, x_2, x_3) d^4x_1 d^4x_2, d^4x_3$$

$$d\bar{B}(p_1, p_2, p_3) = \int e^{ip_1x_1 + ip_2x_2 + ip_3x_3} \bar{B}(x_1, x_2, x_3) d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3. \tag{10}$$

动量表象中，重子波函数所满足的方程为：

$$\begin{aligned}
& S'^{-1}_F(p_1)_{\alpha\alpha'} S'^{-1}_F(p_{2,\beta\beta'} S'^{-1}_F(p_3)_{\gamma\gamma'} B^{ijk}_{\alpha'\beta'\gamma'}(p_1, p_2, p_3) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^8} \int \{(2\pi)^4 S'^{-1}_F(p_1)_{\alpha\alpha'} \delta^4(p_1 - p'_1)[G_{\beta\gamma,\gamma'\beta'}(p_2, p_3, p'_3, p'_2) \\
&\quad - G_{\gamma\beta,\gamma'\beta'}(p_3, p_2, p'_3, p'_2)] + (2\pi)^4 S'^{-1}_F(p_2)_{\beta\beta'} \delta^4(p_2 \\
&\quad - p'_2)[G_{\gamma\alpha,\alpha'\gamma'}(p_3, p_1, p'_1, p'_3) - G_{\alpha\gamma,\alpha'\gamma'}(p_1, p_3, p'_1, p'_3)] \\
&\quad + (2\pi)^4 S'^{-1}_F(p_3)_{\gamma\gamma'} \delta^4(p_3 - p'_3)[G_{\alpha\beta,\beta'\alpha'}(p_1, p_2, p'_2, p'_1) \\
&\quad - G_{\beta\alpha,\beta'\alpha'}(p_2, p_1, p'_2, p'_1)] + G_{\alpha\beta\gamma,\gamma'\beta'\alpha'}(p_1, p_2, p_3, p'_3, p'_2, p'_1) \\
&\quad + G_{\gamma\alpha\beta,\gamma'\beta'\alpha'}(p_3, p_1, p_2, p'_3, p'_2, p'_1) + G_{\beta\gamma\alpha,\gamma'\beta'\alpha'}(p_2, p_3, p_1, p'_3, p'_2, p'_1) \\
&\quad - G_{\alpha\gamma\beta,\gamma'\beta'\alpha'}(p_1, p_3, p_2, p'_3, p'_2, p'_1) - G_{\gamma\beta\alpha,\gamma'\beta'\alpha'}(p_3, p_2, p_1, p'_3, p'_2, p'_1) \\
&\quad - G_{\beta\alpha\gamma,\gamma'\beta'\alpha'}(p_2, p_1, p_3, p'_3, p'_2, p'_1)\} \delta^4(p_1 + p_2 + p_3 - p'_1 - p'_2 \\
&\quad - p'_3) B^{ijk}_{\alpha'\beta'\gamma'}(p'_1, p'_2, p'_3) d^4p'_1 d^4p'_2 d^4p'_3,
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
& \bar{B}^{ijk}_{\alpha'\beta'\gamma'}(p_1, p_2, p_3) S'^{-1}_F(p_1)_{\alpha'\alpha} S'^{-1}_F(p_2)_{\beta'\beta} S'^{-1}_F(p_3)_{\gamma'\gamma} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^8} \int \bar{B}^{ijk}_{\alpha'\beta'\gamma'}(p'_1, p'_2, p'_3) \{(2\pi)^4 S'^{-1}_F(p_1)_{\alpha'\alpha} \delta^4(p_1 \\
&\quad - p'_1)[G_{\gamma'\beta',\beta\gamma}(p'_3, p'_2, p_2, p_3) - G_{\gamma'\beta',\gamma\beta}(p'_3, p'_2, p_3, p_2)] \\
&\quad + (2\pi)^4 S'^{-1}_F(p_2)_{\beta'\beta} \delta^4(p_2 - p'_2)[G_{\alpha'\gamma',\gamma\alpha}(p'_1, p'_3, p_3, p_1) \\
&\quad - G_{\alpha'\gamma',\alpha\gamma}(p'_1, p'_3, p_1, p_3)] + (2\pi)^4 S'^{-1}_F(p_3)_{\gamma'\gamma} \delta^4(p_3 \\
&\quad - p'_3)[G_{\beta'\alpha',\alpha\beta}(p'_2, p'_1, p_1, p_2) - G_{\beta'\alpha',\beta\alpha}(p'_2, p'_1, p_2, p_1)] \\
&\quad + G_{\gamma'\beta'\alpha',\alpha\beta\gamma}(p'_3, p'_2, p'_1, p_1, p_2, p_3) + G_{\gamma'\beta'\alpha',\beta\gamma\alpha}(p'_3, p'_2, p'_1, p_2, p_3, p_1) \\
&\quad + G_{\gamma'\beta'\alpha',\gamma\beta\alpha}(p'_3, p'_2, p'_1, p_3, p_2, p_1) - G_{\gamma'\beta'\alpha',\alpha\gamma\beta}(p'_3, p'_2, p'_1, p_1, p_3, p_2) \\
&\quad - G_{\gamma'\beta'\alpha',\beta\alpha\gamma}(p'_3, p'_2, p'_1, p_2, p_1, p_3) - G_{\gamma'\beta'\alpha',\gamma\alpha\beta}(p'_3, p'_2, p'_1, p_3, p_1, p_2)\} \\
&\qquad \delta^4(p_1 + p_2 + p_3 - p'_1 - p'_2 - p'_3) d^4p'_1 d^4p'_2 d^4p'_3.
\end{aligned} \tag{12}$$

在(11)、(12)式中动量指标交换时同时意味着相应的么旋，旋量指标的交换．目前所发现的重子是方程 (11)、(12) 的全反对称的解，且是 SU''_3 的单态．

在介子、重子的方程(3)、(8)、(11)、(12)中的 $S'^{-1}_F(p)$ 包括全部自能图，在方程的积分核中不再包括自能图．用[2]的方法，可以将 $S'^{-1}_F(p)$ 与介子方程中的积分核联系起来．引入函数

$$\Gamma_\mu(x, y)^{ij}_{\alpha\beta} = \langle 0 | T\{\psi_{\alpha i}(x)\bar{\psi}(0) Q \gamma_\mu \psi(0) \bar{\psi}_{\beta j}(y)\} | 0 \rangle, \tag{13}$$

Q 是层子的电荷矩阵．在动量表象中它所满足的方程为 ($\bar{\psi}(0) Q \gamma_\mu \psi(0)$ 做正规乘积理解，在相互作用表象以下同)：

$$\Gamma_\mu(p', p)^{ij}_{\alpha\beta} = \{S'_F(p') r_\mu S'_F(p)\}_{\alpha\beta} Q_{ij}$$

$$+\frac{1}{(2\pi)^4}\int\delta^4(p'+p_2-p-p_1)S'_F(p')_{\alpha\alpha'}S'_F(p)_{\beta'\beta}G'_{\alpha'\beta',\beta_1\alpha_1}(p',p,p_2,p_1)$$

$$\Gamma_\mu(p_1,p_2)^{ij}_{\alpha_1\beta_1}d^4p_1d^4p_2. \tag{14}$$

(14)式中的积分核是介子方程中出现的积分核. 这里假定相互作用具有 $SU'_3\otimes SU''_3$ 的不变性,因而对所有层子的传播函数 $S'_F(p)$ 是相同的. 由于 ϕ、$\bar{\Phi}$ 分别是单列、单行的矩阵,因而(14)式中出现层子的电荷矩阵. $\Gamma_\mu(p',p)$ 满足下面的华德等式

$$(p'-p)_\mu\Gamma_\mu(p',p)=\{S'_F(p')-S'_F(p)\}Q. \tag{15}$$

这里要指出的是: $\Gamma_\mu(p',p)$ 中的层子线有两类,一类是一条层子线链, 另一类是封闭的层子线圈图. 取传递相互作用的胶子为中性粒子. 在所用的场论中,最高出现对数性发散,当光子线挂在封闭的层子线圈图上时,在光子的四动量作用下,它是等于零的. 因而在光子四动量的作用下,只有光子线挂在层子线链上的那些费曼图有贡献. 考虑到这些,将(14)式代入(15)式中,将所得方程两边相同的电荷矩阵消去得:

$$S'^{-1}_F(p)_{\alpha\beta}-S'^{-1}_F(p')_{\alpha\beta}=S^{-1}_F(p)_{\alpha\beta}-S^{-1}_F(p')_{\alpha\beta}$$

$$+\frac{1}{(2\pi)^4}\int\delta^4(p'+p_2-p-p_1)G'_{\alpha\beta,\beta'\alpha'}(p',p,p_2,p_1)\{S'_F(p_1)$$

$$-S'_F(p_2)\}_{\alpha'\beta'}d^4p_1d^4p_2 \tag{16}$$

在(16)式中令

$$p\to p',$$

得
$$\frac{\partial S'^{-1}_F(p)_{\alpha\beta}}{\partial p_\mu}=-\gamma_{\mu,\alpha\beta}-\frac{1}{(2\pi)^4}\int G'_{\alpha\beta,\beta'\alpha'}(p,p,p_1,p_1)\frac{\partial S'_F(p_1)_{\alpha'\beta'}}{\partial p_{1\mu}}d^4p_1 \tag{17}$$

这个方程说明 $S'^{-1}_F(p)$ 是由介子方程的积分核决定的, 在层子模型中, $G'(p,p,p_1,p_1)$是超强作用,因而在解方程时,不能将 $S'^{-1}_F(p)$ 取为裸的 $S^{-1}_F(p)$, 必须考虑自能图的贡献. 由(16)、(17)式得到下面的恒等式:

$$\int\Big\{\frac{\partial}{\partial k_\mu}G'_{\alpha\beta,\beta'\alpha'}\Big(-\frac{P}{2}+k,\frac{P}{2}+k,\frac{P}{2}+k',-\frac{P}{2}+k'\Big)$$

$$+\frac{\partial}{\partial k'_\mu}G'_{\alpha\beta,\beta'\alpha'}\Big(-\frac{P}{2}+k,-\frac{P}{2}+k,-\frac{P}{2}+k',-\frac{P}{2}+k'\Big)\Big\}S'_F\Big(-\frac{P}{2}$$

$$+k'\Big)_{\alpha'\beta'}d^4k'-\int\Big\{\frac{\partial}{\partial k_\mu}G'_{\alpha\beta,\beta'\alpha'}\Big(-\frac{P}{2}+k,\frac{P}{2}+k,\frac{P}{2}+k',-\frac{P}{2}+k'\Big)$$

$$+\frac{\partial}{\partial k'_\mu}G'_{\alpha\beta,\beta'\alpha'}\Big(\frac{P}{2}+k,\frac{P}{2}+k,\frac{P}{2}+k',\frac{P}{2}+k'\Big)\Big\}S'_F\Big(\frac{P}{2}+k'\Big)_{\alpha'\beta'}d^4k'=0. \tag{18}$$

定义

$$\Lambda_\mu(p',p)=S'^{-1}_F(p')\Gamma_\mu(p',p)S'^{-1}_F(p). \tag{19}$$

将(14)式代入(19)式得

$$\Lambda_\mu(p',p)^{ij}_{\alpha\beta}=\gamma_{\mu,\alpha\beta}Q_{ij}+\frac{1}{(2\pi)^4}\int\delta^4(p'+p_2-p-p_1)G'_{\alpha\beta,\beta'\alpha'}(p',p,p_2,p_1)$$

$$\{S'_F(p_1)\Lambda_\mu(p_1,p_2)^{ij}S'_F(p_2)\}_{\alpha'\beta'}d^4p_1d^4p_2. \tag{20}$$

若积分核 $G'(p', p, p_2, p_1)$ 知道,从方程(17)可以解 $S'_F(p)$, 代入(20)中, 可以解出 $\Lambda_\mu(p', p)$. 将(15)式代入(19)式中得:

$$(p'-p)_\mu \Lambda_\mu(p', p) = \{S_F'^{-1}(p) - S_F'^{-1}(p')\}Q. \tag{21}$$

现在讨论介子的电流矩阵元. 由[3]中的方法得:

$$\langle a|J_\mu(0)|b\rangle = \frac{ie}{(2\pi)^8}\int \bar{\chi}_a(k)^{j}_{i,\alpha\beta} G'_\mu\left(\frac{P_a}{2}+k, -\frac{P_a}{2}+k, -\frac{P_b}{2}+k', \frac{P_b}{2}+k'\right)^{ji,i'j'}_{\beta\alpha,\alpha'\beta'}$$
$$\chi_b(k')^{i'}_{j',\beta'\alpha'} d^4k d^4k', \tag{22}$$

P_a, P_b 分别是介子 a、b 的四动量,可以将 $G'_\mu(p_1, p'_1, p_2, p'_2)$ 分解,如图 1 所示.

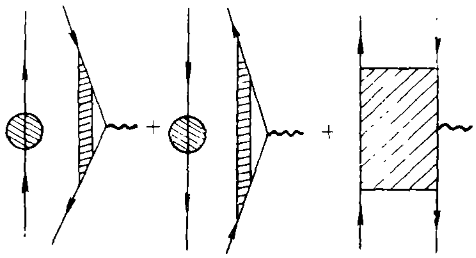

图　1

用公式表达为:

$$G'_\mu(p_1, p'_1, p_2, p'_2)^{ij,j'i'}_{\alpha\beta,\beta'\alpha'} = (2\pi)^4\delta^4(p'_1-p_2)S_F'^{-1}(p'_1)_{\beta'\beta}\Lambda_\mu(p_1, p'_2)^{ii'}_{\alpha\alpha'}\delta_{jj'}$$
$$+ (2\pi)^4\delta^4(p_1-p'_2)S_F'^{-1}(p_1)_{\alpha\alpha'}\Lambda_\mu(p_2, p'_1)^{j'j}_{\beta'\beta}\delta_{ii'}$$
$$+ G^\kappa_\mu(p_1, p'_1, p_2, p'_2)^{ij,j'i'}_{\alpha\beta,\beta'\alpha'}. \tag{23}$$

$G^\kappa_\mu(p_1, p'_1, p_2, p'_2)$ 和 $G_\mu(p_1, p'_1, p_2, p'_2)$ 是交缠在一起的不可约费曼图的集合(去掉外线). 这些图包含一条层子线链,一条反层子线链和一些封闭的层子线圈. 当光子的四动量

$$q_\mu = (P_b - P_a)_\mu = (p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2)_\mu \tag{24}$$

作用到 G^κ_μ 中的封闭的层子线圈上(光子线挂在它上面时)时等于零, 得到 G^κ_μ 所满足的华德等式为:

$$q_\mu G^\kappa_\mu(p_1, p'_1, p_2, p'_2)^{ij,j'i'}_{\alpha\beta,\beta'\alpha'} = Q_{ii'}\delta_{jj'}\{G'_{\alpha\beta,\beta'\alpha'}(p_1+q, p'_1, p_2, p'_2)$$
$$- G'_{\alpha\beta,\beta'\alpha'}(p_1, p'_1, p_2, p'_2-q)\} + \delta_{ii'}Q_{j'j}\{G'_{\alpha\beta,\beta'\alpha'}(p_1, p'_1, p_2+q, p'_2)$$
$$- G'_{\alpha\beta,\beta'\alpha'}(p_1, p'_1-q, p_2, p'_2)\}. \tag{25}$$

华德等式(25)将 G^κ_μ 与介子方程中的积分核联系起来.

用(21)、(25)式和方程(3)、(8)可以证明介子电流矩阵元(22)满足电流守恒的要求:

$$q_\mu\langle a|J_\mu|b\rangle = 0. \tag{26}$$

也就是说,在用方程(3)、(8)得到的介子波函数去计算 $\langle a|J_\mu|b\rangle$ 时, 电流矩阵元中的 Λ_μ, G^κ_μ 必须满足华德等式(21)、(25),才能保证电流守恒. 也就是说做假定取近似时,华德等式(21)、(25)必须得到保证。

若介子方程中的积分核知道了,利用方程(17)、(20)可以得到 $S_F'^{-1}(p)$、$\Lambda_\mu(p, p')$. 华德等式(25)是一个方程,若 G' 给定了,可以从(25)式得到 G^κ_μ 的一部分. 从(25)式可以看到,在右边取 $q_\mu = 0$, 右边即等于零,因而总可以写

$$q_\mu G_\mu^\kappa = q_\mu f_\mu, \tag{27}$$

有

$$G_\mu^\kappa = f_\mu + f_\mu^0, \tag{28}$$

其中 f_μ^0 满足

$$q_\mu f_\mu^0 = 0. \tag{29}$$

按照前边的讨论 f_μ^0 是光子线挂在封闭的层子线圈上的那些不可约的费曼图. 从(25)式右边得到的 f_μ 是光子线挂在层子线链上的那些费曼图. 当然,假定核 G' 知道，如何具体求解方程(25)需要进一步研究. 这里所说的是,从方程(25)中解出的是 G_μ^κ 中光子线挂在层子链上那一部份,相差光子线挂在封闭的层子线圈上的那一部份.

对于重子由[3]可以得到重子的电流矩阵元为:

$$\langle B'|J_\mu(0)|B\rangle = \frac{ie}{(2\pi)^{24}}\int \bar{B}'(p_1, p_2, p_3)^{ijk}_{\alpha\beta\gamma} G_\mu(p_3, p_2, p_1, p_1', p_2', p_3')^{kji,i'j'k'}_{\gamma\beta\alpha,\alpha'\beta'\gamma'}$$
$$B(p_3', p_2', p_1')^{k'j'i'}_{\gamma'\beta'\alpha'} d^4p_1 d^4p_2 d^4p_3 d^4p_1' d^4p_2' d^4p_3'. \tag{30}$$

在(30)式中,重子波函数中的质心动量没有移出. (30)式中的 G_μ 是由下面的方程定义的

$$\langle 0|T\{\psi(x_1)\psi(x_2)\psi(x_3)\bar{\psi}(0)Q\gamma_\mu\psi(0)\bar{\psi}(x_3')\bar{\psi}(x_2')\bar{\psi}(x_1')\}|0\rangle$$
$$= \int K(x_1, x_2, x_3, y_3, y_2, y_1) G_\mu(y_1, y_2, y_3, 0, y_3', y_2', y_1') K(y_1', y_2', y_3', x_3', x_2', x_1')$$
$$d^4y_1 d^4y_2 d^4y_3 d^4y_1' d^4y_2' d^4y_3'. \tag{31}$$

(31)式中 $K(x_1, x_2, x_3, y_3, y_2, y_1)$、$K(y_1', y_2', y_3', x_3', x_2', x_1')$ 是六点格林函数. G_μ 是方程两边作微扰论展开时，逐级定义的. 它是一些不可约的费曼图的集合. 这些图可以分解成四类,如图(2)所示.

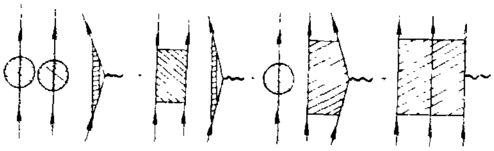

图　2

G_μ 可以表达为:

$$G_\mu(p_3, p_2, p_1, p_1', p_2', p_3')^{kji,i'j'k'}_{\gamma\beta\alpha,\alpha'\beta'\gamma'}$$
$$= \frac{1}{2}(2\pi)^8\delta_{ii'}\delta_{jj'}S_F'^{-1}(p_1)_{\alpha\alpha'}S_F'^{-1}(p_2)_{\beta\beta'}\delta^4(p_1 - p_1')\delta^4(p_2 - p_1')\Lambda_\mu(p_3, p_1')^{kk'}_{\gamma\gamma'}$$
$$- (2\pi)^4\delta^4(p_1 + p_2 - p_1' - p_2')G^{ji,i'j'}_{\beta\alpha,\alpha'\beta'}(p_2, p_1, p_1', p_2')\Lambda_\mu(p_3, p_3')^{kk'}_{\gamma\gamma'}$$
$$+ (2\pi)^4\delta^4(p_1 - p_1')S_F'^{-1}(p_1)_{\alpha\alpha'}G_\mu(p_3, p_2, p_2', p_3')^{kj,j'k}_{\gamma\beta,\beta'\gamma'}\delta_{ii'}$$
$$+ G_\mu^\kappa(p_3, p_2, p_1, p_1', p_2', p_3')^{kji,i'j'k'}_{\gamma\beta\alpha,\alpha'\beta'\gamma'}, \tag{32}$$

其中 $G(p_2, p_1, p_1', p_2')$ 是方程(11)、(12)中的核，G_μ 是某层子线上挂有光子线的四点不可约费曼图的集合，G_μ^κ 是某层子线上挂有光子线的六点不可约费曼图的集合. (32)式是在考虑了(31)式中六点格林函数的全反对称性后写出来的.

现在讨论(32)式的第一项为什么有因子 1/2, 第二项为什么是

$$-G(p_2, p_1, p_1', p_2').$$

(为了简单，不将么旋与旋量指标写出)在(31)式左边有下面形式的项

$$K(x_1, x_2, x_2', x_1')\Gamma_\mu(x_3, x_3'), \tag{33}$$

这种项应由(31)式右边下面形式的项得到的，

$$\int K(x_1, x_2, y_2, y_1)S_F'(x_3 - y_3)\left\{\frac{1}{2}S_F'^{-1}(y_1 - y_1')S_F'^{-1}(y_2 - y_2') - G(y_1, y_2, y_2', y_1')\right\}\Lambda_\mu(y_3, y_3')S_F'(y_3' - x_3')K(y_1', y_2', x_2', x_1') d^4y_1d^4y_2d^4y_3d^4y_1'd^4y_2'd^4y_3'. \tag{34}$$

由于

$$\int S_F'(x_3 - y_3)\Lambda_\mu(y_3, y_3')S_F'(y_3' - x_3')d^4y_3d^4y_3' = \Gamma_\mu(x_3, y_3'), \tag{35}$$

因而只要证明下面等式成立即可

$$K(x_1,x_2,x_2',x_1') = \int K(x_1,x_2,y_2,y_1)\left\{\frac{1}{2}S_F'^{-1}(y_1 - y_1')S_F'^{-1}(y_2 - y_2') - G(y_1, y_2, y_2', y_1')\right\}K(y_1', y_2', x_2', x_1')d^4y_1d^4y_2d^4y_1'd^4y_2', \tag{36}$$

其中

$$K(x_1, x_2, x_2', x_1') = \langle 0|T\{\psi(x_1)\psi(x_2)\bar\psi(x_2')\bar\psi(x_1')\}|0\rangle \tag{37}$$

是四点格林函数，它满足下面的方程：

$$\begin{aligned} K(x_1, x_2, x_2', x_1') = {} & S_F'(x_1 - x_1')S_F'(x_2 - x_2') - S_F'(x_1 - x_2')S_F'(x_2 - x_1') \\ & + \int S_F'(x_1 - y_1)S_F'(x_2 - y_2)\{G(y_1, y_2, y_2', y_1') - G(y_2, y_1, y_2', y_1')\} \\ & K(y_1', y_2', x_2', x_1')d^4y_1d^4y_2d^4y_1'd^4y_2', \end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned} K(x_1, x_2, x_2', x_1') = {} & S_F'(x_1 - x_1')S_F'(x_2 - x_2') - S_F'(x_1 - x_2')S_F'(x_2 - x_1') \\ & + \int K(x_1, x_2, y_2', y_1')\{G(y_1', y_2', y_2, y_1) - G(y_1', y_2', y_1, y_2)\} \\ & S_F'(y_1 - x_1')S_F'(y_2 - x_2')d^4y_1d^4y_2d^4y_1'd^4y_2'. \end{aligned} \tag{39}$$

将方程(38)或(39)代入(36)式右边，即可证明它的成立. (32)式中 $G_\mu(p_3, p_2, p_2', p_3')$ 是有两条层子线链并包含封闭的层子线圈图，且某层子线挂有一条光子线的不可约费曼图的集合；(32)式中的 $G_\mu^\kappa(p_3, p_2, p_1, p_1', p_2', p_3')$ 是有三条层子线链并包含封闭层子线圈图，且某层子线挂有一条光子线的不可约费曼图的集合.

用通常所用的方法可以得到下面的两个华德等式

$$\begin{aligned} q_\mu G_\mu(p_3, p_2, p_2', p_3')^{kj,j'k'}_{\gamma\beta,\beta'\gamma'} = {} & Q_{kk'}\delta_{jj'}\{G_{\gamma\beta,\beta'\gamma'}(p_3 + q, p_2, p_2', p_3') \\ & - G_{\gamma\beta,\beta'\gamma'}(p_3, p_2, p_2', p_3' - q)\} + \delta_{kk'}Q_{jj'}\{G_{\gamma\beta,\beta'\gamma'}(p_3, p_2 + q, p_2', p_3') \\ & - G_{\gamma\beta,\beta'\gamma'}(p_3, p_2, p_2' - q, p_3')\}, \end{aligned} \tag{40}$$

$$q_\mu = (p_2' + p_3' - p_2 - p_3)_\mu,$$

$$\begin{aligned} & q_\mu G_\mu^\kappa(p_3, p_2, p_1, p_1', p_2', p_3')^{kji,i'j'k'}_{\gamma\beta\alpha,\alpha'\beta'\gamma'} \\ & = Q_{kk'}\delta_{jj'}\delta_{ii'}\{G_{\gamma\beta\alpha,\alpha'\beta'\gamma'}(p_3 + q, p_2, p_1, p_1', p_2', p_3') \\ & \quad - G_{\gamma\beta\alpha,\alpha'\beta'\gamma'}(p_3, p_2, p_1, p_1', p_2', p_3')\} + Q_{jj'}\delta_{ii'}\delta_{kk'}\{G_{\gamma\beta\alpha,\alpha'\beta'\gamma'}(p_3, p_2 \\ & \quad + q, p_1, p_1', p_2', p_3') - G_{\gamma\beta\alpha,\alpha'\beta'\gamma'}(p_3, p_2, p_1, p_1', p_2' - q, p_3')\} \\ & \quad + Q_{ii'}\delta_{jj'}\delta_{kk'}\{G_{\gamma\beta\alpha,\alpha'\beta'\gamma'}(p_3, p_2, p_1 + q, p_1', p_2', p_3') \end{aligned}$$

$$-G_{\gamma\beta\alpha,\alpha'\beta'\gamma'}(p_3, p_2, p_1, p_1'-q, p_2', p_3')\},$$

$$q_\mu=(p_1'+p_2'+p_3'-p_1-p_2-p_3)_\mu \tag{41}$$

从(40)、(41)式可以看到,华德等式将重子方程中的积分核与重子电流跃迁矩阵元中的积分核联系起来. 与介子情形相同的讨论,若重子方程中的积分核知道,那么用(40)、(41)式可将 $G_\mu(p_3, p_2, p_2', p_3')$、$G_\mu^\kappa(p_3, p_2, p_1, p_1', p_2', p_3')$ 中光子线挂在层子线链上那一部份解出来.

用(21)、(40)、(41)和方程(11)、(12)可以证明

$$q_\mu\langle B'|J_\mu(0)|B\rangle=0,$$

$$q_\mu=(P_B-P_{B'})_\mu. \tag{42}$$

在证明(42)式时,注意动量指标交换时同时伴随么旋和旋量指标的交换.

这里要指出的是,介子、重子电流跃迁矩阵元中出现的重整化顶角 $\Lambda_\mu(p, p')$ 是相同的.

在目前情况下,对强作用人们还没有办法从一个基本相互作用出发将方程的积分核算出来,往往对积分核作位势假定,从物理上考虑选择位势的形式. 现在要讨论的问题是,方程的核作了位势假定以后,电流跃迁矩阵元的核取什么形式.

介子方程(3)、(8)的积分核在位势假定下为:

$$G'(p_1, p_2, p_2', p_1')=V'\left\{\frac{1}{4}(p_1+p_2-p_1'-p_2')^2\right\}. \tag{43}$$

用(43)式方程(3)、(8)变为

$$\left\{S_F'^{-1}\left(\frac{P}{2}+k\right)\chi_i^j(k)S_F'^{-1}\left(-\frac{P}{2}+k\right)\right\}_{\alpha\beta}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^4}\int V'\{(k-k')^2\}_{\alpha\beta,\beta'\alpha'}\chi(k')^j_{i,\alpha'\beta'}d^4k', \tag{44}$$

$$\left\{S_F'^{-1}\left(-\frac{P}{2}+k\right)\bar{\chi}(k)_i^jS_F'^{-1}\left(\frac{P}{2}+k\right)\right\}_{\alpha\beta}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\bar{\chi}(k')^j_{i,\alpha'\beta'}V'\{(k-k')^2\}_{\beta'\alpha',\alpha\beta}d^4k' \tag{45}$$

这样 $V'\{(k-k')^2\}$ 与介子的质心四动量无关.

在位势假定(43)下. 方程(17)可以写为

$$S_F'^{-1}(p)_{\alpha\beta}=S_F'^{-1}(p)_{\alpha\beta}-\frac{1}{(2\pi)^4}\int V\{(p-p')^2\}_{\alpha\beta,\beta'\alpha'}S_F'(p')d^4p'. \tag{46}$$

在位势假定(43)下,方程(18)自动满足. 用(43)式,方程(20)变为:

$$\Lambda_\mu(p', p)^{ij}_{\alpha\beta}=\{\gamma_\mu\}_{\alpha\beta}Q_{ij}+\frac{1}{(2\pi)^4}\int\delta^4(p'+p_2-p-p_1)V'\{(p-p_2)^2\}_{\alpha\beta,\beta'\alpha'}$$

$$\{S_F'(p_1)\Lambda_\mu(p_1,p_2)^{ij}S_F'(p_2)\}d^4{}_{\alpha'\beta'}p_1d^4p_2. \tag{47}$$

将(43)式代入(25)式得:

$$q_\mu G_\mu^\kappa(p_1, p_1', p_2, p_2')=0. \tag{48}$$

即在位势假定(43)下,介子电流矩阵元中的积分核 G_μ^κ 只包含封闭的层子线圈上挂着光子

线的图. 在层子模型中认为介子是由一对正反层子构成的，用单粒子跃迁图象计算介子的电流跃迁矩阵元. 目前还不能从理论上估计 G'_μ 中封闭的层子线圈图的贡献，仍用单粒子跃迁图象，不考虑封闭的层子线圈图的贡献. 从另一方面看，G'_μ 中的封闭的层子线圈图贡献介子中的层子海，单粒子跃迁图象是不考虑介子中的层子海的贡献. 用位势假定(43)和不考虑封闭层子线圈图的贡献得：

$$G^\kappa_\mu(p_1, p'_1, p_2, p'_2) = 0. \tag{49}$$

介子的电流跃迁矩阵元可以表达为：

$$\begin{aligned}\langle a|J_\mu(0)|b\rangle = \frac{ie}{(2\pi)^4}S_p\int\{&\bar{\chi}_a(k)S'^{-1}_F(p_1)\chi(k')\Lambda_\mu(p_2,p'_1)\delta^4(p_1-p'_2)\\&+\bar{\chi}_a(k)\Lambda_\mu(p_1,p'_2)\chi(k')S'^{-1}_F(p'_1)\delta^4(p'_1-p_2)\}d^4kd^4k',\\ p_1=\frac{P_a}{2}+k,\ p'_1=-\frac{P_a}{2}&+k,\ p_2=-\frac{P_b}{2}+k',\ p'_2=\frac{P_b}{2}+k',\end{aligned} \tag{50}$$

(50)式中对旋量和幺旋求迹，这样，若位势 $V'\{(k-k')^2\}$ 给定，可从方程(46)解出 $S'^{-1}_F(p)$，从方程(47)解出 $\Lambda_\mu(p',p)$（在不考虑封闭层子线圈图的贡献时，Λ_μ 与电荷矩阵 Q 成正比），从方程(44)、(45)解出波函数 $\chi(k)$、$\bar{\chi}(k)$，代入(50)式中，就可以算出介子的电流跃迁矩阵元.

重子方程中的二体、三体相互作用在位势假定下为：

$$G(p_2, p_1, p'_1, p'_2)_{\beta\alpha,\alpha'\beta'} = V\left\{\frac{1}{4}(p_1-p_2+p'_2-p'_1)^2\right\}_{\beta\alpha,\alpha'\beta'}, \tag{51}$$

$$G(p_3, p_2, p_1, p'_1, p'_2, p'_3)_{\gamma\beta\alpha,\alpha'\beta'\gamma'} = V_3(p_3-p'_3, p_2-p'_2, p_1-p'_1)_{\gamma\beta\alpha,\alpha'\beta'\gamma'}{}^{[4]}. \tag{52}$$

用(51)，(52)式方程(11)，(12)可以写为：

$$\begin{aligned}&S'^{-1}_F(p_1)_{\alpha\alpha'}S'^{-1}_F(p_2)_{\beta\beta'}S'^{-1}_F(p_3)_{\gamma\gamma'}B(p_1, p_2, p_3)^{ijk}_{\alpha'\beta'\gamma'}\\&=\frac{1}{(2\pi)^8}\int\{2(2\pi)^4S'^{-1}_F(p_1)_{\alpha\alpha'}\delta^4(p_1-p'_1)V\{(p_3-p'_3)^2\}_{\beta\gamma,\gamma'\beta'}\\&\quad+2(2\pi)^4S'^{-1}_F(p_2)_{\beta\beta'}\delta^4(p_2-p'_2)V\{(p_1-p'_1)^2\}_{\gamma\alpha,\alpha'\gamma'}\\&\quad+2(2\pi)^4S'^{-1}_F(p_3)_{\gamma\gamma'}\delta^4(p_3-p'_3)V\{(p_2-p'_2)^2\}_{\alpha\beta,\beta'\alpha'}\\&\quad+6V_3(p_1-p'_1,p_2-p'_2,p_3-p'_3)_{\alpha\beta\gamma,\gamma'\beta'\alpha'}\}B(p'_1,p'_2,p'_3)^{ijk}_{\alpha'\beta'\gamma'}\\&\quad\delta^4(p_1+p_2+p_3-p'_1-p'_2-p'_3)d^4p'_1d^4p'_2d^4p'_3,\end{aligned} \tag{53}$$

$$\begin{aligned}&\bar{B}(p_1, p_2, p_3)^{ijk}_{\alpha'\beta'\gamma'}S'^{+}_F(p_1)_{\alpha'\alpha}S'^{+}_F(p_2)_{\beta'\beta}S'^{+}_F(p_3)_{\gamma'\gamma}\\&=\frac{1}{(2\pi)^8}\int\bar{B}(p'_1, p'_2, p'_3)^{ijk}_{\alpha'\beta'\gamma'}\{2(2\pi)^4S'^{-1}_F(p_1)_{\alpha'\alpha}V\{(p'_3-p_3)^2\}_{\gamma'\beta',\beta\gamma}\delta^4(p_1-p'_1)\\&\quad+2(2\pi)^4S'^{-1}_F(p_2)_{\beta'\beta}V\{(p'_1-p_1)\}_{\alpha'\gamma',\gamma\alpha}\delta^4(p_2-p'_2)\\&\quad+2(2\pi)^4S'^{-1}_F(p_3)_{\gamma'\gamma}V\{(p'_2-p_2)\}_{\beta'\alpha',\alpha\beta}\delta^4(p_3-p'_3)\\&\quad+6V_3(p'_3-p_3,p'_2-p_2,p'_1-p_1)_{\gamma'\beta'\alpha',\alpha\beta\gamma}\{\delta^4(p_1+p_2+p_3-p'_1-p'_2-p'_3)\}\\&\quad d^4p'_1d^4p'_2d^4p'_3\end{aligned} \tag{54}$$

用(51)、(52)式得：

$$q_\mu G_\mu(p_3, p_2, p'_2, p'_3) = 0,$$

$$q_\mu G^\kappa_\mu(p_3, p_2, p_1, p'_1, p'_2, p'_3) = 0. \tag{55}$$

与介子的情形相同，在层子模型中认为层子由三个层子构成，在跃迁过程中是单粒子跃迁图象，即不考虑光子线挂在封闭的层子线圈图的贡献，有

$$G_\mu(p_3, p_2, p_2', p_3') = 0,$$
$$G_\mu^\kappa(p_3, p_2, p_1, p_1', p_2', p_3') = 0. \tag{56}$$

封闭的层子线圈图的贡献等价于重子中层子海的效应. 因而，不考虑封闭的层子线圈图的贡献是在跃迁过程中不考虑层子海的贡献. 而层子模型的单粒子跃迁图象得到的结果是与实验符合的. 仍然取单粒子跃迁图象，不考虑封闭的层子线圈图的贡献. 这样，用位势假定. 不考虑封闭的层子线圈图的贡献，用(56)式得到重子的电流矩阵元：

$$\begin{aligned}\langle B'|J_\mu(0)|B\rangle = &\frac{ie}{(2\pi)^{24}}\int \bar{B}(p_1, p_2, p_3)^{ijk}_{\alpha\beta\gamma}\\ &\Big\{\frac{1}{2}(2\pi)^8 S_F'^{-1}(p_1)_{\alpha\alpha'} S_F'^{-1}(p_2)_{\beta\beta'}\Lambda_\mu(p_3, p_3')\delta^4(p_1-p_1')\delta^4(p_2-p_2')\\ &-(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-p_1'-p_2')V\{(p_1-p_1')^2\}_{\beta\alpha,\alpha'\beta'}\Lambda_\mu(p_3,p_3')^{kk'}_{\gamma\gamma'}\Big\}\\ &B(p_3', p_2', p_1')^{k'ji}_{\gamma'\beta'\alpha'}d^4p_1d^4p_2d^4p_3d^4p_1'd^4p_2'd^4p_3'.\end{aligned} \tag{57}$$

这样用介子方程中的位势解出 $S_F'^{-1}(p)$、$\Lambda_\mu(p, p')$，用重子的位势解出重子波函数，就可以算出重子的电流矩阵元. 这里要强调的是，当波函数用 B-S 方程的解，在计算电流矩阵元时必须有(57)式中的第二项，才能保证电流守恒(在所用的假定下)，否则电流守恒将被破坏. 对于弱耦合的情况，自能图的贡献很小，$S_F'^{-1}(p)$ 可以近似取为：

$$S_F'^{-1}(p) \approx i(i\hat{p} + M), \tag{58}$$

M 是组成束缚态粒子的物理质量. 那么与 M 相比 $V\{(p_2 - p_1')^2\}$ 是小的，可以忽略之，将波函数方程回到非相对论的薛定格方程，那么电流矩阵元的计算方法回到非相对论量子力学的情况. 但是对层子构成的强束缚态来说，$S_F'^{-1}(p)$ 中自能图的贡献是重要的，必须考虑，而(57)式中的第二项，由于超强作用很大，也是必须考虑的.

朱洪元先生最早讨论了梯形近似下，用介子的 B-S 方程解出的波函数计算介子的电流矩阵元时，电流守恒是保证的. 文中(36)式的讨论是何祚庥同志首先建议的. 作者对他们表示感谢.

参 考 文 献

[1] 北京基本粒子理论组，1966 年北京物理讨论会论文.
[2] M. Böhm, *Nucl. Phys.*, **B91** (1975), 494.
[3] S. Mandelstam, *Proc. Roy. Soc.*, **233** (1955), 248.
[4] 数学所理论物理室、北京大学理论物理室基本粒子组，原子能，**7—8**(1966)，507.

WARD IDENTITIES AND BETHE-SALPETER EQUATIONS AND THE ELECTROMAGNETIC TRANSITION ELEMENTS OF MESONS AND BARYONS

LI BING-AN

(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

By using Ward Identities, the relations between the kernels of the mesonic and baryonic Bethe-Salpeter equation and their transition matrix elements of the electric current are obtained. These relations are the constraints for the assumptions underlying the discussion of the equations and the transition matrix elements. These constraints guarantee the conservation of the electomagnetic current. When the contribution of the straton loop diagrams is neglected the kernels of the transition matrix elements of the electromagnetic current can be computed, from the kernels of B-S equation by using the retations given by Ward Identities. Under the potential assumption for the kernels of the equation, expressions of the kernels of the transition matrix elements are obtanied. The transition matrix elements of the electomagnetic current can be computed by using the kernels of the equation and the solved wave functions.