第3卷 第2期 高能物理与核物理 Vol. 3, No. 2
1979年3月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS March, 1979

研究简报

原子核的单粒位阱（IV）多体力

吴式枢
（吉林大学物理系）

摘 要

本文证明了，即使核子-核子间相互作用含有多体力，由非厄米单粒位阱

$$u_{\alpha\beta}=M_{\alpha\beta}(\varepsilon_\beta)$$

所确定的断续本征值 ε_γ 依然具有以下性质：

$$G_{\gamma\alpha}(\varepsilon_\gamma)=\infty$$

至少对某一个 α 成立．这说明，ε_γ 一定是 $G_{\gamma\alpha}(\omega)$ 的极点或其支点割线的端点（这里 $G_{\gamma\alpha}(\omega)$ 对数发散），由此必有以下结论：ε_γ 为实数且满足下述关系

$$\varepsilon_\gamma=\pm[E_{n_\gamma}(N\pm1)-E_0(N)]$$

在假定核子间的相互作用是二体力的基础上，文(III)[1] 曾证明了以下结论（简称结论 A）：虽然单粒位阱 $u_{\alpha\beta}=M_{\alpha\beta}(\varepsilon_\beta)$［或 $M_{\alpha\beta}(\varepsilon_\alpha)$，$M_{\alpha\beta}(\omega)$ 为质量算符］是非厄米的，但由它所确定的断续本征值 ε_γ 却一定是实的，而且严格满足以下关系：

$$\varepsilon_\gamma=\pm[E_{n_\gamma}(N\pm1)-E_0(N)], \tag{1}$$

其中 $E_0(N)$ 与 $E_{n_\gamma}(N\pm1)$ 分别表示满壳核（核子数为 N）基态与 $(N\pm1)$ 核的严格能量本征值．

本文的目的在于指出，即使核子间的相互作用除了二体力外还含有多体力，以上结论依然成立．如未加说明，本文所用符号和文(III)相同．

设 $\mathbf{u}$ 为某一选定的单粒位阱，它可以是非厄米的，而且由以下 Schrödinger 方程

$$\mathbf{h}|\gamma\rangle=(\mathbf{t}+\mathbf{u})|\gamma\rangle=\varepsilon_\gamma|\gamma\rangle \tag{2}$$

所确定的本征值 ε_γ 也可以是复数，但是我们将假定它的本征函数 $\{|\gamma\rangle\}$ 构成一完备系．令 $\{\xi_\gamma^+, \bar{\xi}_\gamma^+\}$ 表示双正交系 $\{|\gamma\rangle, |\bar{\gamma}\rangle\}$ 的产生算符．显然，倘若 $\{|\gamma\rangle\}$ 已是正交系，则 $|\bar{\gamma}\rangle=|\gamma\rangle$，$\bar{\xi}_\gamma=\xi_\gamma$．

如果核子间的相互作用除了二体力外还含有 $n=3, 4, \cdots, \Omega$ 体力，则其相互作用势可以写为

$$\mathbf{V}=\sum_{n=2}^{\Omega}\mathbf{V}^{(n)} \tag{3}$$

其中 $\mathbf{V}^{(n)}$ 表示 n 体相互作用势，它的表达式如下：

本文1978年2月18日收到。

$$\mathbf{V}^{(n)}=\left(\frac{1}{n!}\right)^2\sum_{\substack{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\\ \beta_1\beta_2\cdots\beta_n}} v^{(n)}_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n,\beta_1\beta_2\cdots\beta_n}\xi^+_{\alpha_1}\xi^+_{\alpha_2}\cdots\xi^+_{\alpha_n}\bar{\xi}_{\beta_n}\bar{\xi}_{\beta_{n-1}}\cdots\bar{\xi}_{\beta_1}, \tag{4}$$

上式中

$$v^{(n)}_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n,\beta_1\beta_2\cdots\beta_n}=\langle\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n|\mathbf{v}^{(n)}|\sum_P(-1)^P P\beta_1\beta_2\cdots\beta_n\rangle. \tag{5}$$

为反对称化了的 n 体相互作用矩阵元，P 表示熟知的置换算符．现让我们引进 $M_{\alpha\beta}(\omega)$，其定义为

$$M_{\alpha\beta}(\omega)=\langle\Psi_0|\{\bar{\xi}_\alpha,[\mathbf{V},\xi^+_\beta]\}_+|\Psi_0\rangle-m_{\alpha\beta}(\omega), \tag{6}$$

$$m_{\alpha\beta}(\omega)=G(V_\alpha,V_\beta;\omega)-\sum_{\chi\kappa}G(V_\alpha,\chi;\omega)G^{-1}_{\chi,\kappa}(\omega)G(\kappa,V_\beta;\omega), \tag{7}$$

$[x,y]$ 与 $\{x,y\}_+$ 分别表示算符 x 与 y 的交换及反交换关系，$G(A,B;\omega)$ 为格林函数

$$G(A,B;t_1-t_2)=\langle\Psi_0|T\{\mathbf{A}(t_1)\mathbf{B}(t_2)\}|\Psi_0\rangle$$

的傅氏变换，其表达式可以严格写如下形：

$$G(A,B;\omega)=-\sum_n\left\{\frac{\langle\Psi_0|A|\Psi_n(N+1)\rangle\langle\Psi_n(N+1)|B|\Psi_0\rangle}{\omega-\mathscr{E}^+_n+i\hat{\eta}}\right.$$
$$\left.+\frac{\langle\Psi_0|B|\Psi_n(N-1)\rangle\langle\Psi_n(N-1)|A|\Psi_0\rangle}{\omega+\mathscr{E}^-_n-i\hat{\eta}}\right\}_{\hat{\eta}\to0^+}, \tag{8}$$

其中算符 A 与 B 的含义见下表：

	A	B
$G(V_\alpha,V_\beta;\omega)$	$V_\alpha\equiv[\bar{\xi}_\alpha,\mathbf{V}]$	$V_\beta\equiv[\mathbf{V},\xi^+_\beta]$
$G(V_\alpha,\chi;\omega)$	V_α	ξ^+_χ
$G(\kappa,V_\beta;\omega)$	$\bar{\xi}_\kappa$	V_β

由式 (6-8) 我们看到，不论 ε_γ 是实数还是复数也不论 $\mathbf{V}$ 是否含有多体力，以上定义均有意义．因为 $\mathbf{V}=\mathbf{H}-\mathbf{H}_0+\mathbf{U}$，所以

$$\langle\Psi_0|[\bar{\xi}_\alpha,\mathbf{V}]|\Psi_n(N+1)\rangle=(\mathscr{E}^+_n-\varepsilon_\alpha)\langle\Psi_0|\bar{\xi}_\alpha|\Psi_n(N+1)\rangle$$
$$+\Sigma_\gamma u_{\alpha\gamma}\langle\Psi_0|\bar{\xi}_\gamma|\Psi_n(N+1)\rangle, \tag{9-1}$$

$$\langle\Psi_n(N+1)|[\mathbf{V},\xi^+_\beta]|\Psi_0\rangle=(\mathscr{E}^+_n-\varepsilon_\beta)\langle\Psi_n(N+1)|\xi^+_\beta|\Psi_0\rangle$$
$$+\Sigma_\delta u_{\delta\beta}\langle\Psi_n(N+1)|\xi^+_\delta|\Psi_0\rangle, \tag{9-2}$$

以及

$$\langle\Psi_n(N-1)|[\bar{\xi}_\alpha,\mathbf{V}]|\Psi_0\rangle=-(\mathscr{E}^-_n+\varepsilon_\alpha)\langle\Psi_n(N-1)|\bar{\xi}_\alpha|\Psi_0\rangle$$
$$+\Sigma_\gamma u_{\alpha\gamma}\langle\Psi_n(N-1)|\bar{\xi}_\gamma|\Psi_0\rangle, \tag{10-1}$$

$$\langle\Psi_0|[\mathbf{V},\xi^+_\beta]|\Psi_n(N-1)\rangle=-(\mathscr{E}^-_n+\varepsilon_\beta)\langle\Psi_0|\xi^+_\beta|\Psi_n(N-1)\rangle$$
$$+\Sigma_\delta u_{\delta\beta}\langle\Psi_0|\xi^+_\delta|\Psi_n(N-1)\rangle. \tag{10-2}$$

以式 (9) 与 (10) 代入式 (8)，按照和文 (III) 完全相同的推导方法，由式 (7) 可以求得

$$m_{\alpha\beta}(\omega)=\langle\Psi_0|\{\bar{\xi}_\alpha,[\mathbf{V},\xi^+_\beta]\}_+|\Psi_0\rangle+(\varepsilon_\beta-\omega)\delta_{\alpha\beta}-u_{\alpha\beta}-G^{-1}_{\alpha\beta}(\omega), \tag{11}$$

由此，根据式 (6) 有

$$M_{\alpha\beta}(\omega)=(\omega-\varepsilon_\beta)\delta_{\alpha\beta}+u_{\alpha\beta}+G^{-1}_{\alpha\beta}(\omega), \tag{12}$$

文(III)曾指出,应用上式可将 Dyson 方程推广为

$$G_{\alpha\beta}(\omega)=\delta_{\alpha\beta}\hat{G}^0_\alpha(\omega)+\Sigma_\gamma\hat{G}^0_\alpha(\omega)[u-M(\omega)]_{\alpha\gamma}G_{\gamma\beta}(\omega),\tag{13}$$

其中

$$\hat{G}^0_\alpha(\omega)=-\left\{\frac{1-n_\alpha}{\omega-\varepsilon_\alpha+i\hat{\eta}}+\frac{n_\alpha}{\omega-\varepsilon_\alpha-i\hat{\eta}}\right\}_{\hat{\eta}\to0+},\tag{14}$$

上式对实数或复数的 ε_α 均有意义. 倘若式(2)的本征值满足以下条件: $Im\varepsilon_p\leqslant0$ 与 $Im\varepsilon_h\geqslant0$, 则

$$\hat{G}^0_{\alpha\beta}(\omega)=\delta_{\alpha\beta}\hat{G}^0_\alpha(\omega)=G^0_{\alpha\beta}(\omega)$$

即这时式(13)就是平常的 Dyson 方程, $M_{\alpha\beta}(\omega)$ 就是质量算符, 因此根据式(13), 式(6)可以看为是质量算符的一个更一般的表达式. 注意,式(12)与文(III)式(18)形式上完全相同,所以应用文(III)中的论据就可以立即证得结论 A. 事实上, 如果将单粒位阱选为

$$u_{\alpha\gamma}=M_{\alpha\gamma}(\varepsilon_\gamma),\tag{15}$$

则由上式与式(12)有

$$G^{-1}_{\alpha\gamma}(\varepsilon_\gamma)=0,\tag{16}$$

由于上式对任一 α 均成立,这说明,倘若按式(15)选择 $\mathbf{u}$, 则式(2)的断续本征值 ε_γ 必为某一个 $G_{\gamma\alpha}(\omega)$ 的极点,所以 ε_γ 必满足式(1), 因而也一定是实数, 即结论 A 成立. 很明显,前三文[1,2]中所得其它结论同样可以推广到 $\mathbf{V}$ 含有多体力的情形. 下面让我们以式(3)与(4)代入式(6)和式(7), 通过简单的运算可以求得

$$\begin{aligned}
&\langle\Psi_0|\{\xi_\alpha,[\mathbf{V},\xi^+_\beta]\}_+|\Psi_0\rangle\\
&=\sum_{n=2}^{\Omega}\left[\frac{1}{(n-1)!}\right]^2\sum_{\substack{\alpha_2\cdots\alpha_n\\ \beta_2\cdots\beta_n}}v^{(n)}_{\alpha\alpha_2\cdots\alpha_n,\beta\beta_2\cdots\beta_n}\langle\Psi_0|\xi^+_{\alpha_2}\cdots\xi^+_{\alpha_n}\xi_{\beta_n}\cdots\xi_{\beta_2}|\Psi_0\rangle\\
&=\sum_{\alpha_2\beta_2}v^{(2)}_{\alpha\alpha_2,\beta\beta_2}\langle\Psi_0|\xi^+_{\alpha_2}\xi_{\beta_2}|\Psi_0\rangle\\
&\quad+\frac{1}{4}\sum_{\alpha_2\alpha_3\beta_2\beta_3}v^{(3)}_{\alpha\alpha_2\alpha_3,\beta\beta_2\beta_3}\langle\Psi_0|\xi^+_{\alpha_2}\xi^+_{\alpha_3}\xi_{\beta_3}\xi_{\beta_2}|\Psi_0\rangle+\cdots,
\end{aligned}\tag{17}$$

以及

$$\begin{aligned}
m_{\alpha\beta}(\omega)&=\sum_{n,l=2}^{\Omega}\frac{1}{n!(n-1)!l!(l-1)!}\sum_{\alpha_2\cdots\alpha_n\beta_1\cdots\beta_n}\ \sum_{\gamma_1\cdots\gamma_l\delta_2\cdots\delta_l}\\
&\quad\times v^{(n)}_{\alpha\alpha_2\cdots\alpha_n,\beta_1\beta_2\cdots\beta_n}G_{ir}(\beta_1\beta_2\cdots\beta_n\alpha_n\cdots\alpha_2,\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_l\delta_l\cdots\delta_2;\omega)\\
&\quad\times v^{(l)}_{\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_l,\beta\delta_2\cdots\delta_l}\\
&=\frac{1}{4}\sum_{\alpha_2\beta_1\beta_2}\sum_{\gamma_1\gamma_2\delta_2}v^{(2)}_{\alpha\alpha_2,\beta_1\beta_2}G_{ir}(\beta_1\beta_2\alpha_2,\ \gamma_1\gamma_2\delta_2;\ \omega)v^{(2)}_{\gamma_1\gamma_2,\beta\delta_2}\\
&\quad+\frac{1}{12}\sum_{\alpha_2\beta_1\beta_2}\sum_{\gamma_1\gamma_2\gamma_3\delta_2\delta_3}v^{(2)}_{\alpha\alpha_2,\beta_1\beta_2}G_{ir}(\beta_1\beta_2\alpha_2,\ \gamma_1\gamma_2\gamma_3\delta_3\delta_2;\ \omega)v^{(3)}_{\gamma_1\gamma_2\gamma_3,\beta\delta_2\delta_3}\\
&\quad+\frac{1}{12}\sum_{\alpha_2\alpha_3\beta_1\beta_2\beta_3}\sum_{\gamma_1\gamma_2\delta_2}v^{(3)}_{\alpha\alpha_2\alpha_3,\beta_1\beta_2\beta_3}G_{ir}(\beta_1\beta_2\beta_3\alpha_3\alpha_2,\ \gamma_1\gamma_2\delta_2;\ \omega)v^{(2)}_{\gamma_1\gamma_2,\beta\delta_2}\\
&\quad+\left(\frac{1}{12}\right)^2\sum_{\alpha_2\alpha_3\beta_1\beta_2\beta_3}\ \sum_{\gamma_1\gamma_2\gamma_3\delta_2\delta_3}v^{(3)}_{\alpha\alpha_2\alpha_3,\beta_1\beta_2\beta_3}
\end{aligned}$$

$$\times\ G_{i_r}(\beta_1\beta_2\beta_3\alpha_3\alpha_2,\ \gamma_1\gamma_2\gamma_3\delta_3\delta_2;\ \omega)v^{(3)}_{\gamma_1\gamma_2\gamma_3,\beta\delta_2\delta_3}+\cdots,\tag{18}$$

上式中

$$\begin{aligned}G_{i_r}(\beta_1\beta_2\cdots\beta_n\alpha_n\cdots\alpha_2,\ \gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_l\delta_l\cdots\delta_2;\ \omega)\\=G(\beta_1\beta_2\cdots\beta_n\alpha_n\cdots\alpha_2,\ \gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_l\delta_l\cdots\delta_2;\ \omega)\\-\sum_{\chi\kappa}G(\beta_1\beta_2\cdots\beta_n\alpha_n\cdots\alpha_2,\chi;\omega)G^{-1}_{\chi,\kappa}(\omega)G(\kappa,\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_l\delta_l\cdots\delta_2;\omega).\end{aligned}\tag{19}$$

$G(\beta_1\beta_2\cdots\beta_n\alpha_m\alpha_{m-1}\cdots\alpha_{m_0},\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_l\delta_k\delta_{k-1}\cdots\delta_{k_0};\ \omega)$ 为以下格林函数

$$\begin{aligned}G(\beta_1\beta_2\cdots\beta_n\alpha_m\cdots\alpha_{m_0},\ \gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_l\delta_k\cdots\delta_{k_0};\ t_1-t_2)\\=\langle\Psi_0|T\{\xi^+_{\alpha_{m_0}}(t_1)\cdots\xi^+_{\alpha_m}(t_1)\bar{\xi}_{\beta_n}(t_1)\cdots\bar{\xi}_{\beta_1}(t_1)\\\times\ \xi^+_{\gamma_1}(t_2)\cdots\xi^+_{\gamma_l}(t_2)\bar{\xi}_{\delta_k}(t_2)\cdots\bar{\xi}_{\delta_{k_0}}(t_2)\}|\Psi_0\rangle\end{aligned}$$

的傅氏变换，其中 $m_0<m$，$k_0<k$ 而且 $m-m_0+l=k-k_0+n$. 注意，如果按式(15)选择 $\mathbf{u}$ 并忽略 $m_{\alpha\beta}(\varepsilon_\beta)$ 的贡献，则

$$u_{\alpha\beta}\simeq\langle\Psi_0|\{\bar{\xi}_\alpha,\ [\mathbf{V},\ \xi^+_\beta]\}_+|\Psi_0\rangle=\langle\bar{\phi}_0|\{\bar{\xi}_\alpha,\ [\mathbf{V},\ \xi^+_\beta]\}_+|\phi_0\rangle+r_{\alpha\beta},\tag{20}$$

由式(17)我们看到，上式右端第一项就是顾及了多体力的 HF 近似，$|\phi_0\rangle$ 与 $|\bar{\phi}_0\rangle$ 的定义见文(I)[2]，$r_{\alpha\beta}$ 表示由基态关联所引起的修正项. 此外，虽然式(20)中只间接地含有不同多体力间的相互干涉效应，但是式(18)指出，$m_{\alpha\beta}(\varepsilon_\beta)$ 中却显含着这类相干项. 例如，倘若需要研究三体力的贡献，而且后者和二体力相比可看为是高一级小的量，则在式(18)中除第一项外首先需要计算的应是第二与第三项.

多体力的重要性目前仍是一个正在探讨的问题. 以上讨论说明，即使必须考虑多体力，我们以前所得到的结论[1,2]依然成立.

参　考　文　献

[1] 吴式枢，高能物理与核物理，(待发表).
[2] 吴式枢，物理学报，**25**(1976)，433；高能物理与核物理，**2**(1978)，10.

ON NUCLEAR SINGLE-PARTICLE POTENTIALS (IV) MANY-BODY FORCES

WU SHI-SHU
(Department of Physics, Jilin University)

ABSTRACT

It is shown that even if the nucleon-nucleon interactions contain many-body forces, the discrete energy eigenvalues ε_γ determined by the non-hermitian sp potential

$$u_{\alpha\beta}=M_{\alpha\beta}(\varepsilon_\beta)$$

still possess the following properties:

$G_{\gamma_\alpha}(\varepsilon_\gamma)=\infty$, for at least one α, Since the points at which $G_{\gamma\alpha}(\omega)$ tends to ∞ are either its poles or the heads of its branch cuts (where $G_{\gamma\alpha}(\omega)$ is log-divergent), it follows that ε_γ are real and satisfy the relation.

$$\varepsilon_\gamma=\pm[E_{n_\gamma}(N\pm1)-E_0(N)].$$