第3卷 第3期 高能物理与核物理 Vol. 3, No. 3
1979年5月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS May, 1979

静球对称无外源 $SU(2)$ 规范场解
——其自对偶性、唯一性及自源荷流分析

侯伯宇 侯伯元
(西北大学) (内蒙古大学)

摘 要

本文利用物理边值条件证明了 $SU(2)$ 规范场的无外源无奇异静球对称解必然是自对偶的，然后从自对偶条件出发明显积分求得精确解，解析地证明了解的唯一性. 然后用同步对称性的局部产生算符对拉氏量进行规范变换，明显地求得了相应的球对称分布的定域荷流密度，它是规范无关的守恒的. 电荷与磁荷的总值是量子化的，但连续分布在整个空间，可连续变动而不受量子化限制. 最后讨论了这时的对称性自发破缺的机制，特别是与磁通弦相反，这时有序态被正常态包围，有序态排除电场，电场破坏有序态.

一、引 言

近年来各种拓扑孤子解受到广泛的注意，其中只有静球对称解[1-4]是在物理(闵可夫斯基)空间的，值得着重研究.

迄今此解完全是试得的，虽然也用力学类比及计算机讨论了解的唯一性[5]，但尚无解析地证明与求解. 此解是自对偶的，而且目前找到的各种欧空间 $SU(2)$ 或 $U(4)$ 孤子无源解[6-15]都是由自对偶假定出发得到的，自对偶与无源的关系是一个引人注意而未得解决的问题. 本文利用 $r=0, \infty$ 处的物理边值条件证明了球对称无源解必然是自对偶的，然后从自对偶条件出发积分求得精确解. 这样既用解析法证明了解的唯一性，也首次在静球对称的特殊情况下解析地证明了自对偶的必然性，为一般探讨自对偶问题提供了线索.

通常将规范场强的协变散度源称为流，但它实际上只是拉氏量中规范场以外的项. 根据 Noether 定理贡献的那部分“外源流”，一般并不一定守恒. 流的守恒是物理体系规范对称性的反映，它应由具有规范对称性的拉氏量经变分用 Noether 定理求得，这时可证它是规范场强某些规范不变分量的普通散度源，这流中一般含有规范场中带荷分量贡献的自源流部分[16]，在无外源时，此自源流可以不为零而单独守恒. 如要求规范场的静球对称

本文1977年11月21日收到.

无源解无奇异，则必然是不可约的[17]，于是必然含有带电矢粒子，从而出现自源流. 此自源流的产生算符不是某一整体绕同一同位旋方向的常规范变换，而是处处绕不同规范轴转相同规范角的规范变换（在非 Abel 规范理论中电荷算符的同位旋方向应是规范有关的，必须有这样的定域规范自由度，不能限定在某一规范无关的共同方向上. 特别是对有 $U(1)$ 磁荷的 $SU(2)$ 规范场，它的电荷算符的同位旋方向更必须有非平庸的拓扑性质）. 本文根据同步对称性选出了产生算符，分析了相应的守恒流及其分布结构，给出了"无源"解实际有源的明显图象，还给出了守恒的对偶荷流矢，指出不可约规范场允许有连续分布的磁荷.

通常的规范场自发破缺机制需有外源——Higgs 粒子，但球对称无外源解给出场自源的动力学自发破缺的一个例子，而这时出现有序态被正常态包围，有序态排除电场的现象.

二、$SU(2)$ 规范场静球对称无外源无奇异解的自对偶性及解析求解

静球对称无外源 $SU(2)$ 规范场如果是可约化的，则可以有固步（磁荷为零，有点电荷），同步或倍步对称解[17]，但这时必然有点奇异（有点电荷或有点磁荷）. 如要求 $SU(2)$ 规范场的解无奇异而能量有限，就必须在不可约化情况中寻找. 而球对称不可约化必然是同步对称的[17,18]，它的势与场强必然等价于下形式：

$$\begin{aligned} W_i^a(x) &= \varepsilon_{iaj}(\phi(r)-1)x^j/er^2 \\ W_0^a(x) &= G(r)x^a/er^2 \end{aligned} \qquad [r=(x_1^2+x_2^2+x_3^2),\quad i,a,j=1,2,3] \tag{1}$$

$$\begin{aligned} E_i^a(x) &= F_{i0}^a(x) = E_r(r)x_ix^a/er^2 + E_T(r)(r^2\delta_i^a - x_ix^a)/er^2 \\ H_K^a(x) &= \varepsilon_{ijK}F_{ij}^a = H_r(r)x_Kx^a/er^2 + H_T(r)(r^2\delta_K^a - x_Kx^a)/er^2 \end{aligned} \tag{2}$$

其中

$$\begin{aligned} E_r(r) &= (rG'(r)-G(r))/er^2, \quad & E_T(r) &= \phi(r)G(r)/er^2 \\ H_r(r) &= (\phi^2(r)-1)/er^2, & H_T(r) &= \phi'(r)/er \end{aligned} \tag{3}$$

其中下标"r"表示径向场强，下标"T"表示各切向场强的共同值，上标"′"表示对 r 微商. 而无外源方程分离变量化为

$$r^2G'' = 2\phi^2G \tag{4a}$$

$$r^2\phi'' = \phi(\phi^2-1-G^2) \tag{4b}$$

根据场在原点无奇异要求，由 (3) 得

$$\begin{aligned} 1-\phi^2 &= 0(r^2), \quad & \phi' &= 0(r) \\ G &= 0(r^2), & G' &= 0(r) \end{aligned} \qquad （当\ r\to 0\ 时） \tag{5}$$

先设 $\phi(r)$ 与 $G(r)$ 均为实函数，注意到方程 (4) 在变换 $G\longleftrightarrow -G$ 时不变，故选 G 在原点附近取正号并不影响讨论的普遍性. 对非平庸解 ($\phi\not\equiv 0$, $G\not\equiv 0$)，由 (4a) 知 $G''\geqslant 0$，因此 G' 是单调递升的，于是得到当 $r\to\infty$ 时，$G'>0$. 另方面因要求

$$E_r = 0(r^{-2}),\quad （当\ r\to\infty\ 时）$$

得：

$$G' \to \alpha > 0, \quad G/r \to \alpha \quad (\text{当 } r \to \infty \text{ 时}), \tag{6}$$

其中 α 为某一常数．而且因要求

$$H_r = 0(r^{-2}), \quad (\text{当 } r \to \infty \text{ 时})$$

再由(4b)及(6)得

$$\phi'' \to -\alpha^2\phi, \quad (\text{当 } r \to \infty \text{ 时})$$

$$\therefore \qquad \phi \to p_1(r)\cos\alpha r + p_2(r)\sin\alpha r,$$

其中 $p(r)$ 为 r 的某有限阶多项式．所得 ϕ 在无穷远振荡发散，不符合能量有限要求．可见当 ϕ 与 G 均为非零实函数时，无源方程(4)没有无奇异的解，这与 Deser 的三维空间不存在紧致群静无源无奇异解的结论是相同的[19]．

以下设 G 为纯虚，ϕ 仍为纯实的，则仍然可如上类似推论，只是需改为 $\alpha = i\beta$, $\beta > 0$ (也可设 $\beta < 0$，结果只是改变了电场的符号，并不影响以下讨论的普遍性)．即得：

$$\begin{aligned} &G' \to i\beta, \quad G/r \to i\beta \\ &\phi \to p_3(r)e^{-\beta r}, \end{aligned} \quad (\text{当 } r \to \infty \text{ 时}) \tag{7}$$

再由(4a)得

$$(rG' - G)/r \to p_4(r)e^{-2\beta r}, \quad (\text{当 } r \to \infty \text{ 时}) \tag{8}$$

将以上所得渐近行为代入场强式(3)，可见在无穷远处，电场与磁场的径向部分都以 $e^{-2\beta r}$ 的行为趋近于库伦场．而电场与磁场的切向部分都以 $e^{-\beta r}$ 的行为趋近于零，而且二者的渐近值只差一系数 i，即 $\lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{H_T}{E_T} \to i$．

现在利用以上得到的静球对称无奇异无外源规范场的场强与势(1)(2)所必须满足的渐近行为，进一步证明满足无外源条件的场强，如存在有解，则其解必取自对偶形式．

将势 $\mathbf{W}_i(1)$ 代入场的"无外源"方程：(其中黑体字代表同位旋空间算符)

$$\nabla^\mu \mathbf{F}_{\mu\nu} \equiv \partial^\mu \mathbf{F}_{\mu\nu} + e[\mathbf{W}^\mu, \mathbf{F}_{\mu\nu}] = 0$$

并注意到场强的各切向分量同步相等如(2)所示，可得：

$$\begin{aligned} &\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2E_r) - \frac{2}{r}\phi E_T = 0 \\ &\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rH_T) - \frac{1}{r}\phi H_r + \frac{G}{r}E_T = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

将势(1)代入对应的边西等式 $\nabla^\mu {}^*\boldsymbol{F}_{\mu\nu} = 0$ 得

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2H_r) + \frac{2}{r}\phi H_T = 0 \\ &-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rE_T) + \frac{1}{r}\phi E_r + \frac{G}{r}H_T = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

取(9)与(10)的对偶组合，令

$$\mathbf{F}^+ = \mathbf{H} + i\mathbf{E}, \quad \mathbf{F}^- = \mathbf{H} - i\mathbf{E}$$

得：

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2F_r^+) - \frac{2}{r}\phi F_T^+ = 0 \\
&-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rF_T^+) + \frac{1}{r}\phi F_r^+ + i\frac{G}{r}F_T^+ = 0 \\
&\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2F_r^-) - \frac{2}{r}\phi F_T^- = 0 \\
&-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rF_T^-) + \frac{1}{r}\phi F_r^- - i\frac{G}{r}F_T^- = 0
\end{aligned} \tag{11}
$$

于是方程分成 $\mathbf{F}^+$ 与 $\mathbf{F}^-$ 所满足的两组独立的方程．由 (11) 消去切向场强可得径向场强满足如下的二阶方程：

$$\frac{d^2}{dr^2}(r^2F_r^+) - \left(\frac{\phi'}{\phi} + i\frac{G}{r}\right)\frac{d}{dr}(r^2F_r^+) - 2\phi^2F_r^+ = 0 \tag{12a}$$

$$\frac{d^2}{dr^2}(r^2F_r^-) - \left(\frac{\phi'}{\phi} - i\frac{G}{r}\right)\frac{d}{dr}(r^2F_r^-) - 2\phi^2F_r^- = 0 \tag{12b}$$

现利用已知的渐近行为 ((7), (8) 及其后的结论) 讨论 $F_r^\pm$ 的性质．注意到当 $r\to\infty$ 时 (12) 式中第三项以比第一、二项快 $e^{-2\beta r}$ 倍的行为趋于零，与前两项相比可忽略．故要求 (12) 式前两项的渐近行为的主要部分应相互抵消，再注意到场强的库伦行为项对此二项并无贡献，而前面已证 E_r 及 H_r 的库伦以外部分都按 $e^{-2\beta r}$ 的渐近行为趋于零，故其线性组合 $F_r^\pm$ 的库伦以外的渐近行为必需或以 $e^{-2\beta r}$ 的行为趋于零，或相消而以比 $e^{-2\beta r}$ 更快的行为趋近于零，而现在 (12) 第二项系数中，由 (7) 式知：

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\phi'}{\phi} \to -\beta + \frac{p_3'(r)}{p_3(r)} \to -\beta \\
&-i\frac{G}{r} \to \beta,
\end{aligned}
\right\}\quad (\text{当 } r\to\infty) \tag{13}
$$

代入 (12a) 看出，的确允许 F_r^+ 以 $e^{-2\beta r}$ 的行为趋近于零(仅讨论库伦以外行为，以下同)．而将 (13) 代入 (12b)，由于第二项系数的主要部分 (常数项部分) 相消，使得 F_r^- 只能以 r 的有限阶趋于零，这与前面所得的对场径向部分渐近行为的要求矛盾．于是得结论：(12b) 没有满足边界条件的非平庸解，只有平庸解：

$$F_r^- \equiv H_r - iE_r \equiv 0$$

即场的径向部分是自对偶的，将场强表达式 (3) 代入得：

$$(\phi^2 - 1) = i(rG' - G) \tag{14}$$

代入无源方程 (4) 易得场的，切向部分也是自对偶的：

$$r\phi' = i\phi G. \tag{15}$$

以上的证明中假定了 G、ϕ 的相角是固定的 (G 纯虚，ϕ 纯实)，如果从边界条件 (6) 式出发 ($|\alpha|>0$)，可以去掉此限制仍得同样结论．而边界条件 (6) 也是常采用的物理假定，它相当于自发破缺理论中令 Higgs 场的边值取非零的有限值．

满足自对偶条件的场，显然满足无源方程．上面又证明了满足一定物理边界条件的无外源场，如有解则必满足自对偶条件．也就是说，自对偶条件为静球对称场无外源无奇异解的必要且充分条件．下面我们从自对偶条件 (14), (15) 式出发，可以解析地得到

解.

令

$$\phi = \frac{r}{\psi} \tag{16}$$

代入(15)式得

$$iG = 1 - r\frac{\psi'}{\psi}. \tag{17}$$

将上两式代入(14)

$$\left(\frac{\psi'}{\psi}\right)' = -\frac{1}{\psi^2},$$

即

$$\left[\left(\frac{\psi'}{\psi}\right)^2\right]' = \left(\frac{1}{\psi^2}\right)'.$$

积分得

$$\left(\frac{\psi'}{\psi}\right)^2 = \frac{1}{\psi^2} + c_1,$$

开方后再积分得:

$$r = \int\frac{d\psi}{\pm\sqrt{1 + c_1\psi^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{c_1}}\,\mathrm{sh}^{-1}(\sqrt{c_1}\psi) + c_2. \tag{18}$$

由原点的边界条件(5)代入(16)知

当 $r \to 0$ 时　　$\phi^2 \to 1, \quad \psi \to 0,$

得

$$c_2 = 0.$$

代入(16)得

$$\phi = \pm\frac{\sqrt{c_1}r}{\mathrm{sh}\sqrt{c_1}r}$$

再由无穷远点的边界条件(7)式知 $\sqrt{c_1}$ 即以前所选 β,

∴　得

$$\phi = \pm\frac{\beta r}{\mathrm{sh}\,\beta r}. \tag{19}$$

代入(17)得

$$G = i(\beta r\coth\beta r - 1), \tag{20}$$

此结果与[3, 4]同.

三、同步球对称"无外源"规范场内的自源荷流分布

物理体系中守恒量的存在与该体系允许的对称变换有关. 时空度规的对称变换群(其产生算符为 Killing 矢量)与能量动量等守恒量一一对应. 平直时空有十个参数的运动群(非齐次 Lorentz 群), 故对应十个定域的守恒量. 常曲率时空也有十个参数的运动

群,对应十个定域的守恒量. 而一般的弯曲时空不存在确定的定域守恒能量、动量(其能量动量张量 $T_{\mu\lambda}$ 的协变散度为零 $T_{\mu\lambda;\lambda}=0$, 但其普通散度 $\partial_\lambda T_{\mu\lambda}$ 一般并不为零),仅当存在不改变度规从而也不变联络的 Killing 矢量 $\xi_\mu(\xi_{\mu;\nu}+\xi_{\nu;\mu}=0)$, 才会在对应的方向存在确定的定域守恒量 $\xi^\mu T_{\mu\lambda}$, 满足 $\partial_\lambda(\xi^\mu T_{\mu\lambda})=0$. 同样, 规范场中守恒流的存在与规范不变性有关,规范场造成内部对称空间(同位旋空间)的弯曲,仅当存在不改变势的规范变换,才有确定的定域守恒流. 注意到规范势的变换规律为

$$\mathbf{W}_\mu\to\mathbf{W}'_\mu=\mathbf{W}_\mu+\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}+e[\mathbf{W}_\mu,\boldsymbol{\alpha}]=\mathbf{W}_\mu+\nabla_\mu\boldsymbol{\alpha}\tag{21}$$

即仅当存在规范变换使得 $\boldsymbol{\alpha}(x)$ 满足

$$\nabla_\mu\boldsymbol{\alpha}(x)=0,\tag{22}$$

从而使得 $\mathbf{W}'_\mu=\mathbf{W}_\mu$, 才有确定的守恒流. 令 $\boldsymbol{\alpha}(x)=|\boldsymbol{\alpha}(x)|\mathbf{n}(x)$, 由条件(22)易证

$$\nabla_\mu\mathbf{n}(x)=0,\tag{23}$$

于是场可约化[20],这时的确存在守恒流

$$J_\nu=\partial^\mu(\mathbf{n}\cdot\mathbf{F}_{\mu\nu}),$$

而 $\mathbf{n}(x)$ 就是对称变换的产生算符 (Killing 矢量). $\mathbf{n}$ 又是和乐群的产生算符, 它是平移不变的,但它的"同位旋方向"则是规范协变的,在选不同规范坐标时取不同值.

引力场中如不存在 Killing 矢量,但在无穷远边界上渐近平直时(或渐近常曲率,或渐近有某 Killing 矢量),可以有整体的守恒量. 同样,规范场中如渐近可约化,就可以有确定的整体守恒流, 但这时定域的守恒量是不确定的. 引力场自身贡献的能动密度不是张量,与坐标的选择有关,有时可以根据场中其它物质的运动情况或场的对称性选择某一优先坐标系而得到有一定物理意义的能动密度. 同样不可易规范场中也存在场自身贡献的荷流密度 $[\mathbf{W}^\mu,\mathbf{F}_{\mu\nu}]$, 此自源流是规范有关的. 如何得到有确定物理意义的规范无关的流呢? 在有外源时可以根据其它物质(带电粒子的相轴, Higgs 场的方向等)来决定电荷算符的方向 $\mathbf{n}(x)$, 求出相应的守恒流[16]. 本文在无外源情况下, 根据场固有的同步对称性,得到同步对称的荷算符 $\mathbf{n}(x)$, 作为同位旋空间的优先方向,并根据对称性的分析得到场自身贡献的、规范不变的、守恒的内源流.

根据场的静球对称性,同一球面各点的径向场强 $\mathbf{E}_r(x)$ 的大小相等,与空间切向坐标 θ, ϕ 无关(可以利用场强式(3)明显看出此处及以下讨论的各种对称性, 但是这些对称性是规范无关的, 它的存在并不限于取明显同步对称规范的势(1)及场强式(3)). 用 $\mathbf{n}(x)$ 标志此径向场同位旋方向的单位矢量, 于是径向场强可记为 $\mathbf{E}_r(x)=E_r(r)\mathbf{n}(x)$. 由球对称性,可证径向磁场 $\mathbf{H}_r(x)$ 也有同样的同位旋方向,解的自对偶性更要求如此,即有 $\mathbf{H}_r(x)=H_r(r)\mathbf{n}(x)$.

这样同步球对称 $SU(2)$ 规范场, 无论是否可约化, 在各点都确定了一个优先方向 $\mathbf{n}(x)$, 我们以后叫做纵向. 至于与 $\mathbf{n}(x)$ 垂直的各同位旋横方向, 则仍然是对称等价的. 在球对称 $U(1)$ 及球对称可约 $SU(2)$ 时, 无横向物理量, 各横方向是物理上不可区分的. 而对于不可约化 $SU(2)$ 规范场,则由于空间切向场强及切向矢粒子非零(这些都是 $\nabla_t\mathbf{n}\neq 0$ 决定的,其中 ∇_t 的下标 t 表示协变微商是对空间切向进行的), 因而在各点给出了同位旋横向与空间切向的确定的(与规范无关的)同步的(绕 $\hat{r}$ 与绕 $\mathbf{n}$)一一对应关系. 而由于同步对称性,该点各切向方向上场强大小是一样的, 矢粒子分量大小一样. 总之 $\mathbf{n}(x)$ 是

各点同步对称规范变换的产生算符，它不变径向场强这一物理量，也不改变切向场强的大小，仅使其同位旋方向的改变与空间绕 $\hat{r}$ 同步转动等效．可见 $\mathbf{n}(x)$ 是此物理体系固有的有确定物理意义的“优先”方向．

进一步按照 $\mathbf{n}(x)$ 将势 $\mathbf{W}_\mu(x)$ 分为 $\mathbf{n}(x)$ 产生的 $U(1)$ 场的势 $\mathbf{A}_\mu(x)$ 和携带此 $U(1)$ 荷的矢粒子 $\mathbf{B}_\mu(x)$，其中

$$\mathbf{A}_\mu(x) \equiv \mathbf{n}\cdot\mathbf{W}_\mu - \frac{1}{e}[\mathbf{n},\ \partial_\mu\mathbf{n}], \tag{24}$$

因此

$$\tilde{\nabla}_\mu\mathbf{n}(x) \equiv \partial_\mu\mathbf{n}(x) + e[\mathbf{A}_\mu(x),\ \mathbf{n}(x)] = 0. \tag{25}$$

式中 $\tilde{\nabla}_\mu$ 的上标“～”表示作协变微商时仅取势 $\mathbf{A}$ 为联络，相对于此联络，$\mathbf{n}(x)$ 仍为平移场．但是对不可约化 $SU(2)$ 规范场，当取整个势

$$\mathbf{W}_\mu(x) \equiv \mathbf{A}_\mu(x) + \mathbf{B}_\mu(x)$$

为联络时，$\mathbf{n}(x)$ 不再是平移场，即

$$\nabla_\mu\mathbf{n}(x) \equiv \partial_\mu\mathbf{n}(x) + e[\mathbf{W}_\mu(x),\ \mathbf{n}(x)] = e[\mathbf{B}_\mu(x),\mathbf{n}(x)] \neq 0. \tag{26}$$

因此

$$\mathbf{B}_\mu(x) = \frac{1}{e}[\mathbf{n}(x),\ \nabla_\mu\mathbf{n}(x)], \tag{27}$$

即对不可约 $SU(2)$ 规范场，存在带电的矢粒子 $\mathbf{B}_\mu(x)$，它是规范协变量，它的同位旋方向与 $\mathbf{n}(x)$ 垂直，而且由静同步球对称知 $\mathbf{B}_r(x) = 0$，$\mathbf{B}_0(x) = 0$，即 $\mathbf{B}(x)$ 为双横向矢量粒子．

作局域规范变换 (21)，选 $\boldsymbol{\alpha}(x) = \delta\theta\mathbf{n}(x)$，其中 $\delta\theta$ 为与空间坐标无关的常数．对无外源规范场拉氏量按常规变分得对应守恒流为[16]：

$$J_\mu^n = -\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\partial^\mu\mathbf{W}^\nu}\frac{\delta\mathbf{W}^\nu}{\delta\theta} = -\mathbf{F}_{\mu\nu}\cdot\nabla^\nu\mathbf{n} = -\mathbf{n}\cdot[\mathbf{F}_{\mu\nu},\ e\mathbf{B}^\nu] = -\mathbf{n}\cdot[\mathbf{F}_{\mu\nu}^\perp,\ e\mathbf{B}^\nu]. \tag{28}$$

它是规范不变的自源流，式中

$$\mathbf{F}_{\mu\nu}^\perp \equiv [\mathbf{n},\ [\mathbf{F}_{\mu\nu},\mathbf{n}]] = \tilde{\nabla}_\mu\mathbf{B}_\nu - \tilde{\nabla}_\nu\mathbf{B}_\mu \tag{29}$$

为同位旋横向场强，类似也可引入同位旋纵向场强：

$$\mathbf{F}_{\mu\nu}^{/\!/} \equiv (\mathbf{F}_{\mu\nu}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} = F_{\mu\nu}^{/\!/}\mathbf{n} = \mathbf{F}_{\mu\nu} - \mathbf{F}_{\mu\nu}^\perp. \tag{30}$$

将 (2) 代入 (28) 得：

$$\begin{aligned} &J_i^n = 0, \quad (i = 1,\ 2,\ 3). \\ &J_0^n = -\mathbf{n}\cdot[\mathbf{F}_{0\nu}^\perp,\ e\mathbf{B}^\nu] = 2\phi^2G/r^3. \end{aligned} \tag{31}$$

此处利用了 $\mathbf{B}_r = 0$，$\mathbf{B}_0 = 0$，$\mathbf{E}_t\cdot\mathbf{B}_t = \mathbf{H}_t\cdot\mathbf{B}_t = 0$（这里切向指标 t 不求和），这些都是由同步球对称性所决定的规范不变关系．

所得自源荷流 J_μ^n 是守恒的，是规范不变的物理量．J_0^n 是按球对称连续分布的荷密度，此荷密度在原点最大，随半径 r 的增大按指数衰减，分布半径 $\sim \frac{1}{2\beta}$，而整个空间的总荷 $|Q| = 1$，它是量子化的．利用“无外源”方程 $\nabla^\mu\mathbf{F}_{\mu\nu} = 0$ 及 (26) 易证

$$J_\mu^n = -\mathbf{n}\cdot[\mathbf{F}_{\mu\nu},e\mathbf{B}^\nu] = (\nabla^\nu\mathbf{n})\cdot\mathbf{F}_{\nu\mu} = \nabla^\nu(\mathbf{n}\cdot\mathbf{F}_{\nu\mu}) = \partial^\nu(\mathbf{n}\cdot\mathbf{F}_{\nu\mu}) = \partial^\nu F_{\nu\mu}^{/\!/}, \tag{32}$$

即自源荷流 J_μ^n 是规范不变纵向场强的普通散度. 用场强表达式(3)将(32)右端化为:

$$\partial^\nu F_{\nu i}^{\parallel} = 0,$$

$$\partial^\nu F_{\nu 0}^{\parallel} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2 E_r) = G''/r,$$

再考虑到(31)式已给出式(32)的左端, $J_0 = 2\phi^2 G/r^3$, 可见式(32)即无源方程(4a).

以上我们只讨论了与过每点切平面的各向同性对应的稳定子群(绕 $\hat{r}$ 与 $\mathbf{n}$ 的同步 $U(1)$ 群)的自源荷. 同步球对称还意味着同步球面上的均匀性,即在球面上同步迁移的不变性,对 $SU(2)$ 规范场这种对称性表现为 $\mathbf{n}(x)$ 是同步对称的,也即在以 $\mathbf{A}$ 为联络的平移下, $\mathbf{n}(x)$ 是平移不变场 $\nabla_\mu \mathbf{n}(x) = 0$. 在明显同步对称规范(1)下,此使 $\mathbf{n}$"平移"的变换是常空间及同位旋空间绕同步切向轴的转动, 以下我们讨论与此绕切向轴转动的对称性有关的定域流. 为了在一点的邻域内对拉氏量作切向规范变换变分求流,与纵标架 $\mathbf{n}(x)$ 的平移不变式对比,在此点邻域内按如下规则选定"平移"的同位旋横标架: 在给定时刻给定点 $x_\mu = \xi_\mu$, 选定空间正交标架 $\hat{e}^t(\xi)$, $(t = 1, 2)$, 及同步的同位旋横向正交标架 $\mathbf{e}^\tau(\xi)$, $(\tau = 1, 2)$, 沿过该点的普通球面的各大圆弧 S 按联络 $\mathbf{A}$ 平移此标架,所得 $\mathbf{e}^\tau(x)$ 满足 $\hat{\nabla}_s \mathbf{e}^\tau(x) = 0$, 于是此标架矢场沿各切向按联络 $\mathbf{A}$ 的协变微商在点 ξ 均为零, 还可以再令 $\hat{\nabla}_r \mathbf{e}^\tau(x) = 0$, $\hat{\nabla}_0 \mathbf{e}^\tau(x) = 0$, 结果得:

$$\hat{\nabla}_\mu \mathbf{e}^\tau(x)\big|_{x_\mu = \xi_\mu} = 0. \tag{33}$$

其中附标 $x_\mu = \xi_\mu$ 表示此式在该点成立. 以下二式均应加此附标, 为书写简化将之略去.

作局域规范变换(21),选 $\boldsymbol{\alpha}(x) = \delta\theta \mathbf{e}^\tau(x)$, 其中 $\delta\theta$ 为与时空坐标 x_μ 无关的常数, 对拉氏量变分得:

$$\begin{aligned} J_\mu^\tau &= -\mathbf{F}_{\mu\nu}\cdot\nabla^\nu \mathbf{e}^\tau = -\mathbf{F}_{\mu\nu}\cdot[e\mathbf{B}^\nu, \mathbf{e}^\tau] = -\mathbf{e}^\tau\cdot[\mathbf{F}_{\mu\nu}, e\mathbf{B}^\nu] \\ &= -\mathbf{e}^\tau\cdot[\mathbf{F}_{\mu\nu}^{\parallel}, e\mathbf{B}^\nu]. \end{aligned} \tag{34}$$

其中利用了(33)式,即

$$\nabla_\nu \mathbf{e}^\tau \equiv \hat{\nabla}_\nu \mathbf{e}^\tau + e[\mathbf{B}_\nu, \mathbf{e}^\tau] = e[\mathbf{B}_\nu, \mathbf{e}^\tau], \tag{35}$$

所得自源流 J_μ^τ 是规范不变的守恒物理流, 由 $\mathbf{B}_r = 0$, $\mathbf{B}_0 = 0$, 及 $\mathbf{F}_{0t}^{\parallel} = \mathbf{F}_{rt}^{\parallel} = 0$, 易见 $J_0^\tau = 0$, $J_r^\tau = 0$, 仅存在切向流. 它可表为场强的普通旋度:

$$J_\mu^\tau = -F_{\mu\nu}\cdot(\nabla^\nu \mathbf{e}^\tau) = \nabla^\nu(\mathbf{e}^\tau\cdot\mathbf{F}_{\nu\mu}) = \partial^\nu(\mathbf{e}^\tau\cdot\mathbf{F}_{\nu\mu}) = \partial^\nu(\mathbf{e}^\tau\cdot\mathbf{F}_{\nu\mu}^{\perp}). \tag{36}$$

注意到(33)式,将(1)(3)代入即得无源方程(4b).

令

$$\mathbf{J}_\mu^{\perp} \equiv \mathbf{e}^\tau J_\mu^\tau \quad (\tau = 1, 2, \text{对重复指标求和}) \tag{37}$$

易见各空间切向流的大小相同,同位旋方向是横的,与空间切向同步,沿同一大圆弧流动的切向流的同位旋方向相同($U(1)$ 及可约 $SU(2)$ 均不可能有此种切向流). 切向流强为

$$\frac{\phi}{r}H_r = \frac{1}{r^3}\phi(\phi^2 - 1),$$

随 r 的增大按 $e^{-\beta r}$ 的指数律衰减,分布半径 $\sim 1/\beta$.

总之

$$\mathbf{J}_\mu = e[\mathbf{B}^\nu, \mathbf{F}_{\mu\nu}] = e[\mathbf{B}^\nu, \mathbf{F}_{\mu\nu}]\cdot(\mathbf{e}^\tau\mathbf{e}^\tau + \mathbf{n}\mathbf{n}) = J_\mu^\tau\mathbf{e}^\tau + J_\mu^\parallel\mathbf{n}, \tag{38}$$

是矢量粒子 $\mathbf{B}_\mu$ 贡献的协变源流，在无外源时它的各同位旋投影是守恒的.

一般还可引进对偶的自源流

$$^*\mathbf{J}_\mu = e[\mathbf{B}^\nu, {}^*\mathbf{F}_{\mu\nu}], \tag{39}$$

由 Bianchi 等式 $\nabla^\mu {}^*\mathbf{F}_{\mu\nu} = 0$ 及推广的 Weingarten Gauss 公式，易证它的各同位旋投影是守恒的荷流，例如其纵向投影可表为：

$$^*J_\mu^n = \mathbf{n}\cdot[e\mathbf{B}^\nu, {}^*\mathbf{F}_{\mu\nu}] = e[\mathbf{n}, \mathbf{B}^\nu]\cdot{}^*\mathbf{F}_{\mu\nu} = \nabla^\nu(\mathbf{n}\cdot{}^*\mathbf{F}_{\nu\mu}) = \partial^\nu(\mathbf{n}\cdot{}^*\mathbf{F}_{\nu\mu}), \tag{40}$$

此式必然成立，与是否无外源无关. 将 (1) (3) 代入果然为恒等式. 在此静球对称无外源的情况下，

$$^*J_i^n = 0,\quad {}^*J_0^n = 2\phi\phi'/r^2. \tag{41}$$

由于自对偶性

$$^*J_0^n = iJ_0^n,$$

即存在连续分布的磁荷，它按 $e^{-2\beta r}$ 指数律衰减，分布半径 $\sim 1/2\beta$. 总磁荷及总磁通量是量子化的，但可以有连续分布的非量子化的磁荷，过半径 r 球面的磁通量也是非量子化的. 在 $U(1)$ 及可约化 $SU(2)$ 时，Bianchi 等式要求无磁荷或只能有点磁荷，无磁荷时 $U(1)$ 有平庸丛，点磁荷时 $U(1)$ 有非平庸丛，其示性数由所包磁荷决定. 可约化的 $SU(2)$ 则有非平庸的伴丛，这些情况下点磁荷的分布与量子化数值完全由拓扑性质决定，磁荷位于场的奇异点. 而不可约化 $SU(2)$ 的 Bianchi 等式给出连续分布的磁荷，它完全是场自身贡献的，不取量子化数值，不由拓扑性质决定. 但在无穷远处可约化边界条件的拓扑性质仍决定了总磁荷是量子化的. 在此不可约情况下如果仍然按 't Hooft 势分出 $U(1)$ 磁荷，则表观上出现点奇异，而实质上此时场并无奇异.

四、场的自源荷与动力学自发破缺(超导类比)

Nielsen Olesen, Nambu 等曾将自发破缺与 II 类超导作了类比，讨论了轴对称磁通弦解的磁场、电流、矢势、序参数等随离轴的距离 ρ 变化的分布. 现在我们利用超导类比讨论上节得到的荷分布的意义. 利用 (2) 可将拉氏量 $L = -\frac{1}{4}\mathbf{F}^{\mu\nu}\cdot\mathbf{F}_{\mu\nu}$ 写为[10]：

$$L = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{r^4}(\phi^2-1)^2 + \frac{2}{r^2}(\phi'^2 - A_0^2\phi^2) - (\partial_i A_0)^2\right] \tag{42}$$

其中 $A_0 = \frac{G(r)}{r}$ 为电场的标量规范势. 上式与 Ginzburg-Landau 的超导自由能形式相似，而变分得到的无源方程 (3) 与 Ginzburg-Landau 以及 Nielsen Olesen 方程类似，ϕ 为序参数，不同的是如今与 ϕ 耦合的是标势 A_0. 磁弦解时取 London 规范 $\partial_i A_i = 0$，于是流 $j_i \propto \phi^2 A_i$，使得矢势 A_i 的方程有质量项 $\phi^2 A_i$，$1/\phi^2$ 决定了磁场的穿透深度，磁场迫使超导态进入正常态，而超导态排挤磁场. 如今在规范 $\partial_\mu W_\mu = 0$, $\partial_i W_i = 0$ 下，自源荷 $j_0 \propto 2\phi^2 A_0$，于是标势满足方程 $\Delta A_0 = 2\phi^2 A_0$，有了质量项，$1/2\phi^2$ 决定了电场的穿透深度，电

场迫使"超导态"进入正常态，而超导态排挤电场.

磁弦解时，$\rho \to 0$ 处，序参数 $\phi \to 0$，为正常态，磁场 H 局限于 $\rho = 0$ 附近，超导体自身的持久电流将之束缚使之衰减，ρ 增加 ϕ 增大进入超导态，而 H 随之减小而趋于零，H 的总通量是量子化的.

如今反过来在 $r \to \infty$ 处序参数 $\phi \to 0$ 为正常态，有 $U(1)$ 对称性，电场的方程为拉卜拉斯型 $\Delta A_0 = 0$，无质量项. 在无穷远处场强的总通量及对应的总电荷是量子化的，这样的场强本来相当于原点的点电荷产生的库伦场 D_i，但场的自源荷(真空极化所产生) j_0 的存在将此点电荷屏蔽，使场强为 E_i，而使得在 r 有限处场方程中出现质量项. 表征屏蔽的"介电"常数 D_i/E_i 当 r 趋近零时趋于无穷大. 在原点处 $\phi = 1$ 达到了完全的"超导态". 而穿透深度 $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\,\phi}$ 与相关长度 $\xi = (1 + G^2)^{-\frac{1}{2}}$ 之比 $\geq \frac{1}{\sqrt{2}}$，相当于第 II 类超导体，在原点，虽标志达到了完全的"超导态"，但仍存在有限电场.

从对偶荷来看，点库伦磁荷('t Hooft $U(1)$ 磁荷)是拓扑所决定的，真空极化将之屏蔽，本文前各节的 H_φ 相当于屏蔽后得到的磁感应强度，它与 't Hooft $U(1)$ 库伦磁场的比即称为"导磁率"的 μ，在 $r \to 0$ 处 $\mu \to 0$，标志着在原点进入完全的超导态.

参 考 文 献

[1] G. 't Hooft, *Nucl. Phys.*, **B79** (1974), 276.
[2] M. K. Prasad, C. M. Sommerfield, ***Phys. Rev. Lett.***, **35** (1975), 760.
[3] J. P. Hsu, ***Phys. Rev. Lett.***, **36** (1976), 646; Nuov Cim., **14** (1975), 189.
[4] T. S. Wu, C. N. Yang, ***Phys. Rev.***, **D13** (1976), 3233.
[5] P. H. Framton, ***Phys. Rev.***, **D14** (1976), 528.
[6] A. Belavin, A. Polyakov, A. Schwartz, Y. Tyukin, ***Phys. Lett.***, **59B** (1975), 85.
[7] R. Jackiw, C. Rebbi, ***Phys. Rev.***, **D14** (1976), 517.
[8] 李华钟、冼鼎昌、郭硕鸿，1977 年基本粒子座谈会上报告(北京).
[9] 李华钟、冼鼎昌、郭硕鸿、吴泳时，1977 年基本粒子座谈会上报告(北京).
[10] E. Witten, ***Phys. Rev. Lett.***, **38** (1977), 121.
[11] 彭加贵，科学通报，**22** (1977), 255.
[12] C. N. Yang, SB-ITP 77/33.
[13] E. Corrigan, D. B. Fairlie, Durham 预印品.
[14] R. Jackiw, C. Nohl, C. Rebbi, ***Phys. Rev.***, **D15** (1977), 1642.
[15] 谷超豪，未发表.
[16] 侯伯宇，物理学报，**26** (1977), 367.
[17] 谷超豪、胡和生、侯伯宇，复旦学报，1977 年 1 期 92 页.
[18] E. J. Weinberg, A. H. Guth, ***Phys. Rev.***, **D14** (1976), 1660.
[19] S. Deser, ***Phys. Lett.***, **64B** (1976), 463.
[20] 侯伯宇，物理学报，**26** (1977), 83.

STATICAL SPHEROSYMMETRICAL SOURCELESS SOLUTION OF $SU(2)$ GAUGE FIELD——THE SELFDUALITY, UNIQUENESS AND THE SELF INDUCED CHARGE CURRENT

HOU BO-YU

(*Inner Mongonia University*)

HOU BO-YUAN

(*North West University*)

ABSTRACT

It is shown that the statical spherosymmetrical sourceless solutions of $SU(2)$ guage field, which satisfy a physical boundary condition, must be selfdual. Then from the selfdual condition, we solve the equation explicitily, hence show the uniqueness analytically. By gauge transforming the Lagrangian by a local generator of synchrono-symmetry, we get a corresponding local charge current density, which is both gauge invariant and conserved. The total values of either electric or magnetic charge are quantized, but the charge distributions in space are continuous and not restricted by quantization. Finally we discuss a mechanism of spontaneous symmetry break-down. Contrary to ordinary magnetic flux string, now the ordered phase is surrounded by the normal phase, the ordered phase repels electric fields, and electric fields destory the ordered phase.