第3卷 第3期　高能物理与核物理　Vol. 3, No. 3
1979年5月　PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS　May, 1979

非平衡统计场论中闭路格林函数的重整化

周光召　　苏肇冰
(中国科学院理论物理研究所)

摘　　要

本文讨论了非平衡统计场论中引进的闭路格林函数的重整化问题. 在对初始关联函数作一些合理限制的条件下，用通常场论中紫外发散的对消项就可以消除闭路格林函数的紫外发散. 采用在场论中由维数调整法所决定的重整化因子，求得了闭路顶点函数所满足的重整化群方程.

一、引　　言

近年来，由于高能粒子物理和高能天体物理的发展，普遍对带温度的场论发生了兴趣[1]. 已有一些工作讨论了带温度的场论的重整化问题，并求出了温度格林函数所满足的重整化群的方程[2].

我们在这篇文章中，将要研究闭路格林函数的紫外发散和重整化的问题. 闭路格林函数是 Schwinger 和 Keldysh 等人为研究系统的非平衡统计过程所引进的一种方法[3]. 这种方法不仅可以用来讨论处于基态(真空态)和热平衡态的物理量的性质，而且可以用来研究远离热平衡的定常态的性质以及趋向平衡的输运过程等问题. 可以预期，这种方法将在高能粒子物理和高能天体物理中得到进一步的发展.

本文第二节将简短地回顾闭路格林函数的微扰论[4]，引进为以后的证明所必要的公式和符号. 第三节中将在对初始关联的紫外行为作适当假定的条件下证明闭路格林函数是可以重整的，消除通常对真空态平均的格林函数的紫外发散的同时，能够自动地消除闭路格林函数的紫外发散. 第四节将讨论闭路格林函数所满足的重整化群的方程.

在本文中，我们采用 $\hbar = c = 1$ 的单位系统，并将空间度规取为

$$g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1.$$

二、微　扰　论

令 $\varphi_B(x)$ 表示系统的裸场量，$\varphi_B(x)$ 可以有许多分量，分别代表标量场，旋量场，规范场以及为规范固定条件而引进的鬼场等. 在一般情况下，我们不特别标出 $\varphi_B(x)$ 的分量，但我们要注意许多公式是一种简写的形式，例如 $\varphi_B(x)\, J_B(x)$ 实际上表示的是各分量乘

本文1979年1月24日收到.

积之和．系统的拉氏函数为

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(\varphi_B(x), m_B, \lambda_B). \tag{2.1}$$

其中 m_B 代表粒子的裸质量，λ_B 为裸的相互作用常数．我们假定，在通常场论的意义下，(2.1) 式的 $\mathscr{L}$ 代表一个可重整化的拉氏函数．引进通常意义下的重整化后的场量 $\varphi(x)$，质量 m 和相互作用常数 λ，令

$$\begin{aligned} \varphi_B(x) &= Z_\phi^{1/2}\varphi(x), \\ m_B &= Z_m m, \\ \lambda_B &= Z_\lambda \lambda. \end{aligned} \tag{2.2}$$

其中 Z_ϕ, Z_m 和 Z_λ 称为重整化因子，它们包含了通常场论中所有的紫外发散．将拉氏函数 (2.1) 写为

$$\mathscr{L}(\varphi_B, m_B, \lambda_B) = \mathscr{L}_0(\varphi(x), m) - V(\varphi(x), \lambda, \delta m, \delta\lambda) - \varphi(x)J(x). \tag{2.3}$$

其中 $\mathscr{L}_0$ 为带有物理质量 m 的自由场的拉氏函数；$V(\varphi(x), \lambda, \delta m, \delta\lambda)$ 为包含发散对消项(用 δm 和 $\delta\lambda$ 来表示)在内的相互作用项．若场量中有规范场，在 V 中还应包含规范固定项以及保证系统公正性的鬼项等；$J(x)$ 为外源．

$\varphi(x)$ 场的闭路格林函数定义为

$$G_p(x_1, \cdots x_l) = -i^{l-1} t_r\{T_p(\hat{\varphi}(x_1)\cdots\hat{\varphi}(x_l))\hat{\rho}\}. \tag{2.4}$$

其中 $\hat{\varphi}(x)$ 和 $\hat{\rho}$ 分别为处于海森堡表象下的场量算子和系统的密度矩阵；脚标 p 代表沿时间轴由 $-\infty$ 到 $+\infty$(正支)，再由 $+\infty$ 回到 $-\infty$ (负支)的闭合路径，坐标 $x_i (i = 1, 2, \cdots l)$ 中的时间 t_i 位于这一闭路上，它可以位于正支，也可以位于负支；T_p 代表沿闭路 p 排序的算子．当在 (2.4) 式中，将 $\hat{\varphi}(x)$ 换成 $\hat{\varphi}_B(x)$，我们得到裸场量 $\hat{\varphi}_B(x)$ 的闭路格林函数．

引进闭路格林函数的生成泛函

$$Z[J(x)] = t_r\{T_p(\exp\{-i\int_p \hat{\varphi}(x)J(x)d^4x\})\hat{\rho}\}, \tag{2.5}$$

(2.5) 式中的积分是沿闭路 p 进行的，为了不致互相抵消，我们假定在正支和负支上的外源 $J(x_+)$ 和 $J(x_-)$ 是不相等的．对 $J(x)$ 作泛函微分，由 (2.5) 式可得

$$G_p(x_1, \cdots x_l) = i \left.\frac{\delta^l Z[J(x)]}{\delta J(x_l)\cdots\delta J(x_1)}\right|_{J(x)=0}. \tag{2.6}$$

在作泛函微分时，我们规定，当 $J(x)$ 为反对易 c 数时，微分一律从右边进行．

过渡到相互作用表象，可将生成泛函表为

$$Z[J(x)] = t_r\{T_p(\exp\{-i\int_p [V(\hat{\varphi}_I(x)) + \hat{\varphi}_I(x)J(x)]\})\hat{\rho}\}. \tag{2.7}$$

其中 $\hat{\varphi}_I(x)$ 为处于相互作用表象下的场量算子，它满足自由场的运动方程

$$\left.\partial_\mu \frac{\delta\mathscr{L}_0}{\delta\partial_\mu\varphi(x)} - \frac{\delta\mathscr{L}_0}{\delta\varphi(x)}\right|_{\varphi(x)=\hat{\varphi}_I(x)} = 0. \tag{2.8}$$

(2.8) 式是 $\hat{\varphi}_I(x)$ 的线性齐次方程，我们将之表为

$$\Delta^{-1}(\partial_\mu)\hat{\varphi}_I(x) = 0. \tag{2.9}$$

其中 $\Delta^{-1}(\partial_\mu)$ 是一个微分算子，$\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$，例如当 $\hat{\varphi}_I(x)$ 为标量场时

$$\Delta^{-1}(\partial_\mu) = -\partial^2 + m^2, \tag{2.10}$$

其中 $\partial^2 = \partial_\mu \partial^\mu$ 为达兰伯算子.

将 (2.7) 式中的相互作用项从求迹中拿出来,得到

$$Z[J(x)] = \exp\left\{-i\int_p V\left(i\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)d^4x\right\} t_r\left\{T_p\left(\exp\left\{-i\int_p \hat{\varphi}_I(x)J(x)d^4x\right\}\right)\hat{\rho}\right\}. \quad (2.11)$$

把场论中的 Wick 定理略加推广容易证明下列关系

$$T_p(\exp\{-i\int_p \hat{\varphi}_I(x)J(x)\,d^4x\}) = Z_0[J(x)]:\exp\{-i\int_p \hat{\varphi}_I(x)J(x)d^4x\}:. \quad (2.12)$$

其中 Wick 符号::表示在它之内的算子,产生算子都位于湮灭算子的左边. $Z_0[J(x)]$ 为自由场的生成泛函

$$Z_0[J(x)] = \exp\left\{-\frac{i}{2}\iint_p J(x)\Delta_p(x-y)J(y)d^4xd^4y\right\}. \quad (2.13)$$

其中 $\Delta_p(x-y)$ 为对真空平均的自由场闭路格林函数

$$\Delta_p(x-y) = -i\langle 0|T_p(\hat{\varphi}_I(y)\hat{\varphi}_I(x))|0\rangle, \quad (2.14)$$

它满足方程

$$\Delta^{-1}(\partial_{x\mu})\Delta_p(x-y) = \delta_p^4(x-y). \quad (2.15)$$

$\delta_p^4(x-y)$ 是对闭路积分时的 δ—函数,无论 x 在闭路的正支或负支上,它都满足关系

$$\int_p f(y)\delta_p^4(x-y)d^4y = f(x), \quad (2.16)$$

其中 $f(x)$ 为在闭路上定义的任意函数.

将 (2.12) 代入 (2.11) 式,得到

$$Z[J(x)] = \exp\left\{-i\int_p V\left(i\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)d^4x\right\} Z_0[J(x)]N[J(x)]. \quad (2.17)$$

其中

$$N[J(x)] = t_r\{:\exp\{-i\int_p \hat{\varphi}_I(x)J(x)d^4x\}:\hat{\rho}\}, \quad (2.18)$$

称为初始关联泛函,它与描写系统初始状态的密度矩阵有关. 当系统处于真空态时,

$$N[J(x)] = 1.$$

对任意的初始状态,我们将 $N[J(x)]$ 作垒积展开,得到

$$N[J(x)] = \exp\{-iW_N[J(x)]\}, \quad (2.19)$$

$$W_N[J(x)] = \sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l!}\int\cdots\int_p N(x_1,\cdots x_l)J(x_1)\cdots J(x_l)d^4x_1\cdots d^4x_l, \quad (2.20)$$

其中

$$N(x_1,\cdots x_l) = (-i)^{l-1}t_r\{:\hat{\varphi}_I(x_1)\cdots\hat{\varphi}_I(x_l):\hat{\rho}\}_c, \quad (2.21)$$

(2.21) 式右边的脚标 c 表示它是 l 阶的垒积量,相当于去掉了所有的低级关联项. 若系统处于热平衡状态,则它的统计分布是高斯型的,$l>2$ 的垒积量都为零.

将 (2.19),(2.20) 代入 (2.17),对相互作用项 V 展开,我们就得到微扰论的结果. 闭路格林函数的微扰展开和通常场论的微扰展开只有两点不同. 一是闭路格林函数对时间 t 的积分是沿闭路进行的,因此化为正支和负支积分时,每一费曼图的顶点都按其时间

坐标处于正支或负支分解为 2^n 个图，其中 n 为费曼图中的顶点个数。对每一个处于负支上的顶点要乘一个 -1 的因子，以便使得所有的时间积分都由 $-\infty$ 积到 $+\infty$，另一个不同点是闭路格林函数可以讨论处于任意初始状态的系统，而不限于真空态。初始状态的影响由关联函数 $N(x_1, \cdots x_l)$ 表示。

容易证明关联函数满足方程

$$\Delta^{-1}(\partial x_i^\mu)N(x_1, \cdots x_l) = 0 \quad i = 1, \cdots l. \tag{2.22}$$

(2.22) 式表明，关联函数只在质壳上有贡献。同时由于 (2.18) 中不包含时间排序算子 T_p，因此关联函数在闭路 p 的不同分支上的数值是相同的。

三、闭路格林函数紫外发散的消除和重整化

除了在第二节中已提出拉氏函数在通常场论意义下是可重整的这一假设外，我们将对系统初始状态的关联函数作如下的限制。

在自由粒子 Fock 表示的 Hilbert 空间中，将密度矩阵的矩阵元表为

$$\langle \boldsymbol{p}_1', \cdots \boldsymbol{p}_{N'}' | \hat{\rho} | \boldsymbol{p}_1, \cdots \boldsymbol{p}_N \rangle, \tag{3.1}$$

其中 $\boldsymbol{p}_i$ 为第 i 个粒子的动量。为了简单起见，(3.1) 式中没有标出粒子的内部自由度。由于物理状态的限制，很自然地认为在初始时刻不可能有粒子的动量达到无穷大。因此，我们假定，当动量 $|\boldsymbol{p}_i|$（或 $|\boldsymbol{p}_i'|$）趋于无穷时，矩阵元 (3.1) 式应以极快的速度趋于零。例如，当系统处于热平衡态时，它是按高斯分布的速度趋于零的。确切一点，我们假定对任意正整数 l

$$\lim_{|\boldsymbol{p}_i| \to \infty} |\boldsymbol{p}_i|^l \langle \boldsymbol{p}_1', \cdots \boldsymbol{p}_{N'}' | \hat{\rho} | \boldsymbol{p}_1, \cdots \boldsymbol{p}_N \rangle = 0. \tag{3.2}$$

(3.2) 式表明，关联函数 $N(x_1, \cdots x_l)$ 在 x_i 位于闭路任一分支上的富氏分量 $N(p_1, \cdots p_l)$ 当 $|\boldsymbol{p}_i| \to \infty$ 时都以比 $|\boldsymbol{p}_i|^{-l}$ 更快的速度趋于零。在§2中，我们已经说过，$N(p_1, \cdots p_l)$ 只在质壳上方不为零，因此 $N(p_1, \cdots p_l)$ 乘以 p_i 的有限多项式再对 d^4p_i 积分将是收敛的。

由以上的讨论可以知道，在微扰展开中，若有 $N(x_1, \cdots x_l)$ 出现的费曼图，如果被积函数在对 $x_1, \cdots x_l$ 积分之前，它的值是没有发散的，那么不会由于有 $N(x_1, \cdots x_l)$，对 x_i 积分而产生新的发散。但这并不意味着单个包含 $N(x_1, \cdots x_l)$ 在内的费曼图是没有发散的，因为很可能在对 $x_1, \cdots x_l$ 积分之前，被积函数就由于其它的闭圈图而有了发散。我们证明闭路格林函数是可重整的要点在于，把含有 $N(x_1, \cdots x_l)$ 的许多费曼图加起来，可以将它们之间的发散互相抵消掉。下面我们就来证明这一点，为此先要对真空费曼图的结构作一些分析。

利用对易关系

$$\frac{\delta}{\delta J(z)} \exp\left\{-\frac{i}{2}\iint_p J(x)\Delta_p(x-y)J(y)d^4x d^4y\right\}$$
$$= \exp\left\{-\frac{i}{2}\iint_p J(x)\Delta_p(x-y)J(y)d^4x d^4y\right\}\left(\frac{\delta}{\delta J(z)} - i\int_p J(u)\Delta_p(u-z)d^4u\right), \tag{3.3}$$

可将生成泛函 (2.17) 式写为

$$Z[J(x)] = Z_0[J(x)]\exp\left\{-i\int_p V\left(i\frac{\delta}{\delta J(x)} + \int_p J(y)\Delta_p(y-x)d^4y\right)d^4x\right\} N[J(x)]. \tag{3.4}$$

为了弄清 (3.4) 式的性质，我们先讨论真空态的情况，这时

$$N[J(x)] = 1,$$

而

$$Z[J(x)] = Z_V[J(x)],$$

$$Z_V[J] = Z_0[J(x)]\exp\left\{-i\int_p V\left(i\frac{\delta}{\delta J(x)} + \int_p J(y)\Delta_p(y-x)\,d^4y\right)d^4x\right\}. \tag{3.5}$$

将 (3.5) 式中后一项对 $J(x)$ 展开，设为

$$Z_V[J] = Z_0[J]\sum_{l=0}^{\infty}\int\cdots\int_p d^4x_1\cdots d^4x_l d^4y_1\cdots d^4y_l$$

$$\frac{1}{l!}J(y_1)\cdots J(y_l)\Delta_p(y_1-x_1)\cdots\Delta_p(y_l-x_l)f_V(x_1,\cdots x_l), \tag{3.6}$$

容易证明

$$\int\cdots\int_p d^4x_1\cdots d^4x_l\Delta_p(y_1-x_1)\cdots\Delta_p(y_l-x_l)f_V(x_1,\cdots x_l)$$
$$= \langle 0|T_p(\hat\varphi(y_l)\cdots\hat\varphi(y_1))|0\rangle_V. \tag{3.7}$$

脚标 V 在这里表示 $y_1,\cdots,y_l$ 这 l 个顶点都和相互作用项连接，也就是说要从真空态平均的格林函数中去掉由于自由场生成泛函 $Z_0[J(x)]$ 所贡献的图. 必须指出，(3.7) 式中包含了所有和 V 相连的有 l 根外线的费曼图.

利用 $\Delta_p(y-x)$ 满足的方程 (2.15)，由 (3.7) 可得

$$f_V(x_1,\cdots x_l) = \Delta^{-1}(\partial_{x_1})\Delta^{-1}(\partial_{x_2})\cdots\Delta^{-1}(\partial_{x_l})\langle 0|T_p(\hat\varphi(x_l)\cdots\hat\varphi(x_1))|0\rangle_V. \tag{3.8}$$

在进一步讨论之前，我们需要区别 x_i 处于正支和负支的情况. 首先我们讨论所有 x_i 都处于正支的情况，这时

$$f_V(x_{1+},\cdots x_{l+}) = \Delta^{-1}(\partial_{x_1})\cdots\Delta^{-1}(\partial_{x_l})\langle 0|T(\hat\varphi(x_l)\cdots\hat\varphi(x_1))|0\rangle_V. \tag{3.9}$$

在 (3.9) 式的右边，我们不需要再区别 x_i，而 T 在这里是通常的时间排序算子. 过渡到相互作用表象，有

$$\langle 0|T(\hat\varphi(x_l)\cdots\hat\varphi(x_1))|0\rangle_V = \langle 0|\hat S^+T(\hat\varphi_I(x_l)\cdots\hat\varphi_I(x_1)\hat S)|0\rangle_V. \tag{3.10}$$

其中 $\hat S$ 为场论中的 S-矩阵. 由于真空态是稳定态，$\hat S$ 矩阵作用于真空只产生一相因子

$$\hat S|0\rangle = e^{iL}|0\rangle. \tag{3.11}$$

其中 L 由真空的闭圈图贡献而来，它虽可能是一个发散的数，但可以通过重正化去掉，它不影响物理结果. 因此

$$f_V(x_{1+},\cdots x_{l+}) = \Delta^{-1}(\partial_{x_1})\cdots\Delta^{-1}(\partial_{x_l})e^{-iL}\langle 0|T(\hat\varphi_I(x_l)\cdots\hat\varphi_I(x_1)\hat S)|0\rangle_V. \tag{3.12}$$

(3.12) 式右边最后一项即通常场论中的格林函数，我们用 $G(x_1\cdots x_l)$ 表示. G 中纯真空的闭圈图将贡献一个因子 e^{iL} 和前面的 e^{-iL} 抵消，这表明 f_V 中已去掉了真空闭圈图的贡献. 过渡到动量表示，(3.12) 式可写为

$$f_{V+}(p_1,\cdots p_l)=\Delta^{-1}(-ip_1)\Delta^{-1}(-ip_2)\cdots\Delta^{-1}(-ip_l)e^{-iL}G(p_1,\cdots p_l)$$
$$=\int\cdots\int e^{i\sum_{j=1}^{l}p_j\cdot x_j}f_{V+}(x_1,\cdots x_l)d^4x_1\cdots d^4x_l. \tag{3.13}$$

在 (3.13) 中我们在 f 的脚标上增加正号表示 x_i 都在闭路的正支上. 我们知道 $G(p_1,\cdots p_l)$ 代表动量为 $p_1,\cdots p_l$ 的 l 根外线的格林函数,每根外线都和相互作用项相连接. 在场论中已经证明,只要系统包含的场量为标量场,旋量场和规范场,拉氏函数每一项的维数小于等于 4,则格林函数 $G(p_1,\cdots p_l)$ 展成闭圈图时,每一级闭圈图的紫外发散都由对消项消去,且当 $|p_i|$ 增长时,每一级闭圈图的贡献都只按 $|p_i|$ 的某个有限方次增长. 当把所有级的闭圈图加起来,会不会由于级数不收敛而产生新的发散,这个问题现在还不十分明了. 因此,我们也将限制在按闭圈数目展开的每一项中证明闭路格林函数是收敛的.

当所有的 x_i 都在负支时,同样有

$$f_V(x_{1-},\cdots x_{l-})=\Delta^{-1}(\partial_{x_1})\cdots\Delta^{-1}(\partial_{x_l})e^{+iL}\tilde{G}(x_1,\cdots x_l). \tag{3.14}$$

其中

$$\tilde{G}(x_1,\cdots x_l)=\langle 0|\tilde{T}(\hat{\varphi}_I(x_l)\cdots\hat{\varphi}_I(x_1)\hat{S}^+)|0\rangle,$$

$\tilde{T}$ 为反排序因子(时间小的排在左边). 容易证明

$$\tilde{G}(x_1,\cdots x_l)=\langle 0|T(\hat{\varphi}_I^+(x_1)\cdots\hat{\varphi}_I^+(x_l)\hat{S})|0\rangle^*, \tag{3.15}$$

因此 $\tilde{G}(x_1,\cdots x_l)$ 是通常场论的格林函数的复数共轭. 在过渡到动量表示时,每一级闭圈图对 $\tilde{G}$ 的贡献都是没有发散的,而且当动量增大时,$\tilde{G}$ 顶多按动量的有限方次增长,因此

$$f_{V-}(p_1,\cdots p_l)=\Delta^{-1}(-ip_1)\cdots\Delta^{-1}(-ip_l)e^{iL}\tilde{G}(p_1,\cdots p_l), \tag{3.16}$$

也是没有发散的.

最后,我们讨论 x_j 中有一部分在正支上,另一部分在负支上的情况,容易证明

$$f_V(x_{1+},\cdots x_{j+},x_{j+1-}\cdots x_{l-})=\Delta^{-1}(\partial_{x_1})\cdots\Delta^{-1}(\partial x_l)$$
$$\langle 0|\tilde{T}(\hat{\varphi}_I(x_l)\cdots\hat{\varphi}_I(x_{j+1})S^+)T(\hat{\varphi}_I(x_j)\cdots\hat{\varphi}_I(x_1)S)|0\rangle_V. \tag{3.17}$$

采用场论中研究么正条件时将费曼图展开的技巧,容易证明

$$f_V(x_{1+},\cdots x_{j+};x_{j+1-},\cdots x_{l-})=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i)^k}{k!}\int\cdots\int d^4z_1\cdots d^4z_kd^4u_1\cdots d^4u_k$$
$$f_{V-}(z_k,\cdots z_1;x_{j+1},\cdots x_l)\Delta_-(z_k-u_k)\cdots\Delta_-(z_1-u_1)f_{V+}(x_1,\cdots x_j,u_1,\cdots u_k). \tag{3.18}$$

其中

$$\Delta_-(z-u)=-i\langle 0|\hat{\varphi}_I(z)\hat{\varphi}_I(u)|0\rangle, \tag{3.19}$$

它满足方程

$$\Delta^{-1}(\partial_z)\Delta_-(z-u)=0. \tag{3.20}$$

过渡到动量表示,由 (3.18) 可得

$$f_{V+-}(p_1,\cdots p_j;p_{j+1},\cdots p_l)$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i)^k}{k!}\int\cdots\int\frac{d^4q_1}{(2\pi)^4}\cdots\frac{d^4q_k}{(2\pi)^4}f_{V-}(-q_k,\cdots-q_1,p_{j+1},\cdots p_l)$$

$$\Delta_-(q_1)\cdots\Delta_-(q_k)f_{V+}(p_1,\cdots p_j,q_1,\cdots q_k), \tag{3.21}$$

由于 (3.20) 式，$\Delta_-(q)$ 只有在质壳上才有贡献，且容易证明 $\Delta_-(q)$ 只有在 $q_0>0$ 时方不为零. 由能量动量守恒（对真空态平均的格林函数具有移动不变性），(3.21) 式的被积函数只有在满足条件

$$q_1+\cdots+q_k=p_{j+1}+\cdots+p_l=-(p_1+\cdots+p_l) \tag{3.22}$$

时方不为零. 因此在对 d^4q_i 积分中有如下的限制

$$|\mathbf{q}_i|\leqslant q_{i0}<P_0. \tag{3.23}$$

其中 $P_0=p_{j+10}+\cdots+p_{l0}$ 为一常数，由于每一个 q_{i0} 都大于零，因此 P_0 应是一个大于零的数，否则 (3.22) 将不满足，而积分 (3.21) 将为零. 前面已经证明 f_{V-} 和 f_{V+} 都没有发散，而对 q_k 的积分由(3.23)式表明是一个有限的积分，所以(3.21)展开式的每一项都是收敛的. 我们虽然无法知道级数是否收敛，但只要固定在有限数目闭圈的范围内，在(3.21)的级数中，就只有有限的项有贡献，因而它一定是收敛的.

以上我们对真空平均的闭路格林函数进行了讨论，我们看到它并不产生新的紫外发散. 下面我们继续讨论一般的情况.

对任意的初始状态，生成泛函 (3.4) 可以写为

$$\begin{aligned}Z[J(x)]&=Z_0[J(x)]\sum_{l=0}^{\infty}\int\cdots\int_p d^4x_1\cdots d^4x_l\,\frac{1}{l!}f_V(x_1,\cdots x_l)\\&:\left(i\frac{\delta}{\delta J(x_1)}+\int_p J(y_1)\Delta_p(y_1-x_1)d^4y_1\right)\cdots\left(i\frac{\delta}{\delta J(x_l)}+\int_p J(y_l)\Delta_p(y_l-x_l)d^4y_l\right):\\&N[J(x)].\end{aligned} \tag{3.24}$$

在 (3.24) 中符号 :: 的意思是，在其内的算子 $\frac{\delta}{\delta J(x_i)}$ 位于 $J(y_i)$ 的右边，换句话讲，在::内的算子 $\frac{\delta}{\delta J(x_i)}$ 只作用在后面的 $N[J(x)]$ 上. 同时容易证明，在 (3.24) 中出现的函数 $f_V(x_1,\cdots x_l)$ 是由 (3.8) 式给出的函数，它只与真空态平均的格林函数有关.

在 (3.24) 式中，对 $N[J(x)]$ 作微分 $i\frac{\delta}{\partial J(x_i)}$ 的结果，是出现一些关联函数 $N(x_1,\cdots x_k)$，因此，生成泛函 $Z[J(x)]/Z_0[J(x)]$ 对 $J(x)$ 展开时，它的系数是由 $f_V(x_1,\cdots x_l)$ 和许多关联函数 $N(x_1,\cdots x_k)$ 相乘，再对其中某些坐标积分而来. 我们已经证明，当固定闭圈的数目时，无论在 x_i 的正支或负支上，f_V 的富氏分量 $f_V(p_1,\cdots p_l)$ 都是没有发散的，当 $|p_i|$ 增大时它顶多随 $|p_i|$ 的某一方次增长. 同时，初始关联函数的富氏分量 $N(p_1,\cdots p_k)$ 在 $|p_i|$ 增大时以比 $|p_i|^{-1}$ 的任何方次都快的速度趋于零. 因此，将 f_V 和许多关联函数乘起来，再对其中一些坐标积分将不会产生新的紫外发散. 所以我们得出结论，只要固定了闭圈的数目，费曼图的数目就是有限的，这样一些费曼图加起来不会有紫外发散. 至于整个级数加起来是否收敛，那是需要单独研究的问题.

从以上的讨论可以看到，只要通常场论中的格林函数消除了紫外发散，那么非平衡统计中的闭路格林函数也就没有紫外发散，并且用以消除紫外发散的拉氏函数对消项和重整化因子和通常场论中的一样. 利用这后一点性质，我们可以求得闭路格林函数的重整化群方程[5].

四、闭路格林函数所满足的重整化群方程

和场论一样，我们可以引进连接的闭路格林函数及闭路顶点函数，它们的生成泛函分别为 $W[J(x)]$ 及 $\Gamma[\varphi_c(x)]$，并满足下列关系

$$W[J(x)] = i\ln Z[J(x)],$$
$$\Gamma[\varphi_c(x)] = W[J(x)] - \int_p \varphi_c(x)J(x)d^4x, \tag{4.1}$$

其中 $\varphi_c(x)$ 为场量 $\hat{\varphi}(x)$ 的平均值

$$\varphi_c(x) = \frac{\delta W[J(x)]}{\delta J(x)}. \tag{4.2}$$

闭路顶点函数可写为

$$\Gamma_p(x_1, \cdots x_l; \mu, m, \lambda, \zeta_i) = \frac{\delta^l \Gamma[\varphi_c(x)]}{\delta\varphi_c(x_1)\cdots\delta\varphi_c(x_l)}. \tag{4.3}$$

在(4.3)式的顶点函数中，我们列入了它依赖的物理量，除了质量 m 和作用常数 λ 以外，它与重整化点 μ 的选取和标志初始关联函数的物理量 ζ_i 有关. 如令 Γ_{PB} 代表裸的顶点函数，则应有关系

$$\Gamma_p(x_1, \cdots x_l;\mu, m, \lambda, \zeta_i) = Z_\varphi^{+l/2}\Gamma_{PB}(x_1, \cdots x_l, m_B, \lambda_B, \zeta_i), \tag{4.4}$$

其中 Z_φ 为波函数重整化因子，若 $\varphi(x)$ 有许多分量，与 x_i 连系的分量是 j，则

$$Z_\varphi^{+l/2} = \left(\prod_j Z_{\varphi_j}\right)^{+1/2}. \tag{4.5}$$

由 (2.2) 我们已经知道

$$m_B = Z_m m, \quad \lambda_B = Z_\lambda \lambda$$

Z_φ, Z_m 和 Z_λ 都是 μ 和作用常数 λ 的函数(我们在此处采用 'tHooft 的维数调整法来消除紫外发散，用它可以得到与质量无关的重整化方案，因而 Z 中不含质量 m[6])，它们和通常场论中求出的一样).

将 (4.4) 对 μ 微分 (固定 m_B 和 λ_B)，即得重整化群的方程:

$$\left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda} + \gamma_m(\lambda)m\frac{\partial}{\partial m} - \gamma_\Gamma(\lambda)\right]\Gamma_p^{(l)} = 0. \tag{4.6}$$

其中我们用 $\Gamma_p^{(l)}$ 代表 $\Gamma_p(x_1, \cdots x_l, \mu, \lambda, m, \zeta_i)$; 且

$$\begin{aligned} \beta(\lambda) &= \mu\frac{\partial}{\partial\mu}\lambda\Big|_{\lambda_{B},\, m_B} = -\lambda\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln Z_\lambda\Big|_{\lambda_B,\, m_B}, \\ \gamma_m(\lambda) &= \mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln m\Big|_{\lambda_B,\, m_B} = -\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln Z_m\Big|_{\lambda_B,\, m_B}, \\ \gamma_\Gamma(\lambda) &= \frac{-l}{2}\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln Z_\varphi\Big|_{\lambda_B,\, m_B}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

为通常的 Callan-Symanzik 系数，它和通常场论中给出的一样.

将 x_i 固定在正支或负支上，过渡到动量表示，我们共得 2^l 个不同的顶点函数，它们每一个都满足方程 (4.6)，因此令

$$\Gamma_s^{(l)}(p_1, \cdots p_l, \mu, \lambda, m, \zeta_i), \quad s = 1, 2, \cdots 2^l$$

代表这些顶点函数,则它们都满足方程

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial\mu} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial\lambda} + \gamma_m(\lambda) m \frac{\partial}{\partial m} - \gamma_\Gamma(\lambda)\right] \Gamma_s^{(l)} = 0. \quad s = 1, 2, \cdots 2^l \tag{4.8}$$

我们把标志初始关联函数的物理量 ζ_i 分为无量纲的 η_i 和有质量量纲的 ξ_i 两部分,后者如温度,化学势等等. 有更高质量量纲的物理量可以通过取它的某一方次化为 ξ_i 类型的物理量. 根据量纲分析,有

$$\Gamma_s^{(l)}[Kp_1, \cdots Kp_l, K\mu, \lambda, Km, \eta_i, K\xi_i] = K^{D_\Gamma} \Gamma_s^{(l)}(p_1 \cdots p_l, \mu, \lambda, m, \eta_i, \xi_i), \tag{4.9}$$

其中 D_Γ 为顶点函数 $\Gamma_s^{(l)}$ 的正则量纲. 由(4.9)式容易求得

$$\left[K \frac{\partial}{\partial K} + \mu \frac{\partial}{\partial\mu} + m \frac{\partial}{\partial m} + \xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} - D_\Gamma\right] \Gamma_s^{(l)}(Kp_1, \cdots Kp_l, \mu, \lambda, m, \eta_i, \xi_i) = 0, \tag{4.10}$$

将(4.10)和(4.8)相减,消去 $\mu\partial/\partial\mu$, 得到

$$\left[K \frac{\partial}{\partial K} + \xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} - \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial\lambda} + (1 - \gamma_m(\lambda)) m \frac{\partial}{\partial m} + \gamma_\Gamma - D_\Gamma\right] \cdot \Gamma_s^{(l)}(Kp_1, \cdots Kp_l, \mu, \lambda, m, \eta_i, \xi_i) = 0. \tag{4.11}$$

(4.11)式即闭路顶点函数所满足的 Callan-Symanzik 方程.

(4.11)式可用特征线方法求解, 由它可以得到 Kislinger 和 Morley 用温度格林函数得到的同样的结论[4]. 例如对非亚伯尔规范场,不仅在大动量处系统有渐近自由的性质,而且在 ξ_i 大时(高温或高化学势等)也会有渐近自由的性质.

参 考 文 献

[1] D. A. Kirzhnits and A. D. Linde, *Phys. Lett.*, **42B** (1971), 471.
D. A. Kirzhnits, *JETP Lett.*, **15** (1972), 529.
S. Weinberg, *Phys. Rev.*, **D9** (1974), 3357
L. Dolan and R. Jackiw. *Phys. Rev.*, **D9** (1974), 3320.
M. B. Kislinger and P. D. Morley, *Phys. Rev.*, **D13** (1976), 2765.
[2] M. B. Kislinger and P. D. Morley, *Phys. Rev.*, **D13** (1976), 2771.
S. Weinberg, *Phys. Rev.*, **D9** (1974), 3357.
L. Dolan and R. Jackiw. *Phys. Rev.*, **D9** (1974), 3320.
[3] J. Schwinger. *J. Math. Phys.*, **2** (1961), 407.
L. V. Keldysh. *JETP*, **20** (1965), 1018.
R. A. Craig. *J. Math. Phys.*, **9** (1968), 605.
Mills. R., Propagators for many particle systems. New York: Gorden and Breach, 1969.
V. Korenman, *Ann. Phys.* (N. Y.), **39** (1966), 72.
V. L. Berezinskii, *JETP*, **26** (1968), 137.
G. Niklasson and A. Sjölander, *Ann. Phys.*, (N. Y.), **49** (1968). 249.
C. P. Enz. The many body problem. New York, Plenum Press, 1969.
R. Sandström, Phys. Stat. Solidi. **38** (1970), 683.
C. Caroli, R. Combescot. P. Nozieres, D. Saint-James, *J. Phys.*, **C4** (1971), 916.
[4] A. G. Hall, *Molecular Phys.*, **28** (1974), 1; *J. Phys.*, **A8** (1974), 214.
[5] K. Symanzik, *Commun. Math. Phys.*, **23** (1971), 49.
C. G. Callan. *Phys. Rev.*, **D5** (1972), 3202.
[6] G. 't Hooft, *Nucl. Phys.*, **B61** (1973), 455.
J. C. Collins and A. J. Macfarlane, *Phys Rev.*, **D10** (1974), 1210.
W. S. Weinberg, *Phys. Rev.*, **D8** (1973), 3497.

RENORMALIZATION OF THE CLOSED TIME PATH GREEN'S FUNCTIONS IN NON-EQULIBRIUM STATISTICAL FIELD THEORY

ZHOU GUANG-ZHAO　　SU ZHAO-BING

(Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

The problem of renormalization of the closed time path Green's function in non-equlibrium statistical field theory is studied. Under some reasonable assumptions on the high energy behavior of the initial correlation functions, it is found that the same counter terms, which eliminate the ultraviolet divergences in the usual field theory, can also make the closed time path Green's functions free of ultraviolet divergences. The renormalization group equation satisfied by the closed time path vertex functions is obtained and the Callan-Symanzik coefficient functions are shown to be the same as in the usual field theory.