第3卷 第3期　高能物理与核物理　Vol. 3, No. 3
1979年5月　PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS　May, 1979

研究简报

Yang-Mills 场方程的和乐泛函表述

吴 詠 时
（中国科学院理论物理研究所）

摘　要

从规范场理论的积分表述出发，我们把规范场的运动方程——无源的 Yang-Mills 方程改写为和乐泛函（即迴路位相因子）的泛函微分方程．由此进一步导出了二维时空规范理论中的无穷多个泛函微分方程形式的守恒定律．

规范场理论用什么样的量来描写最合适，这是个很重要的问题．Bohm-Aharanov 实验表明[1]，在涉及量子效应时，仅仅用场强来描写电磁场是不够的．在经典的非 Abel 规范理论中，规范场强就更不足以描写了：因为相同的场强可以对应于规范不等价的规范势[2-4]．但是用规范势来描写，又嫌所允许的规范变换自由度太大．通常是通过附加规范条件来进行限制．Gribov 不确定性[5]的存在，说明许多常用的规范条件是难以固定规范的．这就给规范理论用规范势来描写的表述带来了严重的困难．

看来，迴路位相因子（本文中称之为和乐泛函）可能是一个比较合适的量．对电磁场而言，在 Bohm-Aharanov 实验中，可以观察的、起实质作用的正是它．而且，在数学上与规范理论等价的纤维丛联络论[6-7]中，和乐群是个很重要的概念，而迴路位相因子就是和乐群的元素[6]．迴路位相因子的规范变换性质非常简单，所以用它讨论规范场的等价性、可约化性及对称性等，有很多方便之处[7-8]．

在本文中，我们从规范场的积分表述[9]出发，把 Yang-Mills 场方程改写为迴路位相因子的泛函微分方程．这就为以迴路位相因子作为出发点的规范场理论表述的更为广泛的应用开辟了新的前景．作为这一泛函微分方程的初步应用，我们证明了：在二维时空的规范理论中，存在着无穷多个泛函微分形式的守恒定律．尽管这些守恒定律的物理意义还不十分清楚，但是存在无穷多守恒定律这一事实本身无疑是很重要的．它也许有助于推进我们对于规范理论乃至胶子动力学的认识．

设 $\widehat{PQ}$ 为 n 维时空 M^n 中以 P 为起点、Q 为终点的一条路径．按照规范场的积分表述[9]，与此路径相应的位相因子 $\Phi_{QP}\in G$（矩阵 Lie 群）满足

1) $$\Phi_{RQP}=\Phi_{RQ}\cdot\Phi_{QP} \tag{1}$$

2) $$\Phi_{P+dP,P}=I-B_\mu(x)d\chi^\mu \tag{2}$$

其中 χ^μ 和 $\chi^\mu+d\chi^\mu$ （$\mu=1,\cdots,n$）分别为 M^n 中点 P 和 $P+dP$ 的坐标；$B_\mu(x)$ 取

本文 1979 年 2 月 19 日收到．

值在 G 的 Lie 代数上，它就是规范势；I 为单位矩阵．由 (1)、(2) 两式可导出

$$\Phi_{PQ} = \Phi_{QP}^{-1} \tag{3}$$

现设 P 点为 M^n 中任意一固定点，C 为以点 P 为起点和终点的任意迴路（简称 P 迴路）．记 $\Phi(C)$ 为迴路 C 的位相因子，则由 (1) 和 (3) 式知，对所有的 P 迴路 C，$\Phi(C)$ 的集合形成一个群，叫做和乐群．作为取值在和乐群中的泛函，$\Phi(C)$ 我们称之为和乐泛函．由 (1)、(2) 二式可导出[9]

$$\Phi(\delta C) = I - F_{\mu\nu}(x) d\chi^\mu \delta\chi^\nu \tag{4}$$

其中 δC 为从 P 出发，经过点 $P+dP$、$P+dP+\delta P$、$P+\delta P$，然后又回到 P 的无穷小迴路，而 $F_{\mu\nu}(x)$ 为规范场强（取值于 G 的 Lie 代数中）：

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu + [B_\mu, B_\nu] \tag{5}$$

为了用和乐泛函来表达 Yang-Mills 方程，先来计算迴路位相因子的泛函导数．设

$$\chi^\mu = \chi^\mu(S) \qquad (0 \leqslant S \leqslant 1) \tag{6}$$

是 P 迴路 C 的参数方程，其中 S 为参数，且

$$\chi^\mu(0) = \chi^\mu(1) = \chi_P^\mu \tag{6'}$$

由 (1) 式我们有：

$$\Phi(C) = \Phi(1, C, S) \cdot \Phi(S, C, 0) \tag{7}$$

其中 $\Phi(S_2, C, S_1)$ $(S_1 < S_2)$ 表示迴路 C 上从点 S_1 到 S_2 的那一段路径的位相因子．由公式 (1)、(2) 和 (4)，可以证明下列开路位相因子的泛函导数公式

$$\begin{aligned}\frac{\delta\Phi(S_2, C, S_1)}{\delta\chi^\mu(S)} = \Phi(S_2, C, S) \cdot \Big\{ & B_\mu(S)\delta(S - S_1) - B_\mu(S)\delta(S - S_2) \\ & + F_{\lambda\mu}(S)\frac{d\chi\lambda(S)}{dS}\theta(S_2 - S)\theta(S - S_1)\Big\} \Phi(S, C, S_1)\end{aligned} \tag{8}$$

由此从 (7) 式容易得到和乐泛函的泛函导数为

$$\frac{\delta\Phi(C)}{\delta\chi^\mu(S)} = \Phi(1, C, S) F_{\lambda\mu}(S) \frac{d\chi^\lambda(S)}{dS} \Phi(S, C, 0) \quad (0 < S < 1). \tag{9}$$

定义

$$\mathscr{B}_\mu(S, C) = \Phi^{-1}(C) \frac{\delta\Phi(C)}{\delta\chi^\mu(S)} \, (0 < S < 1) \tag{10}$$

则由 (9) 式得到其显示表达式为

$$\mathscr{B}_\mu(S, C) = \Phi^{-1}(S, C, 0) F_{\lambda\mu}(S) \frac{d\chi^\lambda(S)}{dS} \Phi(S, C, 0) \tag{11}$$

注意：$\mathscr{B}_\mu(S, C)$ 取值在群 G 的 Lie 代数上，而且它实际上只是迴路 C 上从点 $P(S = 0)$ 到点 S 这一段路径的泛函．由 (10) 和 (11) 二式立即可得

$$\mathscr{B}_\mu(S, C) \frac{d\chi^\mu(S)}{dS} = 0 \tag{12}$$

$$\frac{\delta\mathscr{B}_\mu(S, C)}{\delta\chi^\nu(S')} - \frac{\delta\mathscr{B}_\nu(S', C)}{\delta\chi^\mu(S)} + [\mathscr{B}_\nu(S', C), \mathscr{B}_\mu(S, C)] = 0 \tag{13}$$

其中 (13) 式不仅可由 (10) 式两边取泛函导数得到，而且也可由 (11) 式和 (8) 式显示地计算 (13) 式左端的表达式而得证．在后一证法中，对 $S' = S$ 的情形要用到场强 $F_{\mu\nu}(x)$

所满足的 Bianchi 恒等式.

若据(10)式把 $\mathscr{B}_\mu(S, C)$ 看做 P 週路空间中的平凡联络，则(13)式意味着相应的曲率为0.

对于平直的时空,从(11)式出发,利用

$$\frac{\delta}{\delta\chi^\nu(S')}\frac{d\chi^\lambda(S)}{dS}=\delta_\nu^\lambda\frac{d}{dS}\delta(S-S') \tag{14}$$

以及公式(8),不难算出下列的显示表达式

$$\frac{\delta\mathscr{B}_\mu(S, C)}{\delta\chi^\mu(S)}=\Phi^{-1}(S, C, 0)\left\{\frac{\partial F_{\lambda\mu}(S)}{\partial\chi^\mu}+[B_\mu(S), F_{\lambda\mu}(S)]\right\}\frac{d\chi^\lambda(S)}{dS}\Phi(S, C, 0)\delta(0) \tag{15}$$

因此通常的(无源的) Yang-Mills 规范场方程

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial\chi^\mu}+[B_\mu, F_{\mu\nu}]=0 \tag{16}$$

等价于如下的泛函微分方程

$$\frac{\delta\mathscr{B}_\mu(S, C)}{\delta\chi^\mu(S)}=0 \tag{17}$$

或者用和乐泛函 $\Phi(C)$ 来表达,即

$$\Phi^{-1}(C)\frac{\delta^2\Phi(C)}{\delta\chi^\mu(S)\delta\chi^\mu(S)}=\Phi^{-1}(C)\frac{\delta\Phi(C)}{\delta\chi^\mu(S)}\cdot\Phi^{-1}(C)\frac{\delta\Phi(C)}{\delta\chi^\mu(S)} \tag{17'}$$

文献[10]曾以递推的方法,证明了二维时空的某些非线性标量场理论有无穷多个守恒定律. 这里我们使用类似的递推方法,来证明二维时空的规范理论也有无穷多个守恒定律,不过它们都是以泛函微分方程的形式出现的.

对二维时空 $\mu=1, 2$. 由于 $\mathscr{B}_\mu(S, C)$ 的泛函散度为零[见方程(17)],容易看出:必存在泛函 $\Psi(S, C)$,使

$$\mathscr{B}_\mu(S, C)=\epsilon_{\mu\nu}\frac{\delta}{\delta\chi^\nu(S)}\Psi(S, C) \tag{18}$$

事实上,由上式可得

$$\left[\frac{\delta}{\delta\chi^\nu(S)}, \frac{\delta}{\delta\chi^\mu(S)}\right]\Psi(S, C)=-\epsilon_{\mu\nu}\frac{\delta\mathscr{B}_\lambda(S, C)}{\delta\chi^\lambda(S)}=0 \tag{19}$$

这是方程(18)有解的可积性条件. 因此满足方程(18)的泛函 $\Psi(S, C)$ 存在. 现在令

$$\mathscr{B}_\mu^{(2)}(S, C)=\frac{\delta\Psi(S,C)}{\delta\chi^\mu(S)}+\mathscr{B}_\mu(S, C)\Psi(S, C) \tag{20}$$

利用(18)、(17)及(13)诸式,易证 $\mathscr{B}_\mu^{(2)}(S, C)$ 的泛函散度为零:

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathscr{B}_\mu^{(2)}(S, C)}{\delta\chi^\mu(S)}&=-\epsilon_{\mu\lambda}\frac{\delta\mathscr{B}_\lambda(S, C)}{\delta\chi^\mu(S)}+\mathscr{B}_\mu(S, C)\frac{\delta\Psi(S, C)}{\delta\chi^\mu(S)}\\&=-\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\lambda}\left\{\frac{\delta\mathscr{B}_\lambda(S, C)}{\delta\chi^\mu(S)}-\frac{\delta\mathscr{B}_\mu(S, C)}{\delta\chi^\lambda(S)}+[\mathscr{B}_\mu(S, C), \mathscr{B}_\lambda(S, C)]\right\}=0\end{aligned} \tag{21}$$

用类似的办法递推:

$$\begin{cases} \mathscr{B}_\mu^{(n)}(S, C) = \left[\dfrac{\delta}{\delta \chi^\mu(S)} + \mathscr{B}_\mu(S, C)\right] \Psi^{(n-1)}(S, C) & (22) \\ \dfrac{\delta \mathscr{B}_\mu^{(n)}(S, C)}{\delta \chi^\mu(S)} = 0. \qquad (n \geqslant 2) & (23) \end{cases}$$

由 (23) 式知：存在泛函 $\Psi^{(n)}(S, C)$，使

$$\mathscr{B}_\mu^{(n)}(S, C) = \varepsilon_{\mu\nu} \frac{\delta \Psi^{(n)}(S, C)}{\delta \chi^\nu(S)} \tag{24}$$

定义

$$\mathscr{B}_\mu^{(n+1)}(S, C) = \left[\frac{\delta}{\delta \chi^\mu(S)} + \mathscr{B}_\mu(S, C)\right] \Psi^{(n)}(S, C) \equiv \frac{\Delta}{\Delta \chi^\mu(S)} \Psi^{(n)}(S, C) \tag{25}$$

则它的泛函散度也为零：

$$\frac{\delta \mathscr{B}_\mu^{(n+1)}(S, C)}{\delta \chi^\mu(S)} = 0 \tag{26}$$

利用 (22)、(25) 式以及由 (13)、(17) 式导出的

$$\left[\frac{\delta}{\delta \chi^\mu(S)}, \frac{\Delta}{\Delta \chi^\mu(S)}\right] = 0, \quad \left[\frac{\Delta}{\Delta \chi^\mu(S)}, \frac{\Delta}{\Delta \chi^\nu(S)}\right] = 0 \tag{27}$$

很容易验证 (26) 式成立. 此外，还容易验证

$$\frac{\delta \mathscr{B}_\mu^{(n+1)}(S, C)}{\delta \chi^\nu(S)} - \frac{\delta \mathscr{B}_\nu^{(n+1)}(S, C)}{\delta \chi^\mu(S)} + \mathscr{B}_\nu(S, C)\mathscr{B}_\mu^{(n+1)}(S, C) - \mathscr{B}_\mu(S, C)\mathscr{B}_\nu^{(n+1)}(S, C) = 0 \tag{28}$$

无穷多个守恒定律 (26) 的存在，加深了规范理论和有 Soliton 解的非线性标量场理论之间的类比.

作者感谢戴元本同志有益的讨论.

参　考　文　献

[1] D. Bohm and Y. Aharanov, *Phys. Rev.*, **115** (1959), 485.
[2] T. T. Wu and C. N. Yang, *Phys. Rev.*, **D12** (1975), 3843.
[3] 夏道行，复旦学报(自然科学版)，1976 年 第 1 期 82 页.
[4] 沈纯理，复旦学报(自然科学版)，1976 年 第 2 期 61 页.
[5] V. N. Gribov, Materials for the 12th LNPI Winter School, and *Nucl. Phys.*, **B139** (1978), 1.
[6] 陆启铿，物理学报，**23** (1974)，249.
[7] S. Kobayashi and K. Nomizu, "Foundations of Differential Geometry" Vol. I (1963).
[8] 谷超豪，复旦学报(自然科学版)，1976 年 第 2 期 51 页.
[9] C. N. Yang, *Phys. Rev. Lett.*, **33** (1974), 445.
[10] E. Brézin, C. Itzykson, J. Zinn-Justin and J. B. Zuber, (to be published).

THE HOLONOMY FUNCTIONAL FORMULATION OF YANG-MILLS FIELD EQUATIONS

WU YONG-SHI
(*Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

Starting from the integral formalism of gauge fields, we reformulate the equations of motion for gauge fields —— sourceless Yang-Mills equations —— as functional-differential equations of the holonomy functional (i. e., the phase factors of closed loops). From these equations we derive a set of infinite number of conservation laws in the functional-differential from for the gauge theories in a two-dimensional space-time.