

$SU(N)$ 规范理论的倍步解

王 珮 侯伯宇
(四川大学) (西北大学)

摘 要

本文系统地研究了 $SU(N)$ 规范群的单极解, 将流行的同步球对称单极推广于倍步球对称情形, 并因此给出了单极解的完全分类. 以 $SU(3), SU(4)$ 为例进行了详细计算并讨论了角动量和拓扑量子数等问题.

一、引 言

自从 't Hooft 和 Поляков^[1] 建议了一个 $SU(2)$ 规范场的经典拓扑稳定解以来, 在规范场的经典解方面有了很多进展. 其中文献 [2] 提出 $SU(2)$ 规范群的磁单极存在倍步解, 同步球对称解仅为其特殊情形. 迄今为止在推广磁单极于更高秩规范群的努力中仍未见有这方面的讨论^[3]. 因此在拓扑分类上是很不完全的.

最近, Wilkinson 和 Goldhaber 发展了一套技巧, 用以导出 $SU(N)$ 不等价的同步球对称点单极, 并以此为解的渐近行为的向导进一步找出有限能量解^[4,5]. 由于他们把明显的同步球对称当作基本出发点, 因此对倍步解^[2] 等非同步球对称解的研究必然遭到忽视. 并且他们没有具体完成 $SU(N)$ 的求解过程. 本文注意到可以选择 $SU(N)$ 的卡当基底系使任一基底均可表为两 $SU(2)$ 嵌入第三生成元之差. 从而利用此法逐级求得最普遍情况的解. 于是具体实现了各种拓扑类的 $SU(N)$ 球对称场.

第二节里我们一般性地叙述 $SU(N)$ 规范理论的磁单极解. 三、四两节分别讨论 $SU(3)$ 与 $SU(4)$ 两个具体例子. 先从阿贝尔规范解的分类出发, 然后经规范转动转为无奇异弦规范解, 并与空间单位球到同位旋单位球映射的方法给出的解的形式^[6,7] 作比较. 第五节写出倍步情形的规范场角动量. 第六节用于讨论有关拓扑量子数的问题. 最后在七、八两节将 $SU(3), SU(4)$ 的讨论推广于 $SU(N)$. 七节建立一套适用的表示, 八节则给出 $SU(N)$ 最普遍解的形式.

二、一般形式

文献 [8] 指出规范场在伴随表示中可分解为

$$W_\mu = A_\mu + B_\mu, \quad (2.1)$$

$$A_\mu = \sum_i \left\{ \frac{1}{\kappa} T_r(A_\mu C_i) C_i + \frac{i}{e} [C_i, \partial_\mu C_i] \right\}, \quad (2.2)$$

$$B_\mu = \frac{i}{e} \sum_i [\nabla_\mu C_i, C_i], \quad (2.3)$$

$$\nabla_\mu C_i \equiv \partial_\mu C_i - ie[W_\mu, C_i], \quad (2.4)$$

$$\kappa \equiv T_r C_i^2 > 0, \quad (2.5)$$

其中 e 为规范耦合常数, C_i 是 $SU(N)$ 的卡当子代数满足可易性关系

$$[C_i, C_j] = 0. \quad (2.6)$$

可阿贝尔化条件是协变导数等于 0

$$\nabla_\mu C_i = 0. \quad (2.7)$$

因此

$$B_\mu = 0, \quad (2.8)$$

$$W_\mu = A_\mu. \quad (2.9)$$

以下我们仅限于讨论可阿贝尔化的规范场解。

考虑 C_i 为常数的规范

$$\partial_\mu C_i = 0, \quad (2.10)$$

即文献中常称阿贝尔规范者。此时

$$A_\mu = \sum_i \frac{1}{\kappa} T_r(A_\mu C_i) C_i, \quad (2.11)$$

并且

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{\kappa} \sum_i T_r \{ \partial_\mu (A_\nu C_i) - \partial_\nu (A_\mu C_i) \} C_i. \quad (2.12)$$

当考虑静磁单极解时更限于

$$A_0 = 0. \quad (2.13)$$

和 $U(1)$ 规范场一样的解必然有弦^[7,9]。为避开弦可采纳例如吴杨交叠区的办法来定义规范势^[10]:

$${}^i\mathbf{A} = -e g_i C_i \mathbf{A}^D, \quad \mathbf{A}^D = -\frac{1}{e} \hat{\phi} \frac{1 - \cos \theta}{r \sin \theta}, \quad \text{在北半球}, \quad (2.14)$$

$${}^i\mathbf{A} = -e g_i C_i \mathbf{A}^{\bar{D}}, \quad \mathbf{A}^{\bar{D}} = \frac{1}{e} \hat{\phi} \frac{1 + \cos \theta}{r \sin \theta}, \quad \text{在南半球}.$$

两解在交叠区通过 $U(1)$ 子群规范变换 $e^{-2ie g_i C_i \phi}$ 彼此转换, 并从单值性要求给出 $2e g_i C_i$ 有整数本征值。我们选择 C_i 最小本征值为 $1/2$ [见 (8.1)], 则

$$g_i = -\frac{m_i}{e}, \quad m_i = \text{整数}; \quad (2.15)$$

或

$$\frac{1}{\kappa} \int_{\text{北半球} + \text{南半球}} T_r(F_{\mu\nu} C_i) [dx_\mu dx_\nu] = 2\pi m_i. \quad (2.16)$$

因此倍步解可写为^[2]

$${}^i\mathbf{A} = m_i C_i \mathbf{A}^D \quad (m_i \text{ 为整数, } i \text{ 不求和}). \quad (2.17)$$

因为 $SU(N)$ 不同的卡当基底彼此可通过外尔反射 (这也是一个常数规范变换) 相关联, 所以独立的解只有 $N - 1$ 个. 例如 $SU(3)$

$$C_1 = I_3, \quad C_2 = Y \quad (2.18)$$

是一组解, 另一组如

$$C_1 = U_3, \quad C_2 = Q. \quad (2.19)$$

可由外尔反射从前一组解得出, 其中 I_3 、 U_3 、 Y 、 Q 分别相应于习惯的 I -旋 U -旋第三分量、超荷及电荷. 因此最普遍的解应是

$$\mathbf{A} = \sum_i m_i C_i \mathbf{A}^D. \quad (2.20)$$

即阿贝尔规范中的每一解是与 $SU(N)$ 表示的不同权相应的. 如所周知, 我们可利用 $SU(N)$ 群的单连通性质将弦转掉, 即转至纯粹的横规范, 此时

$$A_\mu = \frac{i}{e} \sum_i [C_i, \partial_\mu C_i], \quad (2.21)$$

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{\kappa} \sum_{i,j} T_{ij} ([\partial_\mu C_i, \partial_\nu C_j] C_j) C_i. \quad (2.22)$$

显然在球对称情形横规范即所谓“径向规范”.

为了转成无弦规范解, 只需从吴杨交叠区的某一区出发. 流行的办法是直接从 Dirac 弦解 (即北半球吴杨解) 作规范转动. 现在让我们先来剖析 $SU(3)$ 的例子.

三、 $SU(3)$ 倍步解的分析

我们早就熟悉 $SU(3)$ 所含 $SU(2)$ 子群有两种非平庸的嵌入方式, 它们的 $SU(2)$ 生成元表示分别为:

3 → 2 + 1 嵌入

$$\frac{1}{2} \lambda_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2} \lambda_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2} \lambda_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (3.1)$$

3 → 3 嵌入¹⁾

$$T_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda_1 + \lambda_6) = W(2)^{-1} \frac{-1}{\sqrt{2}} (\lambda_4 + \lambda_6) W(2),$$

$$T_2 = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda_2 + \lambda_7) = W(2)^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda_7 - \lambda_5) W(2),$$

1) 等价于流行的 I_3 , 非对角表示: $\lambda_1, -\lambda_5, \lambda_2$.

$$T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (\lambda_3 + \sqrt{3} \lambda_8) = W(2)^{-1} \lambda_3 W(2). \quad (3.2)$$

式中 $W(2)$ 是外尔反射算符, 例如可表为^[11]

$$W(2) = e^{i\lambda_7 \pi/2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

(参见七节).

如前所述在阿贝尔规范中有三种类型解:

1° “ λ_3 型”

$$\mathbf{A} = m I_3 \mathbf{A}^D, \quad (3.4)$$

2° “ λ_8 型”

$$\mathbf{A} = n Y \mathbf{A}^D, \quad (3.5)$$

3° 综合型

$$\mathbf{A} = (m I_3 + n Y) \mathbf{A}^D. \quad (3.6)$$

在第一种类型的解中 I_3 是 $SU(2)$ 子群的第三生成元. 相应于不同的嵌入存在着两种选取, 即 $\mathbf{I} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\lambda}$ 或 $\mathbf{I} = \mathbf{T}$. 但是无论那一种嵌入经过规范转动

$$\omega' = R'(m\varphi, \theta, -m\varphi) \equiv e^{-im\varphi I_3} e^{-i\theta I_2} e^{im\varphi I_3}, \quad (3.7)$$

都有

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\text{观}} &\rightarrow \mathbf{A}_{\text{真}} = m\omega' I_3 \omega'^{-1} \mathbf{A}^D - \frac{i}{e} (\nabla \omega') \omega'^{-1} = \mathbf{A}'(\theta, m\varphi) \\ &\equiv \frac{1}{e r} \{ \hat{\theta} (\sin m\varphi I_1 - \cos m\varphi I_2) + m \hat{\phi} [\cos \theta (\cos m\varphi I_1 + \sin m\varphi I_2) - \sin \theta I_3] \}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

另一方面因为

$$\omega' I_3 \omega'^{-1} = \mathfrak{I}_3(\theta, m\varphi) \equiv \sin \theta (\cos m\varphi I_1 + \sin m\varphi I_2) + \cos \theta I_3, \quad (3.9)$$

我们若以 $C_i = \mathfrak{I}_3$ 代入 (2.21), 结果与 (3.8) 完全一致^[21].

第二种类型解 Y 是与 I_3 正交的卡当算子 (为方便计选 $Y = \frac{\sqrt{3}}{2} \lambda_8$, 见七节) 它不属于任何 $SU(2)$ 子群, 因此上述两种嵌入生成的任一 $SU(2)$ 转动都无法完全消去弦. 巧妙的是 Goldhaber 和 Wilkinson 发现 Y 可分为两个不同 $SU(2)$ 子群的部分, 并且其一与 Y 对易^[4,5]. 这样利用两种 $SU(2)$ 转动便可将弦消去. 下面我们将他们的解推广到信步情形.

以下 \mathbf{I} 仅表第一种嵌入 ($I_3 = \frac{1}{2} \lambda_3$), 易见(参考七节)

1) (3.8) 已无发散弦, 但在两极方向有“支点弦”出现. 还可以有无支点的变换.

$$Y + I_3 = T_3. \tag{3.10}$$

令

$$\omega = R^I(n\varphi, \theta, -n\varphi), \quad \Omega = R^T(n\varphi, \theta, -n\varphi) \tag{3.11}$$

为两 $SU(2)$ 规范转动, 易证经过组合规范转动 $\Omega\omega^{-1}$ 后可得

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\text{新}} &\rightarrow \mathbf{A}_{\text{新}} = n\Omega\omega^{-1}(T_3 - I_3)\omega\Omega^{-1}\mathbf{A}^D - \frac{i}{e}(\nabla\Omega\omega^{-1})\omega\Omega^{-1} \\ &= n\Omega T_3\Omega^{-1}\mathbf{A}^D - \frac{i}{e}(\nabla\Omega)\Omega^{-1} - n\Omega I_3\Omega^{-1}\mathbf{A}^D + \frac{i}{e}\Omega\omega^{-1}(\nabla\omega)\Omega^{-1} \\ &= \mathbf{A}^T(\theta, n\varphi) - \Omega\omega^{-1}\mathbf{A}^I(\theta, n\varphi)\omega\Omega^{-1}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

其中 $\mathbf{A}^{T,I}(\theta, n\varphi)$ 见于 (3.8) 式. 我们可以更进一步给出它的显式: 首先有

$$\Omega\omega^{-1}\mathbf{A}^I(\theta, n\varphi)\omega\Omega^{-1} = \Omega \frac{1}{er} \begin{pmatrix} \hat{\theta} & n\hat{\varphi} \\ \cos n\varphi & \sin n\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin n\varphi & -\cos n\varphi \\ \cos n\varphi & \sin n\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \Omega^{-1}, \tag{3.13}$$

鉴于

$$I_i = \frac{1}{\sqrt{8}} \left\{ T_i, \frac{1}{2} + T_3 \right\} \quad (i = 1, 2) \tag{3.14}$$

因此

$$\begin{aligned} &\Omega\omega^{-1}\mathbf{A}^I(\theta, n\varphi)\omega\Omega^{-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{8}er} \left\{ \Omega \begin{pmatrix} \hat{\theta} & n\hat{\varphi} \\ \cos n\varphi & \sin n\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} \Omega^{-1}, \frac{1}{2} + \Omega T_3 \Omega^{-1} \right\} \end{aligned} \tag{3.15}$$

由此立即可得

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\text{新}} &= \frac{-1}{\sqrt{8}er} \{ \hat{\theta}(\sin n\varphi T_1 - \cos n\varphi T_2) + n\hat{\varphi}[\cos \theta(\cos n\varphi T_1 + \sin n\varphi T_2) \\ &\quad - \sin \theta T_3], \frac{1 - \sqrt{8}}{2} + \sin \theta(\cos n\varphi T_1 + \sin n\varphi T_2) + \cos \theta T_3 \}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

我们现在来讨论这里得出的解是否有 (2.21) 的形式. 从“ λ_3 型”解我们曾经看到

$$\mathbf{A}^I(\theta, n\varphi) = \frac{i}{e} [\mathcal{F}_3(\theta, n\varphi), \nabla\mathcal{F}_3(\theta, n\varphi)], \tag{3.17}$$

因此

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\text{新}} &= \frac{i}{e} ([\mathfrak{I}_3(\theta, n\varphi), \nabla\mathfrak{I}_3(\theta, n\varphi)] - \Omega\omega^{-1}[\mathcal{F}_3(\theta, n\varphi), \\ &\quad \nabla\mathcal{F}_3(\theta, n\varphi)]\omega\Omega^{-1}). \end{aligned} \tag{3.18}$$

这里

$$\mathfrak{I}_3(\theta, n\varphi) = \Omega T_3 \Omega^{-1}, \quad \mathcal{F}_3(\theta, n\varphi) = \omega I_3 \omega^{-1}. \tag{3.19}$$

此时常数生成元 Y 转为

$$\begin{aligned} \Omega\omega^{-1}Y\omega\Omega^{-1} &= \Omega Y \Omega^{-1} = \mathfrak{I}_3(\theta, n\varphi) - \Omega I_3 \Omega^{-1} \\ &= \mathfrak{I}_3(\theta, n\varphi) - \Omega\omega^{-1}\mathcal{F}_3(\theta, n\varphi)\omega\Omega^{-1}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

可是规范势并不能用它代入 (2.21) 式得出. 原因是 (3.20) 中两项不能分别满足平移不变条件.

最后让我们来考虑综合型解。与“ λ_8 型”解的做法相仿，用组合规范转动 $Q\omega^{-1}\omega'$ 于规范势 (3.6)， Q ， ω 及 ω' 分别见 (3.11) 及 (3.7)，则

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\text{综}} &\rightarrow \mathbf{A}_{\text{综}'} = Q\omega^{-1}\omega'(mI_3 + nY)\omega'^{-1}\omega Q^{-1}\mathbf{A}^D - \frac{i}{e}(\nabla Q\omega^{-1}\omega')(\omega'^{-1}\omega Q^{-1}) \\ &= Q\omega^{-1}(\omega'mI_3\omega'^{-1}\mathbf{A}^D - \frac{i}{e}(\nabla\omega')\omega'^{-1})\omega Q^{-1} + QnYQ^{-1}\mathbf{A}^D - \frac{i}{e}(\nabla Q\omega^{-1})\omega Q^{-1} \\ &= Q\omega^{-1}A^I(\theta, m\varphi)\omega Q^{-1} + A^T(\theta, n\varphi) - Q\omega^{-1}A^I(\theta, n\varphi)\omega Q^{-1}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

后两项与 (3.12) 是一样的，因此只需求出第一项的显式，运用 (3.14) 及

$$I_3 = \frac{1}{4}(T_3 + 3T_3^2 - 2) = \frac{1}{\sqrt{8}}\left\{T_3, \frac{1}{2} + T_3\right\} + \frac{1 - \sqrt{2}}{4}T_3 + \frac{3 - 2\sqrt{2}}{4}T_3^2 - \frac{1}{2} \quad (3.22)$$

得：

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\text{综}'} &= \mathbf{A}^T(\theta, n\varphi) + \frac{1}{\sqrt{8}}\left\{\mathbf{A}^T(\theta, m\varphi) - \mathbf{A}^T(\theta, n\varphi), \frac{1}{2} + \mathfrak{I}_3(\theta, n\varphi)\right\} \\ &\quad + \frac{1}{4er}\sin\theta[\hat{\theta}\sin(n-m)\varphi + m\hat{\phi}\cos\theta(1 - \cos(n-m)\varphi)] \\ &\quad \times [2 + \mathcal{F}_3(\theta, n\varphi)(\sqrt{2} - 1 - (3 - 2\sqrt{2})\mathcal{F}_3(\theta, n\varphi))]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

与前例相仿，此解可表为

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\text{综}'} &= \frac{i}{e}([\mathfrak{I}_3(\theta, n\varphi), \nabla\mathfrak{I}_3(\theta, n\varphi)] \\ &\quad + Q\omega^{-1}([\mathcal{F}_3(\theta, m\varphi), \nabla\mathcal{F}_3(\theta, m\varphi)] \\ &\quad - [\mathcal{F}_3(\theta, n\varphi), \nabla\mathcal{F}_3(\theta, n\varphi)]\omega Q^{-1}). \end{aligned} \quad (3.24)$$

四、 $SU(4)$ 的倍步解

上节我们已经详细地讨论了 $SU(3)$ 的情形，现在再以 $SU(4)$ 为例更进一步阐明 $SU(N)$ 倍步解的求解方法。

$SU(2)$ 在 $SU(4)$ 群中存在着 4 种嵌入方式，它们的生成元分别是：

$4 \rightarrow 2 + 1 + 1$ 嵌入

$$T_1^{(1)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2^{(1)} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3^{(1)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (4.1)$$

$4 \rightarrow 2 + 2$ 嵌入

$$T_1^{(1)'} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2^{(1)'} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3^{(1)'} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad (4.2)$$

4 → 3 + 1 嵌入

$$T_1^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2^{(2)} = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_3^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \tag{4.3}$$

4 → 4 嵌入

$$T_1^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2^{(3)} = i \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_3^{(3)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

因为 $T^{(1)'}$ 可写为

$$T^{(1)'} = T^{(1)} + W^{-1}T^{(1)}W \tag{4.5}$$

其中 W 是从 1, 2 维到 3, 4 维的外尔反射算符, 并且

$$[T^{(1)}, W^{-1}T^{(1)}W] = 0 \tag{4.6}$$

因此它所给出的解可认作一种综合型解, 可用类似办法处理, 下面我们将略去关于这种解的讨论.

现在的情形“ λ_3 型”解和“ λ_8 型”解本质上与 $SU(3)$ 子群的对应解相同. 差别仅在于现在的嵌入方式有所增加. 例如“ λ_3 型”的 I_3 可有

$$I_3 = T_3^{(1)} \sim \frac{1}{2} \lambda_3, \quad (I_3 = T_3^{(1)'}), \quad I_3 = T_3^{(2)} \sim T_3, \quad I_3 = T_3^{(3)}. \tag{4.7}$$

唯一真正反映 $SU(4)$ 结构的解是“ λ_{15} 型”. 在阿贝尔规范

$$A_{\text{非}} = qCA^D, \quad (q \text{ 为整数}) \tag{4.8}$$

其中 $C = \sqrt{\frac{3}{2}} \lambda_{15}$, 归一问题亦参考第七节. 易见

$$C = T_3^{(3)} - T_3^{(2)}, \quad (4.9)$$

令

$$Q^{(i)} = R^{T^{(i)}}(q\varphi, \theta, -q\varphi), \quad (i = 2, 3) \quad (4.10)$$

利用组合规范转动 $Q^{(3)}Q^{(2)^{-1}}$, 并考虑到

$$[C, Q^{(2)}] = 0. \quad (4.11)$$

重覆 $SU(3)$ “ λ_8 型” 解相似的技巧可得

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\text{主}} \rightarrow \mathbf{A}_{\text{重}} &= qQ^{(3)}Q^{(2)^{-1}}(T_3^{(3)} - T_3^{(2)})Q^{(2)}Q^{(3)^{-1}}\mathbf{A}^D - \frac{i}{e}(\nabla Q^{(3)}Q^{(2)^{-1}})Q^{(2)}Q^{(3)^{-1}} \\ &= \mathbf{A}^{T^{(3)}}(\theta, q\varphi) - Q^{(3)}Q^{(2)^{-1}}\mathbf{A}^{T^{(2)}}(\theta, q\varphi)Q^{(2)}Q^{(3)^{-1}} \\ &= \frac{i}{e}([\mathfrak{F}_3^{(3)}(\theta, q\varphi), \nabla\mathfrak{F}_3^{(3)}(\theta, q\varphi) \\ &\quad - Q^{(3)}Q^{(2)^{-1}}[\mathfrak{F}_3^{(2)}(\theta, q\varphi), \nabla\mathfrak{F}_3^{(2)}(\theta, q\varphi)]Q^{(2)}Q^{(3)^{-1}}). \end{aligned} \quad (4.12)$$

其中

$$\mathfrak{F}_3^{(i)}(\theta, q\varphi) = Q^{(i)}T_3^{(i)}Q^{(i)^{-1}}, \quad i = 2, 3. \quad (4.13)$$

注意到可以用 $T^{(3)}$ 表出 $T^{(2)}$ 如下:

$$\begin{aligned} T_{1,2}^{(2)} &= \frac{1}{8\sqrt{6}} \{5\sqrt{3} - 1 + 4T_3^{(3)} - 4(\sqrt{3} - 1)T_3^{(3)^2}, T_{1,2}^{(3)}\}, \quad (4.14) \\ T_3^{(2)} &= \frac{1}{24} (-15 + 26T_3^{(3)} + 12T_3^{(3)^2} - 8T_3^{(3)^3}) \\ &= \frac{1}{8\sqrt{6}} \{5\sqrt{3} - 1 + 4T_3^{(3)} - 4(\sqrt{3} - 1)T_3^{(3)^2}, T_3^{(3)}\} \\ &\quad - \frac{5}{8} + \frac{26 - 15\sqrt{2} + \sqrt{6}}{24} T_3^{(3)} + \frac{3 - \sqrt{6}}{6} T_3^{(3)^2} \\ &\quad - \frac{2 - 3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{6} T_3^{(3)^3}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

便可进一步求得:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\text{重}} &= \mathbf{A}^{T^{(3)}}(\theta, q\varphi) - \frac{1}{8\sqrt{6}} \frac{1}{er} \left\{ Q^{(3)}(\hat{\theta} \quad q\hat{\varphi}) \begin{pmatrix} \sin q\varphi & -\cos q\varphi \\ \cos q\varphi & \sin q\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1^{(3)} \\ T_2^{(3)} \end{pmatrix} Q^{(3)^{-1}}, \right. \\ &\quad \left. 5\sqrt{3} - 1 + 4Q^{(3)}[T_3^{(3)} - (\sqrt{3} - 1)T_3^{(3)^2}]Q^{(3)^{-1}} \right\} \\ &= \frac{-1}{8\sqrt{6} er} \left\{ \hat{\theta}(\sin q\varphi T_1^{(3)} - \cos q\varphi T_2^{(3)}) + q\hat{\varphi}[\cos\theta(\cos q\varphi T_1^{(3)} \right. \\ &\quad \left. + \sin q\varphi T_2^{(3)}) - \sin\theta T_3^{(3)}], 5\sqrt{3} - 4\sqrt{6} - 1 - 4(\sqrt{3} - 1) \right. \\ &\quad \left. \times [\sin\theta(\cos q\varphi T_1^{(3)} + \sin q\varphi T_2^{(3)}) + \cos\theta T_3^{(3)}][\sin\theta(\cos q\varphi T_1^{(3)} \right. \\ &\quad \left. + \sin q\varphi T_2^{(3)}) + \cos\theta T_3^{(3)} - 1/(\sqrt{3} - 1)] \right\}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

$SU(4)$ 的卡当子代数包含三个对角生成元, 因此综合解是三项的组合

$$\mathbf{A}_{\text{磁}} = (mI_3 + nY + qc)\mathbf{A}^D, \tag{4.17}$$

在进行规范转动时,为明确起见我们在 \mathcal{Q} 右下角注明规范转动相应的倍数,如

$$\mathcal{Q}_n^{(i)} = R^{T^{(i)}}(n\varphi, \theta, -n\varphi). \tag{4.18}$$

考虑规范转动

$$\mathbf{Q} = \mathcal{Q}_q^{(3)}\mathcal{Q}_q^{(2)-1}\mathcal{Q}_n^{(2)}\mathcal{Q}_n^{(1)-1}\mathcal{Q}_m^{(1)}, \tag{4.19}$$

则

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\text{磁}} &= \mathbf{Q}(mI_3 + nY + qC)\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}^D - \frac{i}{e}(\nabla\mathbf{Q})\mathbf{Q}^{-1} \\ &= \mathbf{A}^{T^{(3)}}(\theta, q\varphi) + \mathcal{Q}_q^{(3)}\mathcal{Q}_q^{(2)-1}(\mathbf{A}^{T^{(2)}}(\theta, n\varphi) - \mathbf{A}^{T^{(2)}}(\theta, q\varphi))\mathcal{Q}_q^{(2)}\mathcal{Q}_q^{(3)-1} \\ &\quad + \mathcal{Q}_q^{(3)}\mathcal{Q}_q^{(2)-1}\mathcal{Q}_n^{(2)}\mathcal{Q}_n^{(1)-1}(\mathbf{A}^{T^{(1)}}(\theta, m\varphi) - \mathbf{A}^{T^{(1)}}(\theta, n\varphi))\mathcal{Q}_n^{(1)}\mathcal{Q}_n^{(2)-1}\mathcal{Q}_q^{(2)}\mathcal{Q}_q^{(3)-1}. \end{aligned} \tag{4.20}$$

运用 (4.14), (4.15) 得

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\text{磁}} &= \mathbf{A}^{T^{(3)}}(\theta, q\varphi) + \frac{1}{8\sqrt{6}}\{\mathbf{A}^{T^{(3)}}(\theta, n\varphi) - \mathbf{A}^{T^{(3)}}(\theta, q\varphi), \mathcal{N}[\mathfrak{F}_3^{(3)}(\theta, q\varphi)]\} \\ &\quad + \mathcal{K}(q-n)\mathcal{M}[\mathfrak{F}_3^{(3)}(\theta, q\varphi)] + \frac{1}{64\sqrt{3}}\{\{\mathbf{A}^{T^{(3)}}(\theta, m\varphi) \\ &\quad - \mathbf{A}^{T^{(3)}}(\theta, n\varphi), \mathcal{N}[\mathfrak{F}_3^{(3)}(\theta, q\varphi)]\} \\ &\quad + [\mathcal{K}(q-m) + \mathcal{K}(q-n)]\mathcal{M}[\mathfrak{F}_3^{(3)}(\theta, q\varphi)], \mathcal{P}_3^{(3)}(n, q)\} + \frac{1}{4}\mathcal{K}(n-m) \\ &\quad \times [2 + \mathcal{P}_3^{(3)}(n, q)(\sqrt{2} - 1 - (3 - 2\sqrt{2})\mathcal{P}_3^{(3)}(n, q))]. \end{aligned} \tag{4.21}$$

其中

$$\mathcal{K}(n-m) \equiv \frac{1}{er} \sin\theta [\hat{\theta} \sin(n-m)\varphi + m\hat{\phi} \cos\theta(1 - \cos(n-m)\varphi)], \tag{4.22}$$

$$\mathcal{N}[\mathfrak{F}_3^{(3)}(\theta, q\varphi)] \equiv 5\sqrt{3} - 1 + 4\mathfrak{F}_3^{(3)}(\theta, q\varphi) - 4(\sqrt{3} - 1)\mathfrak{F}_3^{(3)2}(\theta, q\varphi), \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[\mathfrak{F}_3^{(3)}(\theta, q\varphi)] &\equiv \frac{5}{8} - \frac{26 - 15\sqrt{2} + \sqrt{6}}{24}\mathfrak{F}_3^{(3)}(\theta, q\varphi) \\ &\quad - \frac{3 - \sqrt{6}}{6}\mathfrak{F}_3^{(3)2}(\theta, q\varphi) + \frac{2 - 3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{6}\mathfrak{F}_3^{(3)3}(\theta, q\varphi), \end{aligned} \tag{4.24}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_3^{(3)}(n, q) &\equiv \mathcal{Q}_q^{(3)}\mathcal{Q}_q^{(2)-1}\mathfrak{F}_3^{(2)}(n\varphi)\mathcal{Q}_q^{(2)}\mathcal{Q}_q^{(3)-1} = \frac{1}{8\sqrt{6}}\{\mathfrak{F}_3^{(3)}(\theta, n\varphi), \mathcal{N}[\mathfrak{F}_3^{(3)}(\theta, q\varphi)]\} \\ &\quad + [\sin^2\theta \cos(q-n)\varphi + \cos^2\theta]\mathcal{M}[\mathfrak{F}_3^{(3)}(\theta, q\varphi)]. \end{aligned} \tag{4.25}$$

五、规范场的角动量

现在让我们转向角动量的讨论。如所周知 $U(1)$ 电磁场的荷——单极总角动量为 (用 Dirac 势)

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times (-i\nabla - e\mathbf{A}^D) - e\mathbf{r}^2\mathbf{B}^D \quad (5.1)$$

其中

$$\mathbf{B}^D = \nabla \times \mathbf{A}^D = -\frac{1}{e} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}. \quad (5.2)$$

规范场 \mathbf{B} 本不依赖于规范, 我们加上标记 D 为表示与 \mathbf{A}^D 一样它等于下面 $SU(N)$ 规范场不含生成元的部分. 显然, 在 $SU(N)$ 群时利用阿贝尔规范中的势来定义角动量是上式的直接推广:

$$\mathbf{J} = \sum_i [\mathbf{r} \times (-i\nabla - em_i C_i \mathbf{A}^D) - er^2 m_i C_i \mathbf{B}^D] \text{ 在北半球} \quad (5.3)$$

$$\mathbf{J} = \sum_i [\mathbf{r} \times (-i\nabla - em_i C_i \mathbf{A}^D) - er^2 m_i C_i \mathbf{B}^D] \text{ 在南半球}$$

但是 \mathbf{J} 是规范协变量, 应可从无弦规范来考虑, 即

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times (-i\nabla - e\mathbf{A}_{\text{规范}}) + er^2\mathbf{B}, \quad (5.4)$$

$$\mathbf{B} = \sum_i m_i R C_i R^{-1} \mathbf{B}^D, \quad (5.5)$$

R 是相应的规范转动, 这里顺带指出横规范中场应能按 (2.22) 表示, 因为此时卡当基底已成位置函数.

$$\mathbf{B} = \frac{i}{e} \sum_{i,j} \frac{1}{2\kappa} T_r([\nabla C_i, \nabla C_j] C_i) C_j. \quad (5.6)$$

其中对易子 $[\nabla C_i, \nabla C_j]$ 包含矢量间的 \times 乘. 举 $SU(3)$ “ λ_3 型”解为例, 横规范中

$$I_3 \rightarrow \mathcal{F}_3(\theta, m\varphi),$$

用 \mathcal{F}_3 代入 (5.6) 经过简单运算导致

$$\mathbf{B} = -\frac{m\hat{\mathbf{r}}}{er^2} \mathcal{F}_3(\theta, m\varphi) = m\mathcal{F}_3(\theta, m\varphi)\mathbf{B}^D. \quad (5.7)$$

与 (5.5) 所给结果一致. 然而在加入“无场势”以后 (5.6) 就不那么方便了.

仍以 $SU(3)$ 为例, 可分别用前述三种无弦势及相应的规范转动矩阵代入 (5.4) 及 (5.5), 引入

$$\mathcal{F}(\theta, m\varphi) = m\hat{\boldsymbol{\theta}}[\cos\theta(\cos m\varphi I_1 + \sin m\varphi I_2) - \sin\theta I_3] \\ - \hat{\boldsymbol{\phi}}(\sin m\varphi I_1 - \cos m\varphi I_2) + m\hat{\mathbf{r}}\mathcal{F}_3(\theta, m\varphi) \quad (5.8)$$

$$I \rightarrow \mathbf{T} \text{ 则 } \mathcal{F} \rightarrow \mathfrak{A}. \quad (5.9)$$

于是 $SU(3)$ 三种解的角动量分别是:

“ λ_3 型”

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathcal{F}(\theta, m\varphi), \quad (5.10)$$

“ λ_8 型”

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathfrak{A}(\theta, n\varphi) - \Omega\omega^{-1}\mathcal{F}(\theta, n\varphi)\omega\Omega^{-1}, \quad (5.11)$$

综合型

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathfrak{A}(\theta, n\varphi) + \Omega\omega^{-1}[\mathcal{F}(\theta, m\varphi) - \mathcal{F}(\theta, n\varphi)]\omega\Omega^{-1}. \quad (5.12)$$

在同步球对称情形, 即 $m = n = 1$,

$$\mathcal{F}(\theta, \varphi) = \hat{\boldsymbol{\theta}}\hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \mathbf{I} + \hat{\boldsymbol{\phi}}\hat{\boldsymbol{\phi}} \cdot \mathbf{I} + \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{I}. \quad (5.13)$$

此时综合型解已退化为“ λ_3 型”, 而“ λ_3, λ_8 型”角动量则分别化为

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{I}, \quad (5.14)$$

及

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{T} - \mathcal{Q}\omega^{-1}\mathbf{I}\omega\mathcal{Q}^{-1}, \quad (5.15)$$

与文献 [4, 5] 一致.

同样也可以写出 $SU(4)$ 的角动量:

“ λ_{15} 型”

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathfrak{F}^{(3)}(\theta, q\varphi) - \mathcal{Q}_q^{(3)}\mathcal{Q}_q^{(2)-1}\mathfrak{F}^{(2)}(\theta, q\varphi)\mathcal{Q}_q^{(2)}\mathcal{Q}_q^{(3)-1}, \quad (5.16)$$

综合型

$$\begin{aligned} \mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathfrak{F}^{(3)}(\theta, q\varphi) + \mathcal{Q}_q^{(3)}\mathcal{Q}_q^{(2)-1}[\mathfrak{F}^{(2)}(\theta, n\varphi) - \mathfrak{F}^{(2)}(\theta, q\varphi)]\mathcal{Q}_q^{(2)}\mathcal{Q}_q^{(3)-1} \\ + \mathcal{Q}_q^{(3)}\mathcal{Q}_q^{(2)-1}\mathcal{Q}_n^{(2)}\mathcal{Q}_n^{(1)-1}[\mathfrak{F}^{(1)}(\theta, m\varphi) - \mathfrak{F}^{(1)}(\theta, n\varphi)]\mathcal{Q}_n^{(1)}\mathcal{Q}_n^{(2)-1}\mathcal{Q}_q^{(2)}\mathcal{Q}_q^{(3)-1}, \end{aligned} \quad (5.17)$$

式中 $\mathfrak{F}^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$) 为 (5.8) 中 \mathbf{I} 换为 $\mathbf{T}^{(i)}$, \mathcal{F}_3 换为 $\mathfrak{F}_3^{(i)}$ 之表式.

六、有关拓扑量子数的几个问题

本节打算讨论几个有关拓扑量子数的问题. 它们自然关系到解的分类.

1. Corrigan 等^[12]曾将 $SU(3)$ 八重态 Higgs 场写成形式

$$\begin{aligned} \Phi(M) = -\frac{1}{4}\lambda_8 + \frac{\sqrt{3}}{4}\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{n}(M), \quad M = 0, \pm 1, \pm 2, \\ \mathbf{n}(M) = (\sin\theta \cos M\phi, \sin\theta \sin M\phi, \cos\theta). \end{aligned} \quad (6.1)$$

并以此来构造磁单极解. 他们认为 M 是标志同伦类的典型数. 然而就他们所讨论的 $SU(3)$ 解来说不难看出这样的判断是有问题的. 例如(用阿贝尔规范的形式最为清楚^[4])

$$\mathbf{A} = U_3\mathbf{A}^D \quad (M = 0) \quad (6.2)$$

与

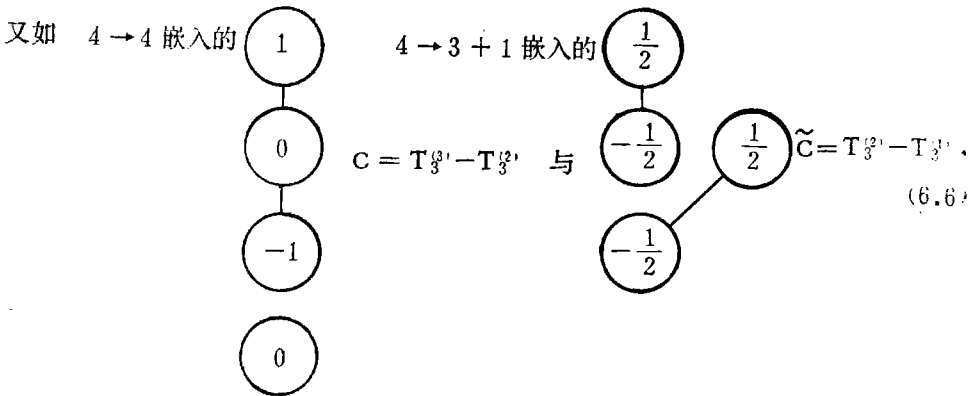
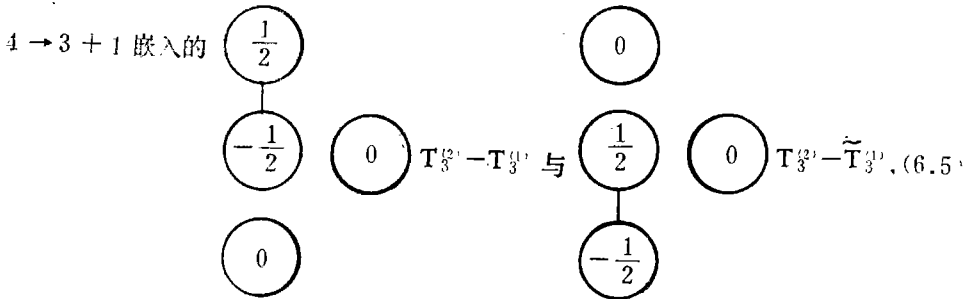
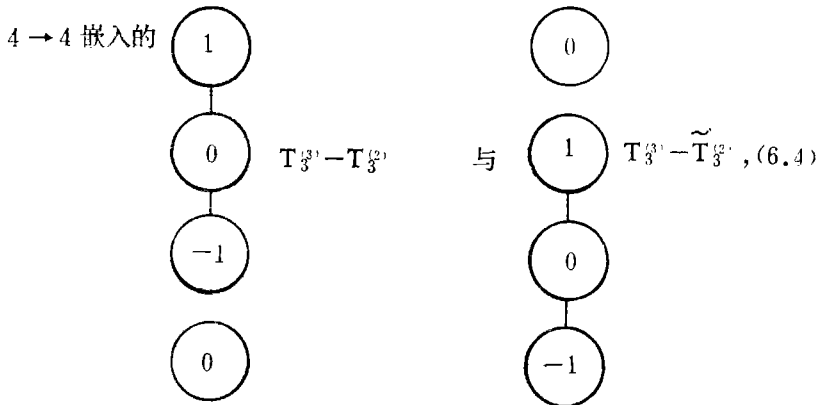
$$\mathbf{A} = I_3\mathbf{A}^D \quad (M = \pm 1) \quad (6.3)$$

两解之间可通过外尔反射互变. 在这里外尔反射又可看作一常数规范变换. 足见 M 不是恰当的拓扑量子数.

2. 由于上述理由 Wilkinson 和 Goldhaber^[5], Brihaye 和 Nuyts^[13] 所给的 $SU(4)$ 解也不全是拓扑上不等价的解. 例如(用文献[5]的图解记号)下页图, 均可通过外尔反射相关联, 即拓扑上是无区别的解, 其中

$$\tilde{T}_i^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ T_i \end{pmatrix}, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (6.7)$$

$$\tilde{T}_i^{(1)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (6.8)$$



$$\tilde{C} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -3 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.9)$$

3. 从我们关于倍步解的讨论中可以看到拓扑量子数的两个因子：缠绕数与嵌入数之间可以互相转化之一例。考虑 $SU(3)$ 阿贝尔规范中的解

$$\mathbf{A} = 2I_3 \mathbf{A}^D. \quad (6.10)$$

容易看出 $2I_3$ 经过外尔反射可变为 $3 \rightarrow 3$ 嵌入的 T_3 :

$$W^{-1}(2)2I_3W(2) = T_3 \tag{6.11}$$

$W(2)$ 见 (3.3). 显然通过 $\Omega_1 = e^{-i\varphi T_3} e^{-i\theta T_2} e^{i\varphi T_3}$ 转动可化为无弦解. 但是从另一角度出发如我们前面所分析的 $2I_3 \mathbf{A}^D$ 应可作为 $m = 2$ 之倍步解, 因此又可通过

$$\omega_2 = e^{-i2\varphi I_3} e^{-i\theta I_2} e^{i2\varphi I_3}$$

消去发散弦. 这两个解之间显然是拓扑等价的. 它们的拓扑量子数 (磁荷数) 应该相等. 事实上, 从第一种考虑而言, 缠绕数等于 1; 但因 T 旋为 I 旋的一倍

$$(T^2 = T(T + 1), \quad I^2 = I(I + 1), \quad T = 2I)$$

所以嵌入数为 2. 从第二种观点出发嵌入数为最小磁荷数, 即等于 1. 但此时缠绕数为 2. 因此

$$\text{拓扑荷} = \text{缠绕数} \times \text{嵌入数}. \tag{6.12}$$

对两解间的规范变换是恒量, 两解果然是拓扑等价的.

七、 $SU(N)$ 群的表示

为了讨论 $SU(N)$ 单极解, 我们引入下面表示来实现此事. 借助 Schouten, van der Waerden 矢量图形理论^[14], 我们在

$$l = \frac{N-1}{2}, \quad m = -l, \dots, l$$

标志的 $2l + 1$ 维 O_3 表示空间里定义算子

$$\langle lm' | X_{pq} | lm \rangle = \delta_{pm'} \delta_{qm} \tag{7.1}$$

l 为整数时此算子亦可表作

$$X_{pq} = x^p \frac{\partial}{\partial x_q}. \quad (p, q = 1, \dots, 2l + 1) \tag{7.2}$$

不难验证存在着对易关系

$$[X_{mn}, X_{pq}] = X_{mq} \delta_{pn} - X_{pn} \delta_{mq}. \tag{7.3}$$

特别有

$$[X_{mm}, X_{pq}] = (\delta_{pm} - \delta_{qm}) X_{pq} = \mathbf{e}_{l+1-m} \cdot (\mathbf{e}_{l+1-p} - \mathbf{e}_{l+1-q}) X_{pq}, \tag{7.4}$$

其中 $\mathbf{e}_i (i = 1, 2, \dots, 2l + 1)$ 是 $2l + 1$ 维空间的正交单位矢量. 用 $l + 1 - m$ 等来编号是为了下面的方便. 令

$$H'_{l+1-m} = X_{mm}, \tag{7.5}$$

$$E_{\alpha-\beta} = X_{l+1-\alpha, l+1-\beta}. \tag{7.6}$$

易见

$$[H'_i, E_{\alpha-\beta}] = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_\alpha - \mathbf{e}_\beta) E_{\alpha-\beta} \equiv \mathbf{e}_i \cdot (\alpha - \beta) E_{\alpha-\beta}. \tag{7.7}$$

为了使记号简单明确我们有时也直接用下标 α 来代替单位矢量 \mathbf{e}_α 等. 这样表示 $\alpha - \beta$ 即根矢量. 由于矢量 $\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j (i \neq j = 1, \dots, 2l + 1)$ 的全体被拘束于与 $\sum_{i=1}^{2l+1} \mathbf{e}_i$ 正交的 $2l$ 维子空间. 为了消除因 $H'_i (i = 1, \dots, 2l + 1)$ 不独立所造成的不定性, 我们进一步

引入¹⁾

$$H_k = \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} (H'_1 + H'_2 + \cdots + H'_k - kH'_{k+1}), \quad k = 1, \cdots, 2l \quad (7.8)$$

最后我们得到

$$[H_k, H_l] = 0, \quad (7.9)$$

$$[H_k, E_{\alpha-\beta}] = \epsilon_k \cdot (\alpha - \beta) E_{\alpha-\beta}, \quad k = 1, \cdots, 2l. \quad (7.10)$$

其中

$$\epsilon_k = \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} (\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_k - k\epsilon_{k+1}). \quad (7.11)$$

不同 E 的对易子我们没有写出来, 因为我们以后一般不会用到它。

按照 (7.1) 的表示

$$H_k = \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k-1 & k & k+1 & \cdots & 2l+1 \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & -k & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.12)$$

$$E_{\alpha-\beta} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \beta & \cdots & 2l+1 & & & & 1 \\ & & \vdots & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & \vdots \\ \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & & & & \alpha \\ & & & & \vdots & & & & \vdots \\ & & & & & & & & 2l+1 \end{pmatrix}. \quad (7.13)$$

卡当算子的正交条件可导之如下: 从 (7.1), (7.5) 易得

$$T_r(H'_i H'_j) = T_r(X_{l+1-i}, \overbrace{X_{l+1-i} X_{l+1-j}}^{l \uparrow}, X_{l+1-j}) = \delta_{ij}, \quad (7.14)$$

设 $k > l$, 则

$$T_r(H_k H_l) = \frac{1}{\sqrt{k(k+1)l(l+1)}} \overbrace{(1+1+\cdots+1-l)}^{l \uparrow} = 0, \quad k > l,$$

同样 $k < l$ 时也有

$$T_r(H_k H_l) = 0, \quad k < l.$$

1) 为了我们的方便这里不采用习惯所表达这一拘束的办法。即引入

$$H'_i - \frac{1}{2l+1} \sum_{j=1}^{2l+1} H'_j \quad (i = 1, \cdots, 2l+1).$$

相反现在的表示与流行的 $SU(3)$ 、 $SU(4)$ λ 代数一致。

因此

$$T_r(H_k H_l) = \delta_{kl} T_r(H_k H_k) = \delta_{kl} \frac{1}{k(k+1)} \overbrace{(1 + \cdots + 1 + k^2)}^{k \uparrow} = \delta_{kl} \quad (7.15)$$

用现在所取表示系统, 外尔反射运算显得极为简单. 垂直根 $\alpha - \beta$ 的外尔反射可写为

$$W_{\alpha-\beta} = P_{\alpha\beta}, \quad (7.16)$$

其中 $P_{\alpha\beta}$ 为将矢量 e_α 与 e_β 置换的算符.

现在我们来叙述 Wilkinson 和 Goldhaber 的论断^[5], 即任意卡当基底可表为两 $SU(2)$ 嵌入第三生成元之差. 为了方便我们选阿贝尔规范中解前面的常数生成元是

$$\frac{\sqrt{k(k+1)}}{2} H_k. \quad (7.17)$$

考虑

$$\sum_{r=0}^{k-1} \frac{\sqrt{(k-r)(k-r+1)}}{2} H_{k-r} = T_3^{(k)} \equiv \sum_{r=0}^k \frac{k-2r}{2} H'_{r+1}. \quad (7.18)$$

因此

$$\frac{\sqrt{k(k+1)}}{2} H_k = T_3^{(k)} - T_3^{(k-1)}. \quad (7.19)$$

容易看到 $T_3^{(k)}$ 还可以表示为

$$\begin{aligned} T_3^{(k)} &= \frac{k}{2} P_{k+1,2}^{-1} (H'_1 - H'_2) P_{k+1,2} - \frac{k-2}{2} P_{k,1}^{-1} (H'_1 - H'_2) P_{k,1} \\ &\quad + \frac{k-4}{2} P_{3,1}^{-1} P_{k-1,2}^{-1} (H'_1 - H'_2) P_{k-1,2} P_{3,1} + \cdots \\ &= k P_{k+1,2}^{-1} T_3^{(1)} P_{k+1,2} + (k-2) P_{k,1}^{-1} P_{1,2}^{-1} T_3^{(1)} P_{1,2} P_{k,1} \\ &\quad + (k-4) P_{k-1,2}^{-1} P_{1,3}^{-1} T_3^{(1)} P_{1,3} P_{k-1,2} + \cdots \\ &\quad + (P_{\frac{k+3}{2},2}^{-1} P_{1,\frac{k+1}{2}}^{-1} T_3^{(1)} P_{1,\frac{k+1}{2}} P_{\frac{k+3}{2},2}, k \text{ 奇}) \\ &\quad (2P_{\frac{k+4}{2},2}^{-1} P_{1,\frac{k}{2}}^{-1} T_3^{(1)} P_{1,\frac{k}{2}} P_{\frac{k+4}{2},2}, k \text{ 偶}). \end{aligned} \quad (7.20)$$

八、 $SU(N)$ 群的倍步解

从 $SU(3)$ 和 $SU(4)$ 的例子很容易推广到普遍的 $SU(N)$ 单极. 令

$$C_k = \frac{\sqrt{k(k+1)}}{2} H_k = T_3^{(k)} - T_3^{(k-1)}, \quad k = 1, \cdots, N-1. \quad (8.1)$$

显然

$$C_1 = T_3^{(1)} = I_3, \quad C_2 = \mathbf{Y}, \quad C_3 = C. \quad (8.2)$$

对 $SU(N)$ 群主要应考虑 C_{N-1} . 其阿贝尔规范的倍步解为

$$\mathbf{A}_{\text{ss}} = m_{N-1} C_{N-1} \mathbf{A}^D, \quad (m_{N-1} \text{ 为整数}) \quad (8.3)$$

转为无弦解得

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\text{弦}} &= \mathbf{A}^{T^{(N-1)}}(\theta, m_{N-1}\varphi) - Q_{m_{N-1}}^{(N-1)} Q_{m_{N-1}}^{(N-2)-1} \mathbf{A}^{T^{(N-2)}}(\theta, m_{N-1}\varphi) Q_{m_{N-1}}^{(N-2)} Q_{m_{N-1}}^{(N-1)-1} \\ &= \frac{i}{e} ([\mathfrak{A}_3^{(N-1)}(\theta, m_{N-1}\varphi), \nabla \mathfrak{A}_3^{(N-1)}(\theta, m_{N-1}\varphi)] \\ &\quad - Q_{m_{N-1}}^{(N-1)} Q_{m_{N-1}}^{(N-2)-1} [\mathfrak{A}_3^{(N-2)}(\theta, m_{N-1}\varphi), \nabla \mathfrak{A}_3^{(N-2)}(\theta, m_{N-1}\varphi)] Q_{m_{N-1}}^{(N-2)} Q_{m_{N-1}}^{(N-1)-1}). \end{aligned} \quad (8.4)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_3^{(k)}(\theta, m\varphi) &= \sin\theta(\cos m\varphi T_1^{(k)} + \sin m\varphi T_2^{(k)}) + \cos\theta T_3^{(k)}, \quad (8.5) \\ (T_1^{(N-1)})_{\tau\tau'} &= \frac{1}{4} (\sqrt{(N+1+2\gamma)(N-1-2\gamma)} \delta_{\tau+1, \tau'} \\ &\quad + \sqrt{(N+1-2\gamma)(N-1+2\gamma)} \delta_{\tau-1, \tau'}), \\ (T_2^{(N-1)})_{\tau\tau'} &= \frac{i}{4} (\sqrt{(N+1+2\gamma)(N-1-2\gamma)} \delta_{\tau+1, \tau'} \\ &\quad - \sqrt{(N+1-2\gamma)(N-1+2\gamma)} \delta_{\tau-1, \tau'}), \\ (T_3^{(N-1)})_{\tau\tau'} &= \gamma \delta_{\tau\tau'} \\ \gamma, \gamma' &= \frac{N-1}{2}, \frac{N-3}{2}, \dots, -\frac{N-3}{2}, -\frac{N-1}{2}. \end{aligned} \quad (8.6)$$

最后,我们给出 $SU(N)$ 单极的综合解. 实际上,它也是 $SU(N)$ 最普遍的单极解. 前面讨论过的任一解都是它的一个特殊情形. 阿贝尔规范解是

$$\mathbf{A}_{\text{弦}} = \sum_{k=1}^{N-1} m_k C_k \mathbf{A}^D, \quad (8.7)$$

无发散弦解是

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\text{弦}} &= \mathbf{A}^{T^{(N-1)}}(\theta, m_{N-1}\varphi) + Q_{m_{N-1}}^{(N-1)} Q_{m_{N-1}}^{(N-2)-1} (\mathbf{A}^{T^{(N-2)}}(\theta, m_{N-2}\varphi) \\ &\quad - \mathbf{A}^{T^{(N-2)}}(\theta, m_{N-1}\varphi)) Q_{m_{N-1}}^{(N-2)} Q_{m_{N-1}}^{(N-1)-1} + Q_{m_{N-1}}^{(N-1)} Q_{m_{N-1}}^{(N-2)-1} Q_{m_{N-2}}^{(N-2)} Q_{m_{N-2}}^{(N-3)-1} \\ &\quad \cdot (\mathbf{A}^{T^{(N-3)}}(\theta, m_{N-3}\varphi) - \mathbf{A}^{T^{(N-3)}}(\theta, m_{N-2}\varphi)) Q_{m_{N-2}}^{(N-3)} Q_{m_{N-2}}^{(N-2)-1} Q_{m_{N-1}}^{(N-2)} Q_{m_{N-1}}^{(N-1)-1} \\ &\quad + \dots + Q_{m_{N-1}}^{(N-1)} Q_{m_{N-1}}^{(N-2)-1} \dots Q_{m_2}^{(2)} Q_{m_2}^{(1)-1} (\mathbf{A}^{T^{(1)}}(\theta, m_1\varphi) - \mathbf{A}^{T^{(1)}}(\theta, m_2\varphi)) \\ &\quad \cdot Q_{m_2}^{(1)} Q_{m_2}^{(2)-1} \dots Q_{m_{N-1}}^{(N-2)} Q_{m_{N-1}}^{(N-1)-1}. \end{aligned} \quad (8.8)$$

原则上 $T^{(1)}, T^{(2)}, \dots, T^{(N-2)}$ 均可通过 $T^{(N-1)}$ 表示, 上述表式也就可以像 $SU(3)$ 和 $SU(4)$ 那样具体计算出来.

仿第五节,我们还可以把最普遍形式的角动量写出如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \mathbf{L} + \mathfrak{A}^{(N-1)}(\theta, m_{N-1}\varphi) + Q_{m_{N-1}}^{(N-1)} Q_{m_{N-1}}^{(N-2)-1} (\mathfrak{A}^{(N-2)}(\theta, m_{N-2}\varphi) \\ &\quad - \mathfrak{A}^{(N-2)}(\theta, m_{N-1}\varphi)) Q_{m_{N-1}}^{(N-2)} Q_{m_{N-1}}^{(N-1)-1} + \dots + Q_{m_{N-1}}^{(N-1)} Q_{m_{N-1}}^{(N-2)-1} \\ &\quad \dots Q_{m_2}^{(2)} Q_{m_2}^{(1)-1} (\mathfrak{A}^{(1)}(\theta, m_1\varphi) - \mathfrak{A}^{(1)}(\theta, m_2\varphi)) Q_{m_2}^{(1)} Q_{m_2}^{(2)-1} \dots Q_{m_{N-1}}^{(N-2)} Q_{m_{N-1}}^{(N-1)-1}. \end{aligned} \quad (8.9)$$

在本工作的进行中得到成都工学院郑希特同志的支持,谨致谢忱。

参 考 文 献

- [1] G. 'tHooft, *Nucl. Phys.*, **B79**(1974), 276;
A. Поляков, Письма в ЖЭТФ, **20** (1974), 430.
- [2] 王永康、张高有、侯伯宇, 西北大学学报(自然科学), 1976 年 2—3 期 21 页.
- [3] 侯伯宇, 西北大学基本粒子研究报告.
- [4] A. S. Goldhaber & D. Wilkinson, *Nucl. Phys.*, **B114** (1976), 317.
- [5] D. Wilkinson, A. S. Goldhaber, *Phys. Rev.*, **D16** (1977), 1221.
- [6] 侯伯宇、段一士、葛墨林, 物理学报, **25** (1976), 451.
侯伯宇, 物理学报, **26** (1977), 83.
- [7] J. Arafune, P. G. O. Freund, C. J. Goebel, *J. Math. Phys.*, **16** (1975), 433.
- [8] 侯伯宇, 复旦大学学报(自然科学) **3** (1977), 23.
- [9] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.*, **A133** (1931), 60; *Phys. Rev.*, **74** (1948), 817.
- [10] 吴大峻、杨振宁 *Phys. Rev.*, **D12** (1975), 3845; 杨振宁, 夏威夷会议报告: 规范场, 1975.
- [11] 王 珮、马宗复, 四川大学学报(自然科学) 1965 年 1 期 53 页.
- [12] E. Corrigan, D. I. Olive, D. B. Fairlie, J. Nuyts, *Nucl. Phys.*, **B106** (1976), 475.
- [13] Y. Brihaye, J. Nuyts, *J. Math. Phys.*, **18** (1977), 2177.
- [14] 见如: G. Racah, *Group Theory and Spectroscopy*, Princeton., 1951. 中译: 拉卡著群论和核谱(梅向明译)高教出版社 1959.
B. D. Judd, *Operator Techniques in Atomic Spectroscopy*, MacGraw-Hill Book Company, Inc. 1963.

THE MULTISYNCHRO-SPHERICAL SOLUTIONS OF THE $SU(N)$ GAUGE THEORY

WANG PEI

(*Szechuan University*)

HOU BO-YU

(*Northwest University*)

ABSTRACT

We study the monopole solutions of the $SU(N)$ gauge group systematically, generalize the current synchro-spherical symmetrical monopole to the multi synchro-spherical symmetrical case, and give the complete classification of the monopole solutions. As examples, we have calculated the $SU(3)$ and $SU(4)$ monopoles in detail, and discuss some problems such as angular momenta and topological quantum numbers.