第 4 卷 第 2 期　　高能物理与核物理　　Vol. 4, No. 2
1980 年 3 月　　PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS　　March, 1980

怎样由 Bethe-Salpeter 类型方程推导准势方程?
——对于 V. A. Rizov, I. T. Todorov 所做推导的一点注记

阮图南　　朱熙泉　何祚庥
（中国科学技术大学）（中国科学院理论物理研究所）

摘　要

指出 Zirov 和 Todorov 从 B-S 型方程推导准势方程的一个错误．并建议了一个新的推导方法．

多年以来，有不少工作尝试从四维 Bethe-Salpeter 方程出发，推导三维积分方程的准势方程．1955 年 W. Królikowski, J. Rzewuski[1] 从微分积分型 B-S 方程推导了一个包含瞬时势的三维方程．1963 年 A. A. Logunov, A. N. Tavkhelide[2] 利用二时 B-S 格林函数定义了一个准势展开式，借此得到一个三维散射振幅的积分方程．以后，R. Blankenbecler, R. Sugar[3] 和 F. Gross[4] 定义了其它三维格林函数来约化 B-S 方程． 1975 年 V. A. Rizov, I. T. Todorov[5] 企图在座标空间给出一个新的推导，然而这一推导是错误的．本文将指出 [5] 的错误，并给了一个从 B-S 方程到等时波函数所满足的方程的严格推导．

一、关于 V. A. Rizov, I. T. Todorov 一文中推导的错误

文献 [5] 的推导是从下述 B-S 类型方程

$$\psi(x_1x_2) = \psi_0(x_1x_2) + \int G_0^R(x_1x_2y_1y_2)U(y_1y_2;\ z_1z_2)\psi(z_1z_2)d^4y_1d^4y_2d^4z_1d^4z_2 \tag{1}$$

出发的，其中

$$\psi(x_1x_2) = \langle 0|\psi_1(x_1)\psi_2(x_2)|s\rangle, \tag{2}$$

$$\psi_0(x_1x_2) = u_1(\boldsymbol{q}_1)u_2(\boldsymbol{q}_2)\exp(-iq_1x_1 - iq_2x_2), \tag{3}$$

$$G_0^R(x_1x_2;\ y_1y_2) = i^{-1}S_1^R(x_1 - y_1)\beta^{(1)}S_2^R(x_2 - y_2)\beta^{(2)}. \tag{4}$$

其中 $S_\alpha^R(x_\alpha - y_\alpha)$ 是自由 Dirac 推迟 Green 函数，具有下述性质:

本文 1979 年 2 月 23 日收到.

$$u_\alpha(\boldsymbol{q}_\alpha)e^{-iq_\alpha z_\alpha} = -i\int S_\alpha^R(z_\alpha - \zeta_\alpha)\beta^{(\alpha)}u_\alpha(\boldsymbol{q}_\alpha)e^{-iq_\alpha\zeta_\alpha}d^3\zeta_\alpha; \tag{5}$$

$$(\text{当 } z_\alpha^0 > \zeta_\alpha^0,\ \alpha = 1, 2)$$

$$S_\alpha^R(x-y) = -i\int S_\alpha^R(x-z)\beta^{(\alpha)}S_\alpha^R(z-y)d^3z; \tag{6}$$

$$(\text{当 } x^0 > z^0 > y^0,\ \alpha = 1,2)$$

注意 (5) 和 (6) 仅对三维空间积分，时间变量 ζ_α^0 和 z_α^0 是一自由参量. 可以利用这一性质把四维积分变成三维积分.

现在，令 (1) 双方取等时，

$$\varphi(t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2) = \varphi_0(t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2) + \int G_0^R(t\boldsymbol{x}_1t\boldsymbol{x}_2;\ y_1y_2)U(y_1y_2;\ z_1z_2)\psi(z_1z_2)d^4y_1d^4y_2d^4z_1d^4z_2, \tag{7}$$

其中

$$\begin{aligned}\varphi(t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2) &= \psi(x_1x_2)|_{x_1^0=x_2^0=t},\\ \varphi_0(t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2) &= \psi_0(x_1x_2)|_{x_1^0=x_2^0=t}.\end{aligned} \tag{8}$$

把对 $y_1^0y_2^0$ 的积分分成 $t > y_1^0 > y_2^0$ 和 $t > y_2^0 > y_1^0$ 的两个区间. 并应用公式 (6)

$$\begin{aligned}&\int G_0^R(t\boldsymbol{x}_1t\boldsymbol{x}_2;\ y_1y_2)U(y_1y_2;\ z_1z_2)dy_1^0dy_2^0\\ &= i^2\Big\{\int S_1^R(t-y_1^0\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{y}_1)\beta^{(1)}S_2^R(t-y_1^0\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{u}_2)\beta^{(2)}S_2^R(y_1^0-y_2^0;\ \boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{y}_2)\\ &\quad\times\beta^{(2)}U(y_1y_2;\ z_1z_2)dy_1^0dy_2^0d^3u_2\\ &\quad+\int S_1^R(t-y_2^0\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{u}_1)\beta^{(1)}S_1^R(y_2^0-y_1^0\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{y}_1)\beta^{(1)}S_2^R\\ &\quad\times(t-y_2^0\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{y}_2)\beta^{(2)}U(y_1y_2z_1z_2)dy_1^0dy_2^0d^3u_1\Big\}.\end{aligned} \tag{9}$$

再引入等时自由 Green 函数

$$g_0^R(t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2) = -iS_1^R(t\boldsymbol{x}_1)\beta^{(1)}S_2^R(t\boldsymbol{x}_2)\beta^{(2)} \tag{10}$$

和下述定义

$$\begin{aligned}U'(t'\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_2;\ z_1z_2) &= -i\int S_2^R(t'-t''\boldsymbol{y}_2-\boldsymbol{u}_2)\beta^{(2)}U(t'\boldsymbol{y}_1t''u_2;\ z_1z_2)dt''d^3u_2\\ &\quad-i\int S_1^R(t'-t''\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{u}_1)\beta^{(1)}U(t''\boldsymbol{u}_1t'y_2;\ z_1z_2)dt''d^3u_1.\end{aligned} \tag{11}$$

式 (9) 的二重时间积分就变成一重了，即有

$$\begin{aligned}&\int G_0^R(t\boldsymbol{x}_1t\boldsymbol{x}_2;\ y_1y_2)U(y_1y_2z_1z_2)dy_1^0dy_2^0\\ &= \int g_0^R(t-t',\ \boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{y}_2)U'(t'\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_2;\ z_1z_2)dt'.\end{aligned} \tag{12}$$

如果能把 (7) 式中 $z_1^0z_2^0$ 的积分作类似处理，使将 $\psi(z_1z_2)$ 也能换成等时，证明就完成了. 为此，文献 [5] 引入下述变换

$$\begin{aligned}&\int U'(\cdots;\ z_1z_2)\psi(z_1z_2)d^4z_1d^4z_2\\ &= \int U'(\cdots;\ z_1z_2)\psi_0(z_1z_2)d^4z_1d^4z_2\end{aligned}$$

$$+\int U'(\cdots;\, z_1z_2)G_0^R(z_1z_2z_1'z_2')U(z_1'z_2';\, z_1''z_2'')\psi(z_1''z_2'')d^4z_1d^4z_2d^4z_1'd^4z_2'd^4z_1''d^4z_2''. \quad (13)$$

企图对 $z_1'^0z_2'^0$ 的积分应用前述处理而得到

$$\int G_0^R(z_1z_2z_1'z_2')U(z_1'z_2'z_1''z_2'')dz_1'^0dz_2'^0$$

$$=\int G_0^R(z_1z_2;\, z_1'^0\boldsymbol{z}_1'\boldsymbol{z}_2')U'(z_1^{0'}\boldsymbol{z}_1'\boldsymbol{z}_2';\, z_1''z_2'')dz_1^{0'}. \quad (14)$$

然而，这一步骤是完全错误的．(14) 左方的积分区间是 $z_1^0 > z_1^{0'}$，$z_2^0 > z_2^{0'}$；(14) 右端的积分区间按照 (11) 是 $z_1^0, z_2^0 > z_1^{0'} > z_2^{0'}$ 和 $z_1^0, z_2^0 > z_2^{0'} > z_1^{0'}$；所以 (14) 右端的积分区域比左端少了一大块！即 $z_1^0 > z_1^{0'} > z_2^0 > z_2^{0'}$ 和 $z_2^0 > z_2^{0'} > z_1^0 > z_1^{0'}$ 的区间被遗漏了．因而，在 (14) 的基础上再对 (13) 作进一步变换，使将 $\psi(z_1z_2)$ 变成 $\varphi(t\boldsymbol{z}_1\boldsymbol{z}_2)$ 的证明是不成立的．

二、一个新的三维形式的等时方程

B-S 积分方程 (1) 的倒易方程是

$$\psi(x_1x_2) = \psi_0(x_1x_2)$$
$$+\int G_0^R(x_1x_2y_1y_2)W(y_1y_2;\, z_1z_2)\psi_0(z_1z_2)d^4y_1d^4y_2d^4z_1d^4z_2. \quad (15)$$

倒易核 W 与 B-S 核 U 之间满足积分方程

$$W(x_1x_2x_1'x_2') = U(x_1x_2x_1'x_2')$$
$$+\int U(x_1x_2;\, y_1y_2)G_0^R(y_1y_2;\, z_1z_2)W(z_1z_2;\, x_1'x_2')d^4y_1d^4y_2d^4z_1d^4z_2. \quad (16)$$

应用 (5) 式有

$$\psi_0(x_1x_2) = -i\int G_0^R(x_1x_2t'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2')\varphi_0(t'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2')d^3x_1'd^3x_2'\big|_{t'\to-\infty}. \quad (17)$$

把它代入 (15)，并双方取等时．则有

$$\varphi(t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2) = \varphi_0(t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2)$$
$$+\int(-i)G_0^R(t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2;\, y_1y_2)W(y_1y_2z_1z_2)G_0^R(z_1z_2t'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2')\varphi_0(t'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2')$$
$$d^4y_1d^4y_2d^4z_1d^4z_2d^3x_1'd^3x_2'\big|_{t'\to-\infty}. \quad (18)$$

定义等时积分核 K：

$$\int G_0^R(t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2;\, y_1y_2)W(y_1y_2z_1z_2)G_0^R(z_1z_2;\, t'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2')d^4y_1d^4y_2d^4z_1d^4z_2$$
$$=\int g_0^R(t-y_0,\, \boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{y}_1,\, \boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{y}_2)K(y_0\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_2;\, z_0\boldsymbol{z}_1\boldsymbol{z}_2)g_0^R(z_0-t';\, \boldsymbol{z}_1-\boldsymbol{x}_1',\, \boldsymbol{z}_2-\boldsymbol{x}_2')$$
$$d^3y_1d^3y_2d^3z_1d^3z_2dy_0dz_0. \quad (19)$$

其中 g_0^R 已由 (10) 定义，满足下述方程：

$$\left[\vec{H}^{(1)}(\boldsymbol{x}_1) + \vec{H}_2(\boldsymbol{x}_2) - i\frac{\vec{\partial}}{\partial t}\right]g_0^R(t-t',\, \boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_1',\, \boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_2')$$

$$= g_0^R(t-t', \boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_2')\left[\overleftarrow{H}_1(\boldsymbol{x}_1')+\overleftarrow{H}_2(\boldsymbol{x}_2')+i\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial t'}\right]$$
$$= \delta(t-t')\delta(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_1')\delta(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_2'). \tag{20}$$

而

$$\begin{aligned}\overrightarrow{H}(\boldsymbol{x}) &= -i\boldsymbol{\alpha}\cdot\overrightarrow{\nabla}+\beta m,\\ \overleftarrow{H}(\boldsymbol{x}) &= i\boldsymbol{\alpha}\cdot\overleftarrow{\nabla}+\beta m.\end{aligned}\tag{21}$$

应用 (20) 从 (19) 可以解出 K

$$K(t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2;\ t'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2') = \left[\overrightarrow{H}^{(1)}(\boldsymbol{x}_1)+\overrightarrow{H}_2(\boldsymbol{x}_2)-i\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial t}\right]$$
$$\times\int G_0^R(t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2;\ y_1y_2)W(y_1y_2z_1z_2)G_0^R(z_1z_2t'\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2)d^4y_1d^4y_2d^4z_1d^4z_2$$
$$\times\left[\overleftarrow{H}_1(x_1')+\overleftarrow{H}_2(x_2')+i\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial t'}\right]$$
$$= -\int[\delta(t-y_1^0)\delta(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{y}_1)S_2^R(t-y_2^0;\ \boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{y}_2)\beta^{(2)}$$
$$+\delta(t-y_2^0)\delta(x_2-\boldsymbol{y}_2)S_1^R(t-y_1^0;\ \boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{y}_1)\beta^{(1)}]$$
$$W(y_1y_2;z_1z_2)\times[\delta(z_1^0-t')\delta(\boldsymbol{z}_1-\boldsymbol{x}_1')S_2^R(z_2^0-t';\boldsymbol{z}_2-\boldsymbol{x}_2')$$
$$+\delta(z_2^0-t')\delta(\boldsymbol{z}_2-\boldsymbol{x}_2')S_1^R(z_1^0-t';\boldsymbol{z}_1-\boldsymbol{x}_1')\beta^{(1)}]$$
$$\times d^4y_1d^4y_2d^4z_1d^4z_2. \tag{22}$$

将 (19) 代入 (18) 得到

$$\varphi(t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2) = \varphi_0(t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2)$$
$$+\int g_0^R(t-y_0\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{y}_2)K(y_0\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_2;\ z_0\boldsymbol{z}_1\boldsymbol{z}_2)\varphi_0(z_0\boldsymbol{z}_1\boldsymbol{z}_2)$$
$$dy_0dz_0d^3y_1d^3y_2d^3z_1d^3z_2. \tag{23}$$

其中最后一步应用了 (17) 的等时形式，即

$$\varphi_0(t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2) = -i\int g_0^R(t-t', \boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_2')\varphi_0(t'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2')d^3x_1'd^3x_2'\big|_{t'\to-\infty}$$

公式 (23) 已经是一个完全的单时方程了，把它转换成积分方程的形式的步骤是例行的，即有

$$\varphi(t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2) = \varphi_0(t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2)$$
$$+\int g_0^R(t-y_0\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{y}_2)V(y_0\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_2;\ z_0\boldsymbol{z}_1\boldsymbol{z}_2)\varphi(z_0\boldsymbol{z}_1\boldsymbol{z}_2)$$
$$\cdot dy_0dz_0d^3y_1d^3y_2d^3z_1d^3z_2, \tag{24}$$

$$V(t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2;\ t'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2') = K(t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2;\ t'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2')$$
$$-\int K(t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2y_0\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_2)g_0^R(y_0-z_0\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{y}_2-\boldsymbol{z}_2)$$
$$\cdot V(z_0\boldsymbol{z}_1\boldsymbol{z}_2;\ t'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2')dy_0dz_0d^3y_1d^3y_2d^3z_1d^3z_2. \tag{25}$$

和 (24) 相应的微分积分方程是

$$\left[H^{(1)}(\boldsymbol{x}_1)+H^{(2)}(x_2)-i\frac{\partial}{\partial t}\right]\varphi(t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2) = \int V(t\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2;\ y_0\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_2)\varphi(y_0\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_2)d^3y_1d^3y_2dy_0. \tag{26}$$

由上可见，从 B-S 方程出发得到准势方程的重要步骤是从 B-S 方程的倒易方程出发. 在那里方程右端只有 ψ_0，这就可能应用自由推迟 Green 函数的性质，使第四度时间变量成为自由参量，从而使积分核 $G_0^R W G_0^R$ 左右两端时间都可取作等时. 并由此得到(23)或(24).

由四维积分形式的 B-S 方程转换成三维积分形式的方程可以有许多不同的方式. 但是不论怎样转换，三维积分形式方程中的积分核必为二重级数展开式. 如在本文所得的结果中，U 是一系列不可约图形的总和，W 是由 G_0^R 和 U 形成的级数，它的三维形式是

$$K = g_0^{R^{-1}} \widetilde{G_0^R W G_0^R} g_0^{R^{-1}}$$

$$= g_0^{R^{-1}} \widetilde{G_0^R U G_0^R} g_0^{R^{-1}} + g_0^{R^{-1}} \widetilde{G_0^R U G_0^R U G_0^R} g_0^{R^{-1}} + \cdots, \tag{27}$$

其中～表示等时符号. 这又是一重级数. 因而 V 就表现为一系列的多重级数. 而 Rizov 和 Todorov 给出的准势却只是一个单重叙列. 其实四维积分形式的 B-S 方程本身就是由一系列不可约图和一维时间积分的双重叙列所组成. 除非人们能在数学变换中将其中某些叙列和求出来，否则仅由不同形式的变换是不可能由四重积分简单地换成三重积分的.

把式(22)同文献[5]中的(85)进行比较，可以发现(22)用 W 代替了(85)中的 U，亦即文献[5]的"准势"只是正确准势表达式中的首项. 因而在最低级近似下，他们的准势的应用仍能获得若干正确结果. 但在高一级近似中式(85)就不再能应用.

进一步讨论(27)的高级修正或部份求和对准势所产生的影响将是一个有兴趣的问题.

参 考 文 献

[1] W. Krolikowshi, J. Rzewuski, *Nuovo. Cimento*, **2**(1955), 203; **3**(1956), 260; **4**(1956), 975.
[2] A. A. Logunov, A. N. Tavkhelide, *Nuovo. Cimento*, **29**(1963), 380; **30**(1963), 134.
[3] R. Blankenbecler, R. Sugar, *Phys. Rev.*, **142**(1966), 1051.
[4] F. Gross, *Phys. Rev.*, **186**(1969), 1448.
[5] V. A. Rizov, I. T. Todorov, *Sov. Jour. Part. Nucl.*, **6**(1975), 269.

DERIVATION OF A QUASIPOTENTIAL EQUATION FROM AN EQUATION OF THE BETHE-SALPETER TYPE

RUAN TU-NAN
(*University of Science and Technology of China*)
ZHU XI-QUAN HE ZHO-XIU
(*Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

A mistake in derivation of a quasipotential equation from an equation of the B-S Type given by Zirov and Todorov has been pointed out and a new derivation is suggested.