第4卷 第3期 高能物理与核物理 Vol. 4, No. 3
1980年5月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS May, 1980

光子量子化与双鬼态

伍 经 元
(中国科学院高能物理研究所)

摘 要

本文利用 Lagrange 乘子方法讨论零质量矢量场的量子化. 在三维动量空间给出场方程的严格解, 证明双鬼态的存在, 其中之一不是哈密顿量的本征态, 它可以利用边界条件去掉. 如果矢量场与守恒流耦合的话, 其余的鬼态没有观察效应. 因此, 这是个光子场论. Nakanishi[2,3] 对此问题曾有过讨论, 但他的分析含混不清. 本文最后讨论了这个方法对自旋 3/2 的零质量场的推广.

一、引 言

当质量 $m \to 0$ 时, Dirac 方程变成描写自旋 $J=\frac{1}{2}$ 的中微子场方程. 但对一般 $J>\frac{1}{2}$ 的带质量场论, 当 $m \to 0$ 时, 是发散的. 这是因为 $J>\frac{1}{2}$ 时, 有质量和无质量的场量的自由度不一样. 如果理论中包括一些鬼态, 给出一些约束条件, 当 $m \to 0$ 时能把多余的自由度消去, 这样的理论在 $m \to 0$ 时就不会发散, 也许就可以用来描写高自旋的零质量粒子如光子和 $J=3/2$ 的中微子等等.

对带质量 m 的矢量场 ϕ_μ, Noboru Nakanishi[1] 曾成功地提出了这类的量子场论. 他所用的自由拉氏函数密度是

$$\mathscr{L}_0 = -\frac{1}{4}(\partial_\mu\phi_\nu - \partial_\nu\phi_\mu)(\partial_\mu\phi_\nu - \partial_\nu\phi_\mu) - \frac{m^2}{2}\phi_\mu\phi_\mu + \xi\chi\partial_\mu\phi_\mu, \tag{1.1}$$

其中 χ 为 Lagrange 乘子场, ξ 为一带质量量纲的 C 数. 这个理论中, Lagrange 条件

$$\partial_\mu\phi_\mu = 0 \tag{1.2}$$

是个运动方程. ϕ_μ 的对易子和传播子为

$$[\phi_\mu(x), \phi_\nu(y)] = -i\left(\delta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu\partial_\nu}{m^2}\right)\Delta(x-y, m^2) - i\frac{\partial_\mu\partial_\nu}{m^2}D(x-y), \tag{1.3}$$

$$\langle 0|T\phi_\mu(x)\phi_\nu(y)|0\rangle = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu\partial_\nu}{m^2}\right)\Delta_F(x-y, m^2) + \frac{\partial_\mu\partial_\nu}{m^2}D_F(x-y), \tag{1.4}$$

其中

$$\Delta(x, m^2) = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\sin\frac{\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}\,t}{\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}},$$

本文 1978 年 12 月 13 日收到.

$$D(x)=\Delta(x,0),$$
$$\Delta_F(x,m^2)=-i\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{ip\cdot x}}{p^2+m^2-i\epsilon},$$
$$D_F(x)=\Delta_F(x,0).\tag{1.5}$$

显然,当 $m\to 0$ 时,(1.3) 与 (1.4) 式都不发散,而且还趋于 Landau 规范的光子的对易子和传播子与 (1.2) 一致. 但当 m 严格等于零时,(1.3) 与 (1.4) 式都是不存在的. Nakanishi 所给出的平面波展开式

$$\phi_\mu(x)=-\frac{\xi}{m^2}\partial_\mu\chi(x)+\cdots,$$
$$\chi(x)=\frac{m}{\xi}\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{1}{\sqrt{2k_0}}(b_{\boldsymbol{k}}e^{ik\cdot x}+b_{\boldsymbol{k}}^\dagger e^{-ik\cdot x}),$$
$$k_0=|\boldsymbol{k}|\tag{1.6}$$

这时候也是不存在的. 因此,$m=0$ 时的粒子态与 $m\neq 0$ 时很不一样. (1.1) 式能否描写光子场还有待进一步研究.

本文将讨论质量严格为零时 (1.1) 式所描述的场论,证明它的确是个光子理论. 这个问题 Nakanishi 也曾有所讨论[2,3]. 他给出的平面波展开为

$$\phi_\mu(x)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^{3/2}}\theta(k_0)[a_\mu(k)e^{ik\cdot x}+a_\mu^\dagger(k)e^{-ik\cdot x}],$$
$$\chi(x)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^{3/2}}\theta(k_0)[b(k)e^{ik\cdot x}+b^\dagger(k)e^{-ik\cdot x}].\tag{1.7}$$

为了满足运动方程,要规定只有在光锥上 $a_\mu(k)$ 与 $b(k)$ 才不为零,但它们却不可能单包含一个 $\delta(k^2)$ 这么简单. 他得到的对易关系为

$$[a_\mu(k),a_\nu^\dagger(k')]=\delta^4(k-k')[\delta_{\mu\nu}\delta(k^2)-k_\mu k_\nu\delta'(k^2)],$$
$$[a_\mu(k),b^\dagger(k')]=i\xi^{-1}\delta^4(k-k')k_\mu\delta(k^2),\tag{1.8}$$

其他都对易. 根据 (1.7) 与 (1.8),$a_\mu(k)$, $a_\mu^\dagger(k)$, $b(k)$, $b^\dagger(k)$ 的意义很不清楚,并不能像他那样轻率地当作湮灭算符和产生算符来使用. 因此整个问题有重新讨论的必要.

本文给出 $\phi_\mu(x)$ 与 $\chi(x)$ 的三维动量的平面波展开式,证明系数能视为湮灭算符和产生算符,推出的 ϕ_μ 的对易关系和传播子确实等于 (1.3) 和 (1.4) 式 $m\to 0$ 的极限. 带质量的拉氏函数 (1.1) 有一负度规粒子,当 $m=0$ 时,它与 ϕ_μ 的纵向分量简并成为两个不正交的零度规粒子[4]. 这对双鬼粒子态中,有一个不是哈密顿量的本征态,假如这种粒子不包含在始态中,它将永远不会出现在末态中. 同时,如果 ϕ_μ 只与守恒流耦合,其他一个零度规粒子也不会被产生出来. 剩下来的自由度恰好就是光子的自由度,运动方程的期望值就是 Maxwell 方程,因此理论是描写光子的. 最后我们证明散射矩阵是幺正的. 在小结中,我们讨论了这个方法对自旋3/2的零质量场的推广.

二、量子化的复习

从自由拉氏函数密度

$$\mathscr{L}_0 = -\frac{1}{4}(\partial_\mu\phi_\nu - \partial_\nu\phi_\mu)(\partial_\mu\phi_\nu - \partial_\nu\phi_\mu) + \xi\chi\partial_\mu\phi_\mu \tag{2.1}$$

出发，得到运动方程

$$\partial_\mu\phi_\mu = 0, \tag{2.2}$$

$$\Box\phi_\mu = \xi\partial_\mu\chi, \tag{2.3}$$

于是便有

$$\Box\chi = 0. \tag{2.4}$$

我们希望 $\mathscr{L}_0$ 描写自由光子场，因此最终要使 χ 的期望值永远为零(第五节).

ϕ_i 与 ϕ_4 的正则动量分别为

$$\pi_i = \dot{\phi}_i - i\nabla_i\phi_4, \tag{2.5}$$

$$\pi_4 = -i\xi\chi. \tag{2.6}$$

哈密顿密度等于

$$\mathscr{H}_0 = \frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}^2 + i\boldsymbol{\pi}\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi_4 - i\pi_4\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\phi} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\phi})^2. \tag{2.7}$$

利用正则量子化方法，得到

$$[\phi_\mu(\boldsymbol{x}, t), \phi_\nu(\boldsymbol{x}', t)] = 0, \tag{2.8}$$

$$[\pi_\mu(\boldsymbol{x}, t), \pi_\nu(\boldsymbol{x}', t)] = 0, \tag{2.9}$$

$$[\phi_\mu(\boldsymbol{x}, t), \pi_\nu(\boldsymbol{x}', t)] = i\delta_{\mu\nu}\delta^3(x - x'). \tag{2.10}$$

哈密顿方程为

$$\dot{\mathscr{F}}(x) = i\int d^3x'[\mathscr{H}(\boldsymbol{x}', t), \mathscr{F}(\boldsymbol{x}, t)]. \tag{2.11}$$

$\mathscr{F}(x) = \phi_i(x)$ 给出 π_i 的定义，$\mathscr{F}(x) = \phi_4(x)$ 给出 $\partial_\mu\phi_\mu = 0$，$\mathscr{F}(x) = \pi_\mu(x)$ 给出 $\Box\phi_\mu = \xi\partial_\mu\chi$. 因此正则量子化与运动方程是自洽的.

三、动量空间的展开

可以把 ϕ_μ 分为横向部分 $\phi_\mu^\perp$ 和纵向(及标量)部分 ϕ_μ^l，

$$\phi_\mu = \phi_\mu^\perp + \phi_\mu^l, \tag{3.1}$$

它们分别满足条件

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\phi}^\perp = 0, \quad \phi_0^\perp = 0, \tag{3.2}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\phi}^l = 0. \tag{3.3}$$

显然 $\phi_\mu^\perp$ 自动满足 Lorentz 条件. 拉氏函数密度 (2.1) 式中的 Lagrange 乘子项变为

$$\xi\chi\partial_\mu\phi_\mu = \xi\chi\partial_\mu\phi_\mu^l. \tag{3.4}$$

同时，由于 (3.2) 与 (3.3)，横光子与纵光子的交叉项 $(\partial_\mu\phi_\nu^\perp - \partial_\nu\phi_\mu^\perp)(\partial_\mu\phi_\nu^l - \partial_\nu\phi_\mu^l)$ 不给贡献. 因此，通过变分得出的运动方程为

$$\Box\phi_\mu^\perp = 0, \tag{3.5}$$

$$\Box\phi_\mu^l = \xi\partial_\mu\chi, \tag{3.6}$$

$$\partial_\mu\phi_\mu^l = 0. \tag{3.7}$$

$\phi^{\perp}_{\mu}$ 并不与 ϕ^{l}_{μ} 和 χ 耦合，它的正则量子化为

$$[\phi^{\perp}_{i}(\boldsymbol{x},t),\dot{\phi}^{\perp}_{j}(\boldsymbol{x}',t)] = i(\delta_{ij}-\nabla_i\nabla_j\nabla^{-2})\delta^3(x-x'), \tag{3.8}$$

并与 ϕ^{l}_{μ} 和 χ 有关的场量对易．因此，在动量空间，$\phi^{\perp}_{i}$ 可以用平面波展开，量子化后就是一般的横光子．对此，我们不再作讨论．

对于 ϕ^{l}_{μ} 和 χ，从正则量子化条件得到如下的等时对易关系

$$[\phi^{l}_{i}(\boldsymbol{x},t),\dot{\phi}^{l}_{j}(\boldsymbol{x}',t)] = i\nabla_i\nabla_j\nabla^{-2}\delta^3(x-x'),\quad [\chi(\boldsymbol{x},t),\dot{\phi}^{l}_{\mu}(\boldsymbol{x}',t)] = \xi^{-1}\delta_{\mu 4}\delta^3(x-x'),$$
$$[\dot{\phi}^{l}_{i}(\boldsymbol{x},t),\chi(\boldsymbol{x}',t)] = -i\xi^{-1}\nabla_i\delta^3(x-x'),\quad [\phi^{l}_{0}(\boldsymbol{x},t),\dot{\phi}^{l}_{j}(\boldsymbol{x}',t)] = 0. \tag{3.9}$$

χ 可以按平面波展开，但 ϕ^{l}_{μ} 却不能．我们求出 (3.6) 与 (3.7) 的精确解为

$$\chi(x) = \sum_{\boldsymbol{k}}\frac{1}{\sqrt{2k}}[b_{\boldsymbol{k}}e^{ik\cdot x}+b^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}e^{-ik\cdot x}], \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}\phi^{l}_{i}(x) = \sum_{\boldsymbol{k}}\frac{k_i}{\xi\sqrt{2k}}\Big\{&\Big[a_{\boldsymbol{k}}+b_{\boldsymbol{k}}\Big(\frac{i\xi^2}{4k^2}+\frac{\xi^2 t}{2k}\Big)\Big]e^{ik\cdot x}\\ &+\Big[a^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}+b^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}\Big(-\frac{i\xi^2}{4k^2}+\frac{\xi^2 t}{2k}\Big)\Big]e^{-ik\cdot x}\Big\},\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}\phi^{l}_{0}(x) = \sum_{\boldsymbol{k}}\frac{k}{\xi\sqrt{2k}}\Big\{&\Big[a_{\boldsymbol{k}}+b_{\boldsymbol{k}}\Big(-\frac{i\xi^2}{4k^2}+\frac{\xi^2 t}{2k}\Big)\Big]e^{ik\cdot x}\\ &+\Big[a^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}+b^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}\Big(\frac{i\xi^2}{4k^2}+\frac{\xi^2 t}{2k}\Big)\Big]e^{-ik\cdot x}\Big\},\end{aligned} \tag{3.12}$$

其中 $k=k_0=|\boldsymbol{k}|$．这个解看来有点可怕[1)]，尤其特别的是出现时间 t 的线性项．但是，利用量子化对易关系 (3.9)，得到非常简单的结果

$$[a_{\boldsymbol{k}},b^{\dagger}_{\boldsymbol{k}'}] = i\delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'},\quad [a_{\boldsymbol{k}},a^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}]=0,\quad [b_{\boldsymbol{k}},b^{\dagger}_{\boldsymbol{k}'}]=0,\quad [a_{\boldsymbol{k}},b_{\boldsymbol{k}'}]=0. \tag{3.13}$$

要是把 (3.11) 与 (3.12) 式中的时间线性项改为

$$kt\to\frac{1}{2}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+kt), \tag{3.14}$$

得到的 $\phi^{l}_{\mu}(x)$ 也是方程 (3.6) 的通解，但它不再是三维动量的平面波展开解．这个解在时空方面看来比较对称，可是得到的对易关系和 (3.13) 一样，只不过推算复杂得多．

利用展开式 (3.10)—(3.12) 与对易关系 (3.13) 再加上 $\phi^{\perp}_{\mu}$ 的贡献，不难推出在两个时空点的场的对易关系

$$[\phi_\mu(x),\phi_\nu(x')] = -i\delta_{\mu\nu}D(x-x')-i\partial_\mu\partial_\nu E(x-x'), \tag{3.15}$$

$$[\phi_\mu(x),\chi(x')] = -i\xi^{-1}\partial_\mu D(x-x'), \tag{3.16}$$

$$[\chi(x),\chi(x')] = 0, \tag{3.17}$$

其中

$$E(x) = -\frac{\partial}{\partial m^2}\Delta(x,m^2)\big|_{m^2=0}, \tag{3.18}$$

并满足方程

$$\Box E(x) = D(x). \tag{3.19}$$

上面的对易关系都是协变的．(3.15) 式刚好就是 (1.3) 式 $m\to 0$ 时的极限，它就是 Landau

1) (3.11)与(3.12)不是 Lorentz 不变的，但这没有关系，因为 $\phi^{l}_{\mu}(x)$ 本身就不是一个协变矢量．

规范中光子场的对易关系．(3.17) 式告诉我们 $\chi(x)$ 代表一个零度规的场．

把 (3.10)—(3.12) 式代入 (2.7) 式便得到哈密顿量

$$H_0=\int d^3x\mathscr{H}_0(x)=\sum_{\boldsymbol{k}} k\left\{i(a^\dagger_{\boldsymbol{k}}b_{\boldsymbol{k}}-b^\dagger_{\boldsymbol{k}}a_{\boldsymbol{k}})+\frac{\xi^2}{2k^2}b^\dagger_{\boldsymbol{k}}b_{\boldsymbol{k}}+1\right\}. \tag{3.20}$$

它的意义并不清楚．

四、不定度规

为了弄清哈密顿量的意义，我们令

$$\mathscr{A}_{(\pm)\boldsymbol{k}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(a_{\boldsymbol{k}}\pm ib_{\boldsymbol{k}}), \tag{4.1}$$

代入 (3.8)—(3.10)，得到

$$\begin{aligned}\phi^l_i(x)=\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{k_i}{2\xi\sqrt{k}}\Bigg\{&\left[\mathscr{A}_{(+)\boldsymbol{k}}\left(1+\frac{\xi^2}{4k^2}-\frac{i\xi^2t}{2k}\right)+\mathscr{A}_{(-)\boldsymbol{k}}\left(1-\frac{\xi^2}{4k^2}+\frac{i\xi^2t}{2k}\right)\right]e^{ik\cdot x}\\&+\left[\mathscr{A}^\dagger_{(+)\boldsymbol{k}}\left(1+\frac{\xi^2}{4k^2}+\frac{i\xi^2t}{2k}\right)+\mathscr{A}^\dagger_{(-)\boldsymbol{k}}\left(1-\frac{\xi^2}{4k^2}-\frac{i\xi^2t}{2k}\right)\right]e^{-ik\cdot x}\Bigg\},\end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}\phi^l_0(x)=\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{k}{2\xi\sqrt{k}}\Bigg\{&\left[\mathscr{A}_{(+)\boldsymbol{k}}\left(1-\frac{\xi^2}{4k^2}-\frac{i\xi^2t}{2k}\right)+\mathscr{A}_{(-)\boldsymbol{k}}\left(1+\frac{\xi^2}{4k^2}+\frac{i\xi^2t}{2k}\right)\right]e^{ik\cdot x}\\&+\left[\mathscr{A}^\dagger_{(+)\boldsymbol{k}}\left(1-\frac{\xi^2}{4k^2}+\frac{i\xi^2t}{2k}\right)+\mathscr{A}^\dagger_{(-)\boldsymbol{k}}\left(1+\frac{\xi^2}{4k^2}-\frac{i\xi^2t}{2k}\right)\right]e^{-ik\cdot x}\Bigg\},\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\chi(x)=\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{-i}{\sqrt{2k}}\{[\mathscr{A}_{(+)\boldsymbol{k}}-\mathscr{A}_{(-)\boldsymbol{k}}]e^{ik\cdot x}-[\mathscr{A}^\dagger_{(+)\boldsymbol{k}}-\mathscr{A}^\dagger_{(-)\boldsymbol{k}}]e^{-ik\cdot x}\}, \tag{4.4}$$

并且

$$[\mathscr{A}_{(+)\boldsymbol{k}},\mathscr{A}^\dagger_{(+)\boldsymbol{k}'}]=\delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}, \tag{4.5}$$

$$[\mathscr{A}_{(-)\boldsymbol{k}},\mathscr{A}^\dagger_{(-)\boldsymbol{k}'}]=-\delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}}, \tag{4.6}$$

其他的都对易．为了把 (4.6) 式右边的 $-\delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}$ 变号，我们引进不定度规 η，它可以选为

$$\eta=\eta^\dagger=\eta^{-1}. \tag{4.7}$$

我们从 (4.2)—(4.6) 出发，把 ϕ^l_i、ϕ^l_0 与 χ 包含 $\mathscr{A}_{(+)\boldsymbol{k}}$ 与 $\mathscr{A}^\dagger_{(+)\boldsymbol{k}}$ 的部分看成厄米算符，包含 $\mathscr{A}_{(-)\boldsymbol{k}}$ 与 $\mathscr{A}^\dagger_{(-)\boldsymbol{k}}$ 的部分看成反厄米算符．因此上标“†”不再代表厄米共轭，$\mathscr{A}_{(\pm)\boldsymbol{k}}$ 真正的厄米共轭(上标带“*”)是

$$\mathscr{A}^*_{(\pm)\boldsymbol{k}}=\pm\mathscr{A}^\dagger_{(\pm)\boldsymbol{k}}. \tag{4.8}$$

但是 ϕ^l_i、ϕ^l_0 与 χ 的期望值必定是实数，所以有

$$\eta\mathscr{A}_{(+)\boldsymbol{k}}\eta^{-1}=\mathscr{A}_{(+)\boldsymbol{k}}, \tag{4.9}$$

$$\eta\mathscr{A}_{(-)\boldsymbol{k}}\eta^{-1}=-\mathscr{A}_{(-)\boldsymbol{k}}, \tag{4.10}$$

因此

$$\eta\phi^{l*}_i\eta^{-1}=\phi^l_i,\quad \eta\phi^{l*}_0\eta^{-1}=\phi^l_0,\quad \eta\chi^*\eta^{-1}=\chi. \tag{4.11}$$

对易关系 (4.5)，(4.6) 变为

$$[\mathscr{A}_{(\pm)\boldsymbol{k}},\mathscr{A}^*_{(\pm)\boldsymbol{k}'}]=\delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}}. \tag{4.12}$$

容易验证 (4.2)—(4.11) 是满足第一节和第二节的运动方程和量子化条件的，利用它们也

能推导出同样的相对论协变对易关系 (3.15)—(3.17).

五、双 鬼 态

利用 $\mathscr{A}_{(\pm)\boldsymbol{k}}$ 与 $\mathscr{A}^{*}_{(\pm)\boldsymbol{k}}$, 哈密顿量(3.20)变成

$$H_0 = \sum_{\boldsymbol{k}} k \left\{ \left(1 + \frac{\xi^2}{4k^2}\right) \mathscr{A}^{*}_{(+)\boldsymbol{k}} \mathscr{A}_{(+)\boldsymbol{k}} + \left(1 - \frac{\xi^2}{4k^2}\right) \mathscr{A}^{*}_{(-)\boldsymbol{k}} \mathscr{A}_{(-)\boldsymbol{k}} + \frac{\xi^2}{4k^2} \left(\mathscr{A}^{*}_{(-)\boldsymbol{k}} \mathscr{A}_{(+)\boldsymbol{k}} - \mathscr{A}^{*}_{(+)\boldsymbol{k}} \mathscr{A}_{(-)\boldsymbol{k}} \right) + 1 \right\}. \tag{5.1}$$

H_0 不再是厄米的了,但它是自共轭的

$$H_0 = \eta H_0^{*} \eta^{-1}, \tag{5.2}$$

因此任意两个态的标积 $\langle x|\eta|y\rangle$ 都不随时间改变,换句话说,在海森堡表象中, η 与时间无关, H_0 看来复杂,但可以求它的本征态与本征值. 为着方便起见,引进

$$Q_{\boldsymbol{k}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mathscr{A}_{(+)\boldsymbol{k}} + \mathscr{A}_{(-)\boldsymbol{k}} \right), \tag{5.3}$$

$$P_{\boldsymbol{k}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mathscr{A}_{(+)\boldsymbol{k}} - \mathscr{A}_{(-)\boldsymbol{k}} \right). \tag{5.4}$$

ϕ^{l}_{μ} 与 χ 的动量展开式变为

$$\phi^{l}_{i}(x) = \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{k_i}{\xi\sqrt{2k}} \left\{ \left[Q_{\boldsymbol{k}} + P_{\boldsymbol{k}} \left(\frac{\xi^2}{4k^2} - \frac{i\xi^2 t}{2k} \right) \right] e^{ik\cdot x} + \left[P^{*}_{\boldsymbol{k}} + Q^{*}_{\boldsymbol{k}} \left(\frac{\xi^2}{4k^2} + \frac{i\xi^2 t}{2k} \right) \right] e^{-ik\cdot x} \right\}, \tag{5.5}$$

$$\phi^{l}_{0}(x) = \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{k}{\xi\sqrt{2k}} \left\{ \left[Q_{\boldsymbol{k}} + P_{\boldsymbol{k}} \left(-\frac{\xi^2}{4k^2} - \frac{i\xi^2 t}{2k} \right) \right] e^{ik\cdot x} + \left[P^{*}_{\boldsymbol{k}} + Q^{*}_{\boldsymbol{k}} \left(-\frac{\xi^2}{4k^2} + \frac{i\xi^2 t}{2k} \right) \right] e^{-ik\cdot x} \right\}, \tag{5.6}$$

$$\chi(x) = \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{-i}{\sqrt{2k}} \left\{ P_{\boldsymbol{k}} e^{ik\cdot x} - Q^{*}_{\boldsymbol{k}} e^{-ik\cdot x} \right\}. \tag{5.7}$$

对易关系是

$$[P_{\boldsymbol{k}}, P^{*}_{\boldsymbol{k}'}] = [Q_{\boldsymbol{k}}, Q^{*}_{\boldsymbol{k}}] = \delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}, \quad [P_{\boldsymbol{k}}, Q_{\boldsymbol{k}'}] = [P_{\boldsymbol{k}}, Q^{*}_{\boldsymbol{k}'}] = 0. \tag{5.8}$$

仅仅利用 (5.8), 数学上 $P^{*}_{\boldsymbol{k}}P_{\boldsymbol{k}}$ 与 $Q^{*}_{\boldsymbol{k}'}Q_{\boldsymbol{k}'}$ 对应本征值 $n^{P}_{\boldsymbol{k}}$ 与 $n^{Q}_{\boldsymbol{k}'}$ 的共同本征态, 代表 $n^{P}_{\boldsymbol{k}}$ 个带角标 $\boldsymbol{k}$ 的 P 类粒子和 $n^{Q}_{\boldsymbol{k}}$ 个带动量 $\boldsymbol{k}'$ 的 Q 类粒子. $P_{\boldsymbol{k}}$、$Q_{\boldsymbol{k}}$ 与 $P^{*}_{\boldsymbol{k}}$、$Q^{*}_{\boldsymbol{k}}$ 分别代表 P 类粒子与 Q 类粒子的湮灭算符与产生算符. 例如单粒子态 $|P_{\boldsymbol{k}}\rangle$ 与 $|Q_{\boldsymbol{k}}\rangle$ 是

$$|P_{\boldsymbol{k}}\rangle = P^{*}_{\boldsymbol{k}}|0\rangle, \tag{5.9}$$

$$|Q_{\boldsymbol{k}}\rangle = Q^{*}_{\boldsymbol{k}}|0\rangle, \tag{5.10}$$

数学真空满足

$$P_{\boldsymbol{k}}|0\rangle = 0, \tag{5.11}$$

$$Q_{\boldsymbol{k}}|0\rangle = 0. \tag{5.12}$$

利用 (4.9) 与 (4.10), 亦即

$$\eta P_{\boldsymbol{k}}\eta^{-1} = Q_{\boldsymbol{k}}. \tag{5.13}$$

上面所定义的“单粒子态”长度都为零

$$\langle P_{\boldsymbol{k}}|\eta|P_{\boldsymbol{k}}\rangle = \langle Q_{\boldsymbol{k}}|\eta|Q_{\boldsymbol{k}}\rangle = 0, \tag{5.14}$$

但并不正交

$$\langle P_{\boldsymbol{k}}|\eta|Q_{\boldsymbol{k}'}\rangle = \delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}. \tag{5.15}$$

哈密顿量是

$$H_0 = \sum_{\boldsymbol{k}} k\left\{P_{\boldsymbol{k}}^*P_{\boldsymbol{k}} + Q_{\boldsymbol{k}}^*Q_{\boldsymbol{k}} + \frac{\xi^2}{2k^2}Q_{\boldsymbol{k}}^*P_{\boldsymbol{k}} + 1\right\}, \tag{5.16}$$

它可以写成 2×2 矩阵

$$H_0 = \sum_{\boldsymbol{k}} k\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \xi^2/2k^2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.17}$$

第一行第一列代表 $|P_{\boldsymbol{k}}\rangle$ 态，第二行第二列代表 $|Q_{\boldsymbol{k}}\rangle$ 态．这个矩阵只有一个本征值 $E_k = k$ 和一个相应的本征态 $|Q_{\boldsymbol{k}}\rangle$．对动量算符也是如此．这并不奇怪，因为 H_0 并不是厄米的．因此 $|Q_{\boldsymbol{k}}\rangle$ 的确是代表一个 Q 类粒子的态，$Q_{\boldsymbol{k}}^*Q_{\boldsymbol{k}}$ 的确代表带动量 $\boldsymbol{k}$ 的 Q 类粒子的粒子数，$Q_{\boldsymbol{k}}$ 与 $Q_{\boldsymbol{k}}^*$ 的确是 Q 类粒子的湮灭算符和产生算符．$|P_{\boldsymbol{k}}\rangle$ 不是 H_0 的本征态，对 $P_{\boldsymbol{k}}$、$P_{\boldsymbol{k}}^*$ 等等，我们保留它们的数学定义．

从 (5.17) 得到

$$H_0|P_{\boldsymbol{k}}\rangle = k|P_{\boldsymbol{k}}\rangle + \frac{\xi^2}{2k}|Q_{\boldsymbol{k}}\rangle, \tag{5.18}$$

在 Schrodinger 表象中，可以看看这两个态怎样随时间发展． Schrodinger 态 $|\rangle_s$ 满足的方程是

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\rangle_s = H_0^s|\rangle_s. \tag{5.19}$$

因此

$$|Q_{\boldsymbol{k}}(t)\rangle_s = |Q_{\boldsymbol{k}}(0)\rangle_s e^{-ikt}, \tag{5.20}$$

$$|P_{\boldsymbol{k}}(t)\rangle_s = |P_{\boldsymbol{k}}(0)\rangle_s e^{-ikt} - i\frac{\xi^2 t}{2k}|Q_{\boldsymbol{k}}(0)\rangle_s e^{-ikt}. \tag{5.21}$$

看来 $|P_{\boldsymbol{k}}\rangle$ 不可能发展成出态或入态[4]，而且它不是 H_0 的本征态，因此有必要把它从始态和末态中去掉．这只需要在任何一个时间 $t = t_0$ 确立边界条件

$$\chi^{(+)}|_{\text{物理}}\rangle = \dot{\chi}^{(+)}|_{\text{物理}}\rangle = 0 \tag{5.22}$$

便行了．上式中 $\chi^{(+)}$ 代表场的正频率部分，$|_{\text{物理}}\rangle$ 代表任意物理态，即哈密顿量的本征态．原因是 (3.6) 与 (3.7) 式给出 $\Box\chi = 0$，即可导致在任何时间

$$\chi^{(+)}(x)|_{\text{物理}}\rangle = 0, \tag{5.23}$$

亦即

$$P_{\boldsymbol{k}}|_{\text{物理}}\rangle = 0. \tag{5.24}$$

接着就能证明对任意两个物理态

$$\langle_{\text{物理}'}|\eta\chi(x)|_{\text{物理}}\rangle = 0, \tag{5.25}$$

因此运动方程

$$\Box\phi_\mu = \xi\partial_\mu\chi \tag{5.26}$$

成为

$$\langle_{物理'}|\eta\Box\phi_\mu(x)|_{物理}\rangle=0, \tag{5.27}$$

即 Landau 规范的 Maxwell 方程. 值得注意的是边界条件 (5.22) 不是任意加进的，而是哈密顿量 (5.16) 要求的. 虽然带 P 类粒子的不是物理态，但没有它们，物理态是不完备的. 根据哈密顿量 (5.17)，完备关系是

$$\sum_m |m\rangle\langle m'|=1. \tag{5.28}$$

上式中把 $|m\rangle$ 中的 P 类粒子换成 Q 类，Q 类粒子换成 P 类就是 $|m'\rangle$.

如果与矢量场 ϕ_μ 耦合的流 J_μ 是守恒的，虽然鬼态 $|Q_k\rangle$ 是 H_0 的本征态，它的产生几率为零. 因为把相互作用写成

$$H_I=\phi_\mu J_\mu, \tag{5.29}$$

$$\partial_\mu J_\mu=0. \tag{5.30}$$

在相互作用表象中，

$$\begin{aligned}\langle Q_k|\eta\phi_\mu(x)J_\mu(x)\cdots|_{物理}\rangle&=\langle Q_k|\eta\phi_\mu^{(-)}(x)J_\mu(x)\cdots|_{物理}\rangle\\&=\langle 0|\eta P_k\sum_{k'}\frac{1}{\xi\sqrt{2k'}}[P^*_{k'}k'_iJ_i(x)+ik'P^*_{k'}J_4(x)]e^{ik'\cdot x}\cdots|_{物理}\rangle=0,\end{aligned} \tag{5.31}$$

上式 $\phi_\mu^{(-)}(x)$ 代表 $\phi_\mu(x)$ 的负频率部分.

六、真空与传播子

虽然相应 $|Q_k\rangle$ 的能量、动量和角动量本征值都高于相应 $|0\rangle$ 的，但是，由于约束条件 (5.24)，$|Q_k\rangle$ 没有任何能动量和角动量效应，例如

$$\langle\varphi_k|\eta H_0|\varphi_k\rangle=0, \tag{6.1}$$

它的产生几率为零，所以它是无法观察到的. 因此，这些态也可以视为真空. 我们可以把物理真空态 $|_{真空}\rangle$ 定义为一个包含任意多个 $|\varphi_k\rangle$ 的态：

$$|_{真空}\rangle=V|0\rangle, \tag{6.2}$$

$$V=g_0+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k_1,\cdots,k_n}g_n(k_1,\cdots,k_n)\prod_{i=1}^{n}Q^*_{k_i}, \tag{6.3}$$

其中 $g_n(k_1,\cdots,k_n)$ 为任意函数，$|0\rangle$ 是什么都没有的态. 于是带有横光子的物理态为

$$|_{物理}\rangle=V|_{横光子}\rangle. \tag{6.4}$$

其中 $|_{横光子}\rangle$ 是不包含 Q 类粒子的哈密顿量本征态，但横光子数与 $|_{物理}\rangle$ 相等. 归一条件

$$\langle_{真空}|\eta|_{真空}\rangle=1. \tag{6.5}$$

或

$$\langle_{物理}|\eta|_{物理}\rangle=1, \tag{6.6}$$

导致

$$g_0^*g_0=1. \tag{6.7}$$

值得注意的是，$|_{真空}\rangle$ 与 $|_{物理}\rangle$ 都不再是 H_0 动量及角动量的本征态，但是上节 (5.27) 式指出 Maxwell 方程是以期望值实现的，因此这些态是可以用的. 其实在每一个期望值中，

只有 $|0\rangle$ 与 $|_{横光子}\rangle$ 即 g_0 部分才有贡献．不同的 $g_n(\boldsymbol{k}_1, \cdots, \boldsymbol{k}_n)$ 只不过对应 Landau 规范中的不同规范，因为

$$\langle_{物理}|\eta\phi_\mu(x)|_{物理}\rangle = \langle_{横光子}|V^*\eta\phi_\mu(x)V|_{横光子}\rangle = \langle_{横光子}|\eta\phi_\mu(x)|_{横光子}\rangle + \frac{\partial}{\partial x_\mu}\alpha(x). \tag{6.8}$$

其中

$$\alpha(x) = -i\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{1}{\xi\sqrt{2k}}[g_0^* g_1(\boldsymbol{k})e^{ik\cdot x} - g_0 g_1^*(\boldsymbol{k})e^{-ik\cdot x}] \tag{6.9}$$

是一个时空的实函数并满足

$$\Box\alpha(x) = 0. \tag{6.10}$$

它就是个规范相因子．

利用 (5.8) 与 (6.2)，加上 $\phi_\mu^{\perp}$ 的贡献，推出 ϕ_μ 的传播子为

$$\langle_{真空}|T\phi_\mu(x)\phi_\nu(x')|_{真空}\rangle = \langle 0|T\phi_\mu(x)\phi_\nu(x')|0\rangle + R_{\mu\nu}(x, y), \tag{6.11}$$

其中

$$\langle 0|T\phi_\mu(x)\phi_\nu(x')|0\rangle = \delta_{\mu\nu}D_F(x-x') + \partial_\mu\partial_\nu E_F(x-x') \tag{6.12}$$

$$E_F(x) = -\frac{\partial}{\partial m^2}\Delta_F(x, m^2)|_{m^2=0} = -i\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{ik\cdot x}}{(k^2-i\epsilon)^2}. \tag{6.13}$$

(6.12) 式恰好就是 $m\to 0$ 时 (1.4) 式的极限；在动量空间，

$$\int d^4x e^{-ik\cdot x}\langle 0|T\phi_\mu(x)\phi_\nu(0)|0\rangle = -i\frac{\delta_{\mu\nu} - \dfrac{k_\mu k_\nu}{k^2-i\epsilon}}{k^2-i\epsilon}, \tag{6.14}$$

就是 Landau 规范的光子传播子，它并没有 $\delta_{\mu4}\delta_{\nu4}$ 的非协变项[5]．(6.13) 与 (6.14) 中 k^2 为四动量平方．

(6.11) 式中的 $R_{\mu\nu}(x, x')$ 是

$$R_{\mu\nu}(x, x') = \sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}\frac{k_\mu k'_\nu}{\xi^2\sqrt{4kk'}}g_0^*[g_2(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') + g_2(\boldsymbol{k}', \boldsymbol{k})]e^{ik\cdot x+ik'\cdot x'}$$
$$+\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{k_\mu}{\xi\sqrt{2k}}g_1^*(\boldsymbol{k})e^{-ik\cdot x}\sum_{\boldsymbol{k}'}\frac{k'_\nu}{\xi\sqrt{2k'}}g_1(k')e^{ik'\cdot x'} + \text{复数共轭}. \tag{6.15}$$

$R_{\mu\nu}(x, x')$ 是明显的非 Lorentz 协变和平移不变因为 $|_{真空}\rangle$ 本身就不是 Lorentz 协变态又不是能动量本征态．原因是规范相因子虽然是个 Lorentz 标量的时空函数，它并不是 Lorentz 和平移不变的．但是

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}R_{\mu\nu}(x, x') = \frac{\partial}{\partial x'_\nu}R_{\mu\nu}(x, x') = 0, \tag{6.16}$$

因此整个传播子 (6.11) 满足 Lorentz 条件．由于与光子耦合的电磁流是守恒的，因此 $R_{\mu\nu}(x, x')$ 对任何过程都没有贡献．

同时，我们也推算出其它的传播函数：

$$\langle 0|T\phi_\mu(x)\chi(x')|0\rangle = \xi^{-1}\partial_\mu D_F(x-x'),$$
$$\langle 0|T\chi((x)\chi(x')|0\rangle = 0.$$

七、散射矩阵

散射矩阵 s 定义为

$$s = T\exp i\int \mathscr{H}_I d^4x, \tag{7.1}$$

T 是编时乘积. 因为 $\mathscr{H}_I$ 是自共轭的,因此

$$\eta s^* \eta^{-1} s = 1, \tag{7.2}$$

$$s\eta s^* \eta^{-1} = 1. \tag{7.3}$$

对 (7.2) 代入完备关系 (5.28), 得到

$$\sum_m \langle l|\eta s^* \eta|m\rangle\langle m'|\eta s|l'\rangle = \delta_{ll'}. \tag{7.4}$$

利用 (5.31)

$$\langle Q_k|\eta s|l'\rangle = 0, \tag{7.5}$$

因此

$$\langle l'|s^*\eta|Q_k\rangle = 0,$$

所以 $|m\rangle$ 与 $|m'\rangle$ 都不可能包含 Q 类粒子,因而也不能包含 P 类粒子, 只可能有贡献的是包含横光子的正度规物理态.

同样 (7.3) 式导致

$$\sum_m \langle l|s\eta|m\rangle\langle m'|\eta s^*\eta|l'\rangle. \tag{7.6}$$

跟 (5.28) 一样,可以证明

$$\langle l|s\eta|P_k\rangle = 0, \quad \langle P_k|\eta s^*|l\rangle = 0 \tag{7.7}$$

因此 $|m\rangle$ 与 $|m'\rangle$ 只可能是包含横光子的正度规物理态. 所以对正度规的包含横光子的态 $|l\rangle$ 与 $|l'\rangle$, (7.4) 给出

$$\langle l|ss^*|l'\rangle = \langle l|s^*s|l'\rangle = \delta_{ll'}. \tag{7.8}$$

就是说 s 矩阵是么正的. 当然, $|l\rangle$ 与 $|l'\rangle$ 可选为 (6.4) 式的 $|_{物理}\rangle$ 态, 因为它们也是正度规态.

八、小 结

(一) 本文所讨论的光子量子化方法与 Gupta-Bleuler 方法[6]相似. 两者都采用了不定度规而且 Maxwell 方程的实现都是通过期望值. Gupta-Bleuler 把 $\phi_i(x)$ 看成厄米算符 $\phi_0(x)$ 看成反厄米算符. Lorentz 条件是以一个外加的边界条件引入的, 它把一 $\phi_\mu(x)$ 的一个自由度排除掉, 因而使另外一个自由度无观察效应. 本文是把 $\phi_i(x)$ 与 $\phi_0(x)$ 都看成复数算符. Lorentz 条件是运动方程. $\phi_\mu(x)$ 的一个自由度(P 类粒子)不能出现是因为它不是哈密顿量的本征态,另外一个自由度(Q 类粒子)就没有观察效应.

(二) 随着轻子种类的增多, 它们很可能有着内部结构. 因此, 自旋 3/2 的中微子也有可能存在. 它的量子场论也许可以用类似方法处理. K. B. Joseph 与 M. Sabir[7] 曾提

出一个 Lagrange 乘子方法来处理质量为m的自旋 3/2 ψ_μ（费米矢量）场．它们的拉氏函数密度是

$$\mathscr{L} = -\bar{\psi}_\mu \Lambda_{\mu\nu}\psi_\nu + \xi\bar{\chi}\gamma_\mu\psi_\mu + \xi\bar{\psi}_\mu\gamma_\mu\chi, \tag{8.1}$$

$$\Lambda_{\mu\nu} = (\gamma\cdot\partial + m)\delta_{\mu\nu} + A(\gamma_\mu\partial_\nu + \gamma_\nu\partial_\mu) + B\gamma_\mu\gamma\cdot\partial\gamma_\nu + Cm\gamma_\mu\gamma_\nu. \tag{8.2}$$

上式A、B、C、ξ是常数，χ是自旋$\frac{1}{2}$的费米 Lagrange 乘子场．当$A\neq-\frac{1}{2}$，(7.1) 代表一个自旋为 3/2 质量为m的场与一个自旋为 1/2 质量为 $2m$ 的负度规场． 在 $m=0$ 时，这个自旋为$\frac{1}{2}$的负度规场与自旋为 3/2 中的$\pm\frac{1}{2}$部份简并成为两个自旋为$\frac{1}{2}$的零度规粒子态，但它们并不正交．如第五节一样，其中一个自旋为$\frac{1}{2}$的鬼态不是哈密顿量的本征态，可以利用边界条件去掉，其他一个因为度规为零将没有观察效应．这样，剩下来的就是一个自旋为 3/2 的中微子理论了． 只可惜 Joseph 和 Sabir 在推算中犯了一个严重的错误，他们的正则量子化方案其实是与运动方程不自洽的． 因此，要达到上述目的，拉氏函数 (8.1) 有修改的必要．

参　考　文　献

[1] N. Nakanishi, *Phys. Rev.*, **D5**(1972), 1324.
[2] N. Nakanishi, *Progr. Theor. Phys.*, **35**(1966), 1111.
[3] N. Nakanishi, *Progr. Theor. Phys.*, **38**(1967), 881.
[4] W. Heisenberg, *Nucl. Phys.*, **4**(1957), 532.
[5] T. D. Lee and C. N. Yang, *Phys. Rev.*, **128**(1962), 885.
[6] S. N. Gupta, *Proc. Phys. Soc. (London)*, **A63**(1950), 681; **A64**(1951), 850;
K. Bleuler, *Helv. Phys. Acta.*, **23**(1950), 567;
K. Bleuler, and W. Heither, *Progr. Theor. Phys.*, **5**(1950), 600.
[7] K. B. Joseph and M. Sabir, *Journal of Phys.*, **A10**(1977), 1225.

QUANTIZATION OF THE PHOTON FIELD AND DIPOLE GHOSTS

WU JING-YUAN

(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

We discuss the quantization of a massless vector field using the Lagrange multiplier method. The exact solution of the field equations in three dimensional momentum space is given and the existence of dipole ghosts explicitly demonstrated. One of the ghosts is not an eigenstate of the Hamiltonian and can be eliminated by boundary conditions. If the vector field is coupled to conserved currents, the other ghost has no observable effects. So this field theory describes the photon. This problem has been studied by Nakanishi[2,3], but his analysis is obscure. The extension of this method to spin 3/2 massless field is discussed.