主丛上右移不变的度规和变分原理

——兼论丛空间作为时空和内部空间的统一

吴詠时　　　陆启铿
（中国科学院理论物理研究所）（中国科学院数学研究所）

摘　　要

我们讨论了在规范理论的主丛表述中对主丛空间赋予度规的问题，以及如何把粒子和物质场的变分原理写为主丛上不变的形式．证明了：主丛上右移不变的度规中必包含变换性质全同于规范势的量；这样就提供了规范场的一种新表述．此外，我们把粒子运动的主丛上变分原理表述为：粒子沿主丛上水平短程线运动；由此导出了非 Abel 规范场中粒子的 Wong 运动方程．

又阐述了把主丛空间作为时空和内部空间相统一的物理空间的观点；并指出了这一观点对于理解规范变换和规范不变性的实质，以及建立引力场和规范场的统一理论都有重大的好处．

一、引　　言

规范场理论现在受到物理学家的普遍重视．不仅电动力学是 U_1 群规范理论，作为引力理论的广义相对论也可看做是一种规范理论．（把自旋和挠率的效应全包括进来的引力规范理论也日益受到重视．）近年来，统一弱和电磁作用的 Weinberg-Salam 规范理论受到有关弱中性流的许多实验的支持；人们又猜测强作用也是一种由规范场所传递的相互作用（QCD)．所谓巨统一和超统一场论，则进一步尝试用规范理论把这些已知的四种基本相互作用全都统一起来．

对规范场理论的这些研究，都是集中于相互作用和动力学问题．然而，除了描述和统一各种相互作用之外，规范场理论就没有别的也许更令人深思的物理内涵了吗？

最近几年人们发现，规范场通常都有非平凡的拓扑性质，这是规范理论的一个重要特点．对于规范场拓扑荷（包括磁单极和瞬子）的研究表明：有拓扑荷时物理系统的时空变换往往伴随有适当的规范变换，而系统的若干对称性质只是通过这种联合的（时空加规范）变换下的不变性才能体现出来．例如，磁荷场中的转动不变性[1]和瞬子场中的 $O(5)$ 不变性[2,3]都是如此．这时，在拓扑荷的场中运动的粒子，其角动量一般是和内部量子数有关的；例如，在 $SO(3)$ 磁单极或 $SU(2)$ 瞬子场中，粒子的自旋有来自同位旋的贡

本文 1979 年 3 月 13 日收到．

献[3,4].

我们认为，这种情况暗示了时空的概念可能需要扩充，需要把时空与描述规范变换自由度的内部空间，在物理上结合起来统一地予以考虑. 由于纤维丛能够同时描述时空和内部自由度，在本文中我们将建议采用纤维丛作为把时空和内部空间统一起来的物理高维空间[5].

但是，仅采用高维空间描述，还不能认为是已经实现了时空与内部空间的统一；就好像牛顿力学中用三维空间 R^3 与一维时间 R^1 的直积 $R^3 \times R^1$ 作为时空流形，不能算是做到空间与时间的统一. 让我们回忆一下，狭义相对论是怎样达到空间与时间的统一的？其实基本上只有两点：

(i) 赋予四维时空流形以赝欧氏度规 $ds^2 = c^2dt^2 - d\boldsymbol{x}^2$；（这正是光速不变原理的几何表述.）

(ii) 导致运动方程的变分原理取四维不变的形式.（这是相对性原理的一种等价数学表述.）

与此类比，要用纤维丛高维空间描述来实现时空与内部空间的统一，也应做到上述两点，即

(i) 对纤维丛高维空间赋予某一度规；

(ii) 把通常物理学中的变分原理写成丛空间上不变的形式.

在本文中我们将讨论这两个问题，并证明确实可以做到这两点，因此用纤维丛来实现时空与内部空间的统一在物理上是有可能的.

本文限于讨论主纤维丛(即内部空间同胚于某一 Lie 群)的情形，不难把本文的讨论推广到一般的配丛. 本文的安排如下：

第二节阐述主丛空间作为统一时空和内部空间的高维空间的观点，并指出一大好处是可以把规范变换也看做是丛空间中的一类特殊的坐标变换，因而可以从丛空间的坐标变换出发，统一地处理时空变换和规范变换.

第三节讨论对主丛空间赋予度规的问题. 在 [6—8] 中也曾讨论过这一问题，但都是用规范势来构造丛上的度规. 这里我们采取了相反的程序，证明：若赋予主丛的度规是右移不变的，则该度规中必包含变换性质全同于规范势的分量. 亦即，规范势是主丛上右移不变度规的有机组成部份；于是规范势和引力场(时空度规场)，将自然地统一在主丛空间的右移不变度规之中.

在第四节和第五节中，分别讨论了粒子和物质场(标量场、旋量场)在引力和规范场中的通常运动方程如何由主丛上不变的变分原理导出. 特别是类比于广义相对论，我们把主丛上粒子运动的变分原理表述为：粒子沿主丛空间中的水平短程线运动；并由此出发导出了非 Abel 规范场中粒子运动的 Wong 方程[9]. 就我们所知，这是文献中第一次从变分原理导出 Wong 方程. 应当特别指出，变分原理写成主丛上不变的形式，自动地保证了运动方程在时空坐标变换下的广义协变性以及在规范变换下的规范不变性；这样，规范不变性和广义协变性一起，统一在纤维丛空间坐标变换下的“广义协变性”. 由于这种丛上的“广义协变性”，丛上不变的变分原理自动包含了与引力及规范场的最小耦合.

最后，在第六节中进行了简要的总结.

二、时空与内部空间的统一描述
——(主)纤维丛

设M为四维时空流形，G为规范 Lie 群，它反映一种与动力学相联系的内部对称性．假设相应的内部自由度所成的内部空间恰好同胚于群G的流形1)．在每一时空点处，都有一个这样的内部空间．过去通常认为，整个时空是与内部空间截然分开的．因此把时空与内部空间结合起来进行统一描述的高维流形，就是 $M\times G$（二者的直积)，即平凡的主纤维丛．

但是，由于人们只能进行局域的实验，我们只能认为局部的时空是与内部空间分开的；即对每一时空点 $x\in M$，有一时空邻域U，可用 $U\times G$ 来描写这部份时空和其中每点处的内部空间．对于M中的另一时空邻域V，同样有 $V\times G$．由于在同一时空点处，只有一个同胚于G的内部空间，所以当 $U\cap V$ 非空时，$U\times G$ 与 $V\times G$ 之间要有一定的联系．即当 $x\in U\cap V$ 时，有一联接函数 $\varphi_{UV}(x)$，使当 $(x,\sigma)\in U\times G$，$(x,\tau)\in V\times G$ 时由下式．

$$\sigma=\varphi_{UV}(x)\cdot\tau,\quad (\varphi_{UV}(x)\in G) \tag{1}$$

相联系的σ和τ代表x处的内部空间中的同一个点．为使这种联系不致产生矛盾，显然当 $U\cap V\cap W$ 非空时，应该要求

$$\varphi_{UV}(x)\cdot\varphi_{VW}(x)=\varphi_{UW}(x),\quad (x\in U\cap V\cap W) \tag{2}$$

因此，统一地描写时空和内部空间的高维空间(流形)P，可认为是由局部的 $U\times G$、$V\times G$、$W\times G\cdots$以联接关系 (ii) 拼粘起来的主丛[10]，记为 $P(M,G)$；时空 M 又称为P的底，G叫做P的结构群，在 $x\in M$ 处的内部空间(同胚于 G)叫做点x处的纤维．

高维空间P的上述主丛构造，也可以用物理学家惯用的局部坐标方法来表述．设 $x^\mu(\mu=0—3)$ 为时空坐标，$\sigma^a(a=1,\cdots,n$；n 为G的维数)是群G的参数，即内部空间的坐标．于是P中的点u可用局部(主)坐标[11] $(x^\mu,\sigma^a)=Y^A(A=0—3,5—n+4)$ 来标记，简记为 $Y=(x,\sigma)$．对固定点 $x_0\in M$，让σ跑遍G的一切元素，所成之点集 $\{(x_0,\sigma)|\sigma\in G\}$ 就是时空点 x_0 处的纤维(即内部空间)．

从空间P的局部(主)坐标变换可分为两大类：

(i) 时空坐标变换：(此时内部空间坐标不变)

$$(x,\sigma)\to(x',\sigma):\begin{cases} x'^\mu=x'^\mu(x)\\ \sigma'^a=\sigma^a;\end{cases} \tag{3}$$

(ii) 内部空间坐标变换：(此时时空坐标不变)

$$(x,\sigma)\to(x,\sigma'):\begin{cases} x'^\mu=x^\mu\\ \sigma'^a=(S(x)\cdot\sigma)^a.\end{cases} \tag{4}$$

其中 $S(x)\in G$．这里 $S(x)$ 与时空点x有关，意味着不同时空点处内部空间的坐标变换可以不同．实际上 $S(x)$ 即是 (1) 式中 $\varphi_{UV}(x)$ 之逆．由于历史上的原因，内部空间坐标变

---

1) 这将导致主丛，否则一般将导致配丛．

换 (4) 称做规范变换.

除了上述从上的坐标变换外，还可以有丛空间中的点变换. 在熟知的时空点变换之外，最有兴趣的乃是内部空间的点右移变换：

$$R_\tau:(x,\sigma)\to(x,\sigma\tau),\ (\text{在同一坐标系下}) \tag{5}$$

其中 τ 是群 G 的固定元素. R_τ 是把点 (x,σ) 变到同一纤维上的另一点 $(x,\sigma\tau)$，即把主丛上的点沿纤维方向进行"(右)平移".

注意：能够保证右移变换的定义 (5) 与坐标选取无关的丛上坐标变换，只能是变换 (3)、(4) 以及它们的乘积. 以下凡涉及主丛上的坐标变换，我们将限于这两类变换.

过去人们习惯于把规范变换看做是与时空变换不同性质的东西. 若采用纤维丛空间作为对时空和内部空间的统一描述，一大好处则是：可把规范变换和时空坐标变换一样，统视为丛空间上的坐标变换(物理学家一贯熟悉坐标变换). 这个优点在讨论有拓扑荷的系统对于时空及规范的联合变换下的不变性质时尤为明显[1,3].

三、主丛上右移不变的度规和规范势

已知时空有度规，内部空间作为群 G 的流形也可赋予度规. 为使丛空间更好地体现二者的统一，让我们把度规进一步推广到主丛上去.

主丛 P 是 $4+n$ 维微分流形. 若 P 满足第二可数性公理，按 Whitney 定理[12]，在 P 上可引进无穷多种度规. 我们假设：主丛 P 上的度规在右移 (5) 下是不变的. 这意味着：内部空间(即纤维)对于这种度规而言具有某种均匀性；丛上两邻近点间的"距离"，在这两点都沿纤维方向做相同的右平移之后，仍然保持不变. 虽然这是把度规从时空推广到主丛上的一种简单性假设，但是下面将看到，它已经可以把文献中迄今讨论过的各种主丛度规[6-8]作为特例而包括在内. 更重要的是，如下所证，从主丛度规的右移不变性可自然地引出群 G 的规范势的概念.

用 [10] 的记号，G 的左不变 Maurer 1-形式是

$$\theta^a = v^a_b(\sigma)d\sigma^b,\quad (a=1,\cdots,n) \tag{6}$$

其中

$$v^a_b(\sigma)u^b_c(\sigma)=\delta^a_c,\quad u^b_c(\sigma)=\left.\frac{\partial(\sigma\tau)^b}{\partial\tau^c}\right|_{\tau=e}, \tag{7}$$

e 为 G 的幺元. 不失一般性，在局部坐标 $Y^A=(x^\mu,\sigma^a)$ 下，主丛 P 上的度规可写为

$$dS^2=G_{\mu\nu}(x,\sigma)dx^\mu dx^\nu+2G_{\mu a}(x,\sigma)dx^\mu\theta^a+G_{ab}(x)\theta^a\theta^b, \tag{8}$$

其中 G_{AB} 是对称的. 当 $dx^\mu=0$ 时，取纤维上的度规 G_{ab} 是非异的. (8) 式最右边两项配方后可改写为

$$dS^2=g_{\mu\nu}(x,\sigma)dx^\mu dx^\nu+g_{ab}(x,\sigma)\omega^a\omega^b. \tag{9}$$

其中

$$g_{ab}(x,\sigma)=G_{ab}(x,\sigma), \tag{10}$$

$$\omega^a=\theta^a+(Ad\,\sigma^{-1})^a_bB^b_\mu(x,\sigma)dx^\mu, \tag{11}$$

$$g_{\mu\nu}(x,\sigma)=G_{\mu\nu}(x,\sigma)-g_{ab}(x,\sigma)(Ad\,\sigma^{-1})^a_c(Ad\,\sigma^{-1})^b_dB^c_\mu(x,\sigma)B^d_\nu(x,\sigma). \tag{12}$$

这里 $Ad\,\sigma(\sigma\in G)$ 是群 G 的伴随表示，而

$$B^a_\mu(x,\sigma)=(Ad\,\sigma)^a_b g^{bc}(x,\sigma)G_{c\mu}(x,\sigma), \tag{13}$$

g^{ab} 是方阵 g_{ab} 的逆方阵元素.

由主从 P 上度规(8)或(9)的右移不变性，可定出 g_{ab}，$g_{\mu\nu}$ 和 B^a_μ 对纤维坐标 σ 的依赖性. 事实上，在右移变换(5)下，(11)式所定义的 ω^a 变换为

$$\begin{aligned}\omega'^a&=v^a_b(\sigma\tau)d(\sigma\tau)^b+(Ad\,(\sigma\tau)^{-1})^a_b B^b_\mu(x,\sigma\tau)dx^\mu\\&=(Ad\,\tau^{-1})^a_b\{v^b_c(\sigma)d\sigma^c+(Ad\,\sigma^{-1})^b_c B^c_\mu(x,\sigma\tau)dx^\mu\}.\end{aligned} \tag{14}$$

因此，在右移 R_τ 下，dS^2 变换为

$$dS'^2=g_{\mu\nu}(x,\sigma\tau)dx^\mu dx^\nu+g_{ab}(x,\sigma\tau)\omega'^a\omega'^b. \tag{15}$$

由右移不变性假设，对任意的 dx^μ、$d\sigma^a$ 有

$$dS^2=dS'^2, \tag{16}$$

比较两边 $d\sigma^a d\sigma^b$、$dx^\mu d\sigma^a$ 以及 $dx^\mu dx^\nu$ 项的系数，得到

$$g_{ab}(x,\sigma\tau)(Ad\,\tau^{-1})^a_c(Ad\,\tau^{-1})^b_d=g_{cd}(x,\sigma), \tag{17}$$

$$B^a_\mu(x,\sigma\tau)=B^a_\mu(x,\sigma), \tag{18}$$

$$g_{\mu\nu}(x,\sigma\tau)=g_{\mu\nu}(x,\sigma). \tag{19}$$

由于 τ 是任意的，故可取 $\tau=\sigma^{-1}$ 而得

$$g_{\mu\nu}(x,\sigma)=g_{\mu\nu}(x),\quad B^a_\mu(x,\sigma)=B^a_\mu(x), \tag{20}$$

$$g_{ab}(x,\sigma)=g_{cd}(x)(Ad\,\sigma)^c_a(Ad\,\sigma)^d_b \tag{21}$$

这样便证明了：主丛上右移不变度规的一般形式是

$$dS^2=g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu+g_{ab}(x)(Ad\,\sigma)^a_c(Ad\,\sigma)^b_d\,\omega^c\omega^d. \tag{22}$$

其中

$$\omega^a=v^a_b(\sigma)d\sigma^b+(Ad\,\sigma^{-1})^a_b B^b_\mu(x)dx^\mu. \tag{23}$$

大家知道，P 上的线元(22)应在从 P 的坐标变换下不变. 由此可定出(22)式中出现的函数 $g_{\mu\nu}(x)$、$g_{ab}(x)$ 和 $B^a_\mu(x)$ 在时空坐标变换和定域规范变换下的变换性质. 事实上，在时空坐标变换(3)和定域规范变换(4)下分别有

$$dx'^\mu=\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}dx^\nu,$$

$$v^a_b(\sigma')d\sigma'^b=v^a_b(\sigma)d\sigma^b+(Ad\,\sigma^{-1})^a_b v^b_c(S(x))\frac{\partial S^c(x)}{\partial x^\mu}dx^\mu.$$

因此，由 dS^2 是不变量定出：在时空坐标变换(3)下，

$$\begin{cases}g'_{ab}(x')=g_{ab}(x),\\ B^{a\prime}_\mu(x')=\dfrac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}B^a_\nu(x),\\ g'_{\mu\nu}(x')=\dfrac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\dfrac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\nu}g_{\rho\lambda}(x),\end{cases} \tag{24}$$

而在定域规范变换(4)下

$$\left\{\begin{array}{l} g'_{ab}(x)=g_{cd}(x)(Ad\,S(x)^{-1})^c_a(Ad\,S(x)^{-1})^d_b, \\ B^{a\prime}_\mu(x)=(Ad\,S(x))^a_b B^b_\mu(x)+v^a_b(S(x)^{-1})\dfrac{\partial(S(x)^{-1})^b}{\partial x^\mu}, \\ g'_{\mu\nu}(x)=g_{\mu\nu}(x), \end{array}\right. \tag{25}$$

这里 $(S(x)^{-1})^a$ 表示群元素 $S(x)^{-1}$ 的参数.

不难看出, $g_{\mu\nu}(x)$ 是规范变换下不变的二阶协变张量; $g_{ab}(x)$ 在规范变换下是 Ad-Ad 型对称张量,而在时空变换下是标量. 值得注意的是, $B^a_\mu(x)$ 的变换性质完全和通常的规范势一样. 根据这些变换性质, 我们可以把 $g_{\mu\nu}(x)$ 认同为时空度规场 (即引力场), 把 $B^a_\mu(x)$ 认同为群 G 的规范势. 不过,在右移不变的度规 (22) 中还有一些标量场 $g_{ab}(x)$ 出现,它们的动力学意义(特别是能否把它们认同为 Higgs 场)值得进一步研究.

此外, (14) 和 (18) 式表明: 由 (23) 式定义的 1-形式 ω^a 在右移变换 (5) 下的变换方式为

$$\omega^a \xrightarrow{R_\tau} \omega'^a=(Ad\,\tau^{-1})^a_b\omega^b, \tag{26}$$

而用 (24)、(25) 式不难验证,在时空坐标变换和定域规范变换下, ω^a 保持不变:

$$\omega^a \to \omega'^a=\omega^a, \tag{27}$$

可见, ω^a 就是主丛 P 上的联络 1-形式[5].

注意,由 (22) 式,当 $\omega^a=0$ 时, $dS^2=g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$ 即为时空的线元. 若用纤维丛理论的术语,则 $\omega^a=0$ 代表主丛切空间的水平子空间. 因此,通常所谓时空的切平面,从高维主丛空间看来,不过是主丛的水平切子空间而已. 由于在主丛度规 (22) 式中没有形如 $dx^\mu\omega^a$ 的交叉项,所以水平切子空间 ($\omega^a=0$) 总是与垂直切子空间 ($dx^\mu=0$, 也即纤维的方向)正交. 粗略地可以说,相对于丛上右移不变度规而言,时空与内部空间总是正交的. 应当指出,文献中讨论过的几种主丛度规[6—8],都是右移不变度规 (22) 当纤维度规 $g_{ab}(x)$ 取特定值时的特殊情形. 对 U_1 群取 $g_{11}(x)=1$, 或对半单群取 $g_{ab}(x)=k_{ab}$ (Cartan-Killing 度规),就得文献 [6, 7] 的度规. 而文献 [8] 的度规相当于对磁单极 Hopf 从 $S^3=P(S^2, U_1)$ 选取了 $g_{11}(x)=4r^2$, 对瞬子 Hopf 从 $S^7=P(S^4, SU_2)$ 选取了 $g_{ab}(x)=4r^2\delta_{ab}$ (r 为底 S^2 或 S^4 的半径). 在这些特例中,内部空间的度规 $g_{ab}(x)$ 都是事先给定的,不是动力学变量. 然而在本文的框架中, 右移不变性并未限制函数 $g_{ab}(x)$ 的具体形式,因而有可能仿照广义相对论把内部空间的度规考虑为动力学变量. 这个问题我们将另文考虑.

最后我们指出, 本节上面的步骤也可以倒过来. 众所周知, 时空流形上可以定义度规,即存在二阶协变张量场 $g_{\mu\nu}(x)$. 在附录中我们又证明了时空流形上 Ad-Ad 型张量场 $g_{ab}(x)$ 的存在性. 如果再加上纤维丛理论中关于联络形式 ω^a 的存在性证明,那么我们就可以断言,满足变换性质 (24) 和 (25) 的各量是存在的. 从而根据 (22) 式就可以在主丛 P 上引入度规, 并证明此度规是右移不变的. 这样我们便看到: 不仅主丛上右移不变的度规自然地引导出规范势 $B^a_\mu(x)$, 而且反过来规范势或联络的存在性, 又保证了主丛右移不变度规的存在. 因此从某种意义上可以说, 主丛上右移不变的度规包含了规范势的一种新定义,或说,提供了规范场的一种新表述. 这种新表述的好处是, 把内部对称性的规范场与作为时空度规的引力场从一开始就自然地统一于高维主丛空间的(右移不变)度

规之中.

四、丛上的变分原理(粒子运动)

有了主丛上的度规，现在我们可以来讨论如何把描述物理规律的变分原理从时空推广到高维的主丛空间上去，即写为主丛上不变的形式. 先从粒子运动的变分原理开始.

在狭义和广义相对论中，自由粒子或者在引力场中运动的粒子都是沿时空的短程线运动. 我们试图把它推广到主丛上. 最简单的推广似乎是假设粒子沿丛空间上的短程线运动. 这样做有个问题,即对所有的粒子,只要初始条件相同,其运动必定是一样的,而与粒子本身的性质无关. 这显然与实验不符，例如在电磁场中带电粒子的运动显然与粒子电荷的数值有关. 因此必须适当地修改这种最简单的推广假设.

在这个问题上，我们受到杨振宁关于规范场的积分表述[13]的启发. 如文献[10]所证,从纤维丛的观点来看，规范场的积分表述等价于时空曲线在主丛上的水平提升，即提升为丛空间上的一条水平曲线(其切向量处处在水平切子空间中). 这启发我们：在规范场中运动的粒子，它在主丛空间中的运动轨迹应该是一条水平曲线. 把这个要求与前述主丛短程线假设结合起来,我们把对粒子运动的主丛变分原理表述为:

在引力和规范场中的粒子沿主丛空间中的水平短程线（即水平曲线中的短程线）运动.

为验证这一变分原理的合理性,我们先从熟悉的电磁场中粒子的运动问题开始,看看上述丛上的变分原理是否给出 Lorentz 运动方程.

1. $U(1)$ 群(电磁场)的情形

将 U_1 群元素记为 $e^{i\alpha}$，α 即群参数. 考虑主丛 $P(M, U_1)$，其局部主坐标为 (x^μ, α). 丛上度规为

$$dS^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + G(x)(d\alpha + eA_\mu dx^\mu)^2. \tag{28}$$

其中已把纤维丛理论惯用的 A_μ 换成物理学中常用的 eA_μ，e 为普适电磁耦合常数($\hbar = c = 1$).

假设粒子在高维主丛空间中的运动轨迹为

$$x^\mu = x^\mu(\lambda), \quad \alpha = \alpha(\lambda) \tag{29}$$

其中 λ 为曲线的参数. 我们的丛上变分原理是

$$\begin{cases} \delta\int dS = \delta\int \dfrac{dS}{d\lambda}d\lambda = 0, & (30) \\ \dfrac{\omega}{d\lambda} \equiv \dfrac{d\alpha}{d\lambda} + eA_\mu\dfrac{dx^\mu}{d\lambda} = 0, & (31) \end{cases}$$

这里(31)式就是曲线(29)是水平曲线的约束条件(即 $\omega = 0$). 引入 Lagrange 乘子 $\varepsilon(\lambda)$，并定义

$$F(\lambda) = \frac{dS}{d\lambda} + \varepsilon(\lambda)\left(\frac{d\alpha}{d\lambda} + eA_\mu\frac{dx^\mu}{d\lambda}\right), \tag{32}$$

则约束变分问题(30)、(31)的 Euler-Lagrange 方程是

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x^\mu} - \dfrac{d}{d\lambda}\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}^\mu} = 0, & (33) \\ \dfrac{\partial F}{\partial \alpha} - \dfrac{d}{d\lambda}\dfrac{\partial F}{\partial \dot{\alpha}} = 0, & (34) \end{cases}$$

其中 $\dot{x}^\mu \equiv dx^\mu/d\lambda$, $\dot{\alpha} \equiv d\alpha/d\lambda$.

为方便计,记

$$f(\lambda) = \frac{dS}{d\lambda} = [g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu + G(x)(\dot{\alpha} + eA_\mu\dot{x}^\mu)^2]^{1/2}, \tag{35}$$

注意到用了水平约束 (31) 后沿粒子轨迹有 $\partial f/\partial\dot{\alpha} = 0$, 从而可将方程 (34) 化为

$$d\varepsilon/d\lambda = 0, \quad \varepsilon(\lambda) = \text{const} = \varepsilon. \tag{36}$$

方程 (33) 可改写为

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial \dot{x}^\mu}\right)[f + \varepsilon(\dot{\alpha} + eA_\nu\dot{x}^\nu)] = 0. \tag{37}$$

设 s 为时空曲线 $x^\mu = x^\mu(\lambda)$ 的弧长参数,取 $\lambda = s$, 则 $g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 1$. 用了水平约束 (31) 后,方程 (37) 化为

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \begin{Bmatrix}\mu \\ \rho\sigma\end{Bmatrix}\frac{dx^\rho}{ds}\frac{dx^\sigma}{ds} = \varepsilon e F^\mu_\nu \frac{dx^\nu}{ds}, \tag{38}$$

其中 $F^\mu_\nu = g^{\mu\rho}(\partial_\rho A_\nu - \partial_\nu A_\rho)$. 这正是广义相对论中的 Lorentz 运动方程. 这就验证了我们的主丛上的变分原理是合理的. 由方程 (38), ε 的物理意义显然是粒子的荷质比 Z/m (Ze 为粒子电荷).

2. 非 Abel 规范场的情形

让我们用前述丛上的变分原理,来讨论一般的非 Abel 规范场中粒子的运动. 为方便引入

$$\tilde{\omega}^a = (Ad\,\sigma)^a_b\omega^b = \tilde{v}^a_b(\sigma)d\sigma^b + B^a_\mu(x)dx^\mu, \tag{39}$$

用它可把主丛 $P(M, G)$ 上的右移不变度规 (22) 改写为

$$dS^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu + g_{ab}(x)\tilde{\omega}^a\tilde{\omega}^b, \tag{40}$$

而我们关于粒子的主丛上变分原理可表述为

$$\begin{cases} \delta\displaystyle\int dS = 0, & (41) \\ \tilde{\omega}^a \equiv \tilde{v}^a_b(\sigma)d\sigma^b + B^a_\mu(x)dx^\mu = 0. & (41') \end{cases}$$

其中用到 $(Ad\,\sigma)^a_b$ 是非异矩阵,(41′) 式等价于粒子在主丛空间中的轨迹是水平曲线的约束 $\omega^a = 0$.

设粒子在主丛空间中的运动轨迹方程为

$$x^\mu = x^\mu(s), \quad \sigma^a = \sigma^a(s) \tag{42}$$

其中已取其参数 s 为时空曲线 $x^\mu = x^\mu(s)$ 的弧长. 引入 Lagrange 乘子 $\varepsilon_a(s)$, 令

$$F(S) = f(s) + \varepsilon_a(s)\frac{\tilde{\omega}^a}{ds} \quad \left(f(s) = \frac{dS}{ds} = \dot{S}\right), \tag{43}$$

则约束变分问题 (41)、(41′) 的 Euler-Lagrange 方程为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial \sigma^a} - \dfrac{d}{ds}\dfrac{\partial F}{\partial \dot{\sigma}^a} = 0, & (44) \\ \dfrac{\partial F}{\partial x^\mu} - \dfrac{d}{ds}\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}^\mu} = 0. & (45) \end{cases}$$

考虑到水平约束 (41′), 并用 Cartan-Maurer 方程

$$\frac{\partial \tilde{v}^a_b(\sigma)}{\partial \sigma^c} - \frac{\partial \tilde{v}^a_c(\sigma)}{\partial \sigma^b} = -C^a_{de}\tilde{v}^d_b(\sigma)\tilde{v}^e_c(\sigma) \tag{46}$$

(C^a_{bc} 为群 G 的结构常数), 则可将方程 (44)、(45) 化为

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x^\mu}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \rho\lambda \end{matrix} \right\} \dfrac{dx^\rho}{ds}\dfrac{dx^\lambda}{ds} = \varepsilon_a(s) F^{a\mu}_{\ \ \nu}\dfrac{dx^\nu}{ds}, & (47) \\ \dfrac{d\varepsilon_a(s)}{ds} + C^b_{ac}\varepsilon_b(s) B^c_\mu \dfrac{dx^\mu}{ds} = 0, & (48) \end{cases}$$

这就是 Wong 方程[9]. 就我们所知, 这是文献中第一次从一个几何意义非常明确的变分原理导出它.

从方程 (47) 可看出, Lagrange 乘子 $\varepsilon_a(s)$ 的物理意义仍然是荷质比

$$\varepsilon_a(s) = Q_a(s)/m, \tag{49}$$

其中 $Q_a(s)$ 是粒子与规范势 B^a_μ 耦合的非 Abel 荷.

(43)式所定义的 $F(s)$, 因而 $\varepsilon_a(s)\tilde{\omega}^a/ds$, 应该是主丛空间的标量. 但据定义 (39) 及 ω^a 的变换性质不难看出, 在时空坐标变换下 $\tilde{\omega}^a$ 不变, 而在规范变换 (4) 下 $\tilde{\omega}^a$ 像群 G 的伴随表示一样变换:

$$\tilde{\omega}^a \to \tilde{\omega}'^a = (Ad\ S(x))^a_b\tilde{\omega}^b. \tag{50}$$

因此, $\varepsilon_a(s)$ 以及非 Abel 荷 $Q_a(s)$ 在时空坐标变换下是标量, 而在定域规范变换 (4) 下的变换性质为

$$Q'_a(s) = [Ad\ S(x)^{-1}]^b_a Q_b(s), \tag{51}$$

因此它的协变导数应该是

$$D_\mu Q_a = \partial_\mu Q_a + C^b_{ac}Q_b B^c_\mu, \tag{52}$$

于是方程 (48) 可写为如下的协变形式:

$$\frac{DQ_a(s)}{ds} \equiv D_\mu Q_a \cdot \frac{dx^\mu}{ds} = 0, \tag{53}$$

即粒子的非 Abel 荷沿时空轨迹的协变导数为 0.

五、丛上的变分原理(物质场)

关于引力和规范场运动方程的主丛上变分原理, 在文献 [6, 7, 14] 和 [15] 中已有讨论. 本节仅限于讨论物质场的丛上变分原理. 为不使表述过于抽象, 我们将讨论两个具体情形: 带电标量场和同位旋 1/2 的旋量场. 不难推广到更一般的情形.

1. 带电标量场的情形

考虑主丛 $P(M, U_1)$. 最简单的情形是取丛度规 (29) 中的纤维度规 $G(x) = \text{const} =$

$-1/m_0^2$. 由量纲分析，m_0 有质量量纲；负号表示第五维是类空的(见文献 [15]，我们已取时空度规 $g_{\mu\nu}$ 的号差为 -2). 故

$$dS^2 = G_{AB}dY^A dY^B = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - m_0^{-2}(d\alpha + eA_\mu dx^\mu)^2, \tag{54}$$

其中 $Y^A = (x^\mu, \alpha)$. 显然，

$$(G_{AB}) = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} - (e/m_0)^2 A_\mu A_\nu & -m_0^{-2}eA_\mu \\ -m_0^{-2}eA_\nu & -m_0^{-2} \end{pmatrix}, \tag{55}$$

它的逆矩阵 $G^{AB}(G^{AB}G_{BC} = \delta_C^B)$ 是

$$(G^{AB}) = \begin{pmatrix} g^{\mu\nu} & -eg^{\mu\nu}A_\nu \\ -eg^{\mu\nu}A_\mu & -m_0^2 + e^2 g^{\mu\nu}A_\mu A_\nu \end{pmatrix}, \tag{56}$$

其中 $g^{\mu\nu}g_{\nu\rho} = \delta_\rho^\mu$. 由 (55) 式可见

$$\mathfrak{Y} \equiv \det(G_{AB}) = -m_0^{-2} \cdot \det(g_{\mu\nu}). \tag{57}$$

设 $\varphi(x)$ 是时空中的标量场，电荷为 Ze. 用下式引进主丛上的标量场

$$\Phi(x, \alpha) = e^{iZ\alpha}\varphi(x), \tag{58}$$

为验证 Φ 确为丛上标量，回忆 $\varphi(x)$ 的规范变换

$$\varphi(x) \to \varphi'(x) = e^{-iZ\theta(x)}\varphi(x) \tag{59}$$

以及主丛上相应的坐标变换 (4)，即

$$\alpha' = \alpha + \theta(x), \quad S(x) = e^{i\theta(x)} \tag{60}$$

由 (59)、(60) 二式不难看出 Φ 在坐标变换 (60) 下不变:

$$\Phi'(x, \alpha') = e^{iZ\alpha'}\varphi'(x) = e^{iZ\alpha}\varphi(x) = \Phi(x, \alpha). \tag{61}$$

我们取主丛上的拉氏量为

$$\mathscr{L} = G^{AB}\frac{\partial\Phi^*}{\partial Y^A}\frac{\partial\Phi}{\partial Y^B} - M^2\Phi^*\Phi, \tag{62}$$

它显然是主丛上的标量. 从上不变的变分原理

$$\delta\int \mathscr{L}\sqrt{|\mathfrak{Y}|}\,d^5Y = 0, \tag{63}$$

导致如下的 Euler-Lagrange 方程

$$G^{AB}\frac{\partial^2\Phi}{\partial Y^A\partial Y^B} + \frac{1}{\sqrt{|\mathfrak{Y}|}}\frac{\partial(\sqrt{|\mathfrak{Y}|}\,G^{AB})}{\partial Y^A}\frac{\partial\Phi}{\partial Y^B} + M^2\Phi = 0. \tag{64}$$

将(56)代入上式，注意到 G^{AB} 不依赖于 $Y^5 = \alpha$，并利用 (57) 式，以及 (58) 式所导致的

$$\frac{\partial\Phi}{\partial Y^5} = iZ\Phi, \tag{65}$$

可把方程 (64) 改写为

$$g^{\mu\nu}D_\mu D_\nu\varphi(x) + m^2\varphi(x) = 0, \quad (m^2 = M^2 + m_0^2Z^2), \tag{66}$$

其中 D_μ 表示对时空坐标和 U_1 规范变换的双重协变导数:

$$D_\mu\varphi(x) = \partial_\mu\varphi - iZeA_\mu\varphi = \varphi_{;\mu} - iZeA_\mu\varphi, \tag{67}$$

$$D_\mu D_\nu\varphi = (\partial_\nu\varphi - iZeA_\nu\varphi)_{;\mu} - iZeA_\mu(\partial_\nu\varphi - iZeA_\nu\varphi). \tag{68}$$

这里“;”表示用 Christoffel 联络的时空协变导数. 方程 (66) 即通常广义相对论中带电标量场方程. 变分原理 (63) 的主丛上不变的形式，自动保证场方程是广义协变和规范不变

的，而且导出带电标量场与引力-电磁场的耦合为最小耦合.

也可不用以上五维主丛的推导，而径直把 $\varphi(x)$ 当作独立变量. 把(56)、(58)和(65)直接代入(62)式，不难看出 $\mathscr{L}$ 即通常的拉氏量

$$\mathscr{L}=g^{\mu\nu}(\partial_\mu+iZeA_\mu)\varphi^*(\partial_\nu-iZeA_\nu)\varphi-m^2\varphi. \tag{69}$$

又由(57)式 $\mathfrak{Y}$ 与 Y^5 无关，因而(63)式左边对 Y^5 的积分仅贡献一常数因子. 这就证明了，主丛上变分原理(63)是与通常四维时空中的变分原理一致.

2. 同位旋 $\frac{1}{2}$ 的旋量场的情形

这时规范群 $G=SU_2$，其元素 $\sigma\in G$ 是 2×2 么模么正矩阵，可用三个参数 $\sigma^a(a=1,2,3)$ 描写. 我们选取主丛 $P(M,SU_2)$ 上右移不变的度规为

$$dS^2=G_{AB}dY^AdY^B=\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu+G(x)k_{ab}\omega^a\omega^b. \tag{70}$$

其中为简单起见，已设时空是平直的 $(\eta_{\mu\nu}=\mathrm{diag}(1,-1,-1,-1))$，并取(22)式中的 $g_{ab}(x)=G(x)k_{ab}$，k_{ab} 为群 SU_2 的 Cartan-Killing 度规. (70)式中已用到

$$k_{ab}=k_{cd}(Ad\,\sigma)^c_a(Ad\,\sigma)^d_b, \tag{71}$$

记 $(Ad\,\sigma^{-1})^a_b=A^a_b$，由(70)式可见

$$(G_{AB})=\begin{pmatrix}\eta_{\mu\nu}+G(x)k_{ab}B^a_\mu B^b_\nu & G(x)k_{cd}v^c_aA^d_bB^b_\mu\\ G(x)k_{cd}v^c_aA^d_bB^b_\nu & G(x)k_{cd}v^c_av^d_b\end{pmatrix}, \tag{72}$$

此方阵的逆是

$$(G^{AB})=\begin{pmatrix}\eta^{\mu\nu} & -u^a_bA^b_cB^{c\mu}\\ -u^a_bA^b_cB^{c\nu} & G(x)^{-1}k^{cd}u^a_cu^b_d+A^c_eA^d_fB^{e\mu}B^f_\mu u^a_cu^b_d\end{pmatrix}, \tag{73}$$

其中 $k^{ab}k_{bc}=\delta^a_c$，$u^a_bv^b_c=\delta^a_c$.

考虑时空中的核子场

$$\psi(x)=\begin{pmatrix}\psi_1(x)\\ \psi_2(x)\end{pmatrix}, \tag{74}$$

它是同位旋 1/2 的 SU_2 双旋量，而 $\psi_1(x)$、$\psi_2(x)$ 又都是 Dirac 四旋量. 在 SU_2 规范变换下

$$\psi(x)\to\psi'(x)=S(x)\psi(x),\quad (S(x)\in SU_2) \tag{75}$$

引进定义在主丛 P 上的量

$$\Psi(x,\sigma)=\sigma^{-1}\psi(x),\quad (\sigma\in SU_2) \tag{76}$$

则由(75)式以及主丛上相应的坐标变换

$$\sigma'=S(x)\sigma,\quad x'^\mu=x^\mu \tag{77}$$

不难验证 $\Psi'(x,\sigma')=\Psi(x,\sigma)$. 因此 $\Psi(x,\sigma)$ 在 SU_2 规范变换下是标量，在 Lorentz 变换下是 Dirac 旋量.

又引进如下的 8×8 矩阵

$$\gamma_A=\begin{cases}\gamma_\mu\otimes I, & \text{当 } A=\mu=0-3 \text{ 时}\\ 0, & \text{当 } A=5-7 \text{ 时}\end{cases} \tag{78}$$

其中 γ_μ 为 4×4 Dirac 矩阵，I 为 2×2 单位矩阵，$\otimes$表示直接积. 在 Lorentz 变换下，γ_A 变换如同协变矢量. 在 SU_2 规范变换(77)下，我们要求 γ_A 的形式(78)不变. 不难

验证，在主丛坐标变换 (77) 下 γ_A 的变换实际上也像协变矢量一样：

$$\gamma'_A = \frac{\partial Y^B}{\partial Y'^A}\gamma_B. \qquad (Y^A = (x^\mu, \sigma^a)) \tag{79}$$

事实上，由 (79) 和 (77) 式有

$$\gamma'_\mu = \frac{\partial Y^B}{\partial x'^\mu}\gamma_B = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\gamma_\nu + \frac{\partial \sigma^a}{\partial x'^\mu}\cdot 0 = \gamma_\mu,$$

$$\gamma'_a = \frac{\partial Y^B}{\partial \sigma'^a}\gamma_B = \frac{\partial x^\nu}{\partial \sigma'^a}\gamma_\nu + \frac{\partial \sigma^b}{\partial \sigma'^a}\cdot 0 = 0,$$

总之，γ_A 可视为主丛 P 上的协变矢量.

定义 $\bar{\Psi}(Y) = \Psi^+(Y)\gamma^0$，取主丛上的拉氏量为

$$\mathscr{L} = G^{AB}\bar{\Psi}(Y)i\gamma_A\frac{\partial \Psi(Y)}{\partial Y^B} - m\bar{\Psi}(Y)\Psi(Y), \tag{80}$$

则 $\mathscr{L}$ 是主丛上的标量. 从上不变的变分原理

$$\delta\int \mathscr{L}\sqrt{|\mathfrak{Y}|}\, d^7Y = 0, \tag{81}$$

导致如下的 Euler-Lagrange 方程

$$G^{AB}i\gamma_A\frac{\partial \Psi(Y)}{\partial Y^B} - m\Psi(Y) = 0. \tag{82}$$

由 (76)、(78) 和 (73) 式我们有

$$G^{AB}i\gamma_A\frac{\partial \Psi(Y)}{\partial Y^B} = G^{\mu\nu}i\gamma_\mu\frac{\partial \Psi(Y)}{\partial x^\nu} + G^{\mu a}i\gamma_\mu\frac{\partial \Psi(Y)}{\partial \sigma^a}$$

$$= \eta^{\mu\nu}i\gamma_\mu\left[\sigma^{-1}\frac{\partial \phi(x)}{\partial x^\nu} + B^c_\nu A^b_c u^a_b \sigma^{-1}\frac{\partial \sigma}{\partial \sigma^a}\sigma^{-1}\phi(x)\right]. \tag{83}$$

但 $\sigma^{-1}d\sigma$ 即 SU_2 群的 Maurer 左不变 1-形式：

$$\sigma^{-1}d\sigma = \theta^a\tau_a = v^a_b(\sigma)d\sigma^b\tau_a, \tag{84}$$

其中 τ_a 为与参数 σ^a 相应的 SU_2 李代数之基，故

$$\sigma^{-1}\frac{\partial \sigma}{\partial \sigma^a} = v^b_a(\sigma)\tau_b. \tag{84'}$$

把 (84) 式代入 (83)，并利用如下公式[5]

$$(Ad\ \sigma^{-1})^a_b\tau_a = \sigma^{-1}\tau_b\sigma,$$

可将方程 (82) 改写为

$$i\gamma^\mu(\partial_\mu + B^a_\mu\tau_a)\phi(x) - m\phi(x) = 0, \tag{85}$$

这就是通常在 Yang-Mills 场中核子场的运动方程（τ_a 常取为 $\sigma_a/2i$，σ_a 为 Pauli 矩阵）.

若将 (73)、(76) 和 (78) 三式代入 (80)，不难看出

$$\mathscr{L} = \bar{\phi}(x)i\gamma^\mu(\partial_\mu + B^a_\mu\tau_a)\phi(x) - m\bar{\phi}(x)\phi(x).$$

即 $\mathscr{L}$ 实际上与 σ^a 无关，且与四维的通常拉氏量一样. 把它代入 (81) 式，完成对 $d^3\sigma^a$ 的积分（贡献一常数因子），这样也可把从上高维的变分原理 (81) 化为四维时空中通常的变分原理.

当 $\phi(x)$ 属于 SU_2 群的任一表示 $\mathscr{R}$ 时，它在规范变换 (77) 下的变换规律是

$$\phi(x) \to \phi'(x) = \mathscr{R}(S(x))\phi(x), \tag{86}$$

其中 $\mathscr{R}(\tau)(\tau\in SU_2)$ 是群元素 τ 相应的表示矩阵. 这时，主丛上的场 $\Psi(x,\sigma)$ 的定义(76)应换为

$$\Psi(x,\sigma)=\mathscr{R}(\sigma^{-1})\phi(x), \tag{87}$$

上面的整个推导都可照搬,只是(84)式换为

$$\mathscr{R}(\sigma^{-1})d\mathscr{R}(\sigma)=v_b^a(\sigma)d\sigma^b\cdot\mathscr{R}(\tau_a), \tag{88}$$

且方程(85)中的 τ_a 换为相应的 $\mathscr{R}$ 表示中的生成元 $T_a=\mathscr{R}(\tau_a)$.

此外,我们还指出,若对自旋为0的场采取五分量的一阶 Duffin-Kemmer 表述,则仿照以上的做法,可同样把它写成主丛上协变的形式.

评注 在由丛上变分原理(63)或(81)推导 Euler-Lagrange 方程(64)或(82)时，有一个选择丛上的积分区域的问题. 因为变分时应要求积分区域的边界处场函数的变分为0. 为此我们选取丛上的积分区域为 $\pi^{-1}(U)$,这里 $\pi:P\to M$ 为丛的投影，U 为时空 M 中的任意区域. 由于 $\pi^{-1}(U)$ 的边界 $\partial\pi^{-1}(U)$ 恰好即是 $\pi^{-1}(\partial U)$ (∂U 表示 M 中 U 的边界),所以丛上的边界条件(根据(58)或(76)式)等价于通常时空中变分原理所要求的边界条件:

$$\delta\Phi(Y)|_{\partial\pi^{-1}(U)}=0 \iff \delta\varphi(x)|_{\partial U}=0. \tag{89}$$

六、结 语

物理上规范场的概念等价于数学上纤维丛上的联络,现在这已成为大家熟悉的事情. 但是纤维丛本身是否具有现实的物理意义，人们对此尚未充分注意. 许多人把纤维丛仅仅当作一种方便的数学工具. 他们只使用纤维丛理论中联接函数、截面和联络等概念,避免涉及丛空间本身. 我们的观点是应该重视纤维丛高维空间的物理意义的探讨. 根据本文的表述,把丛空间看做是时空(底)和联系于规范变换自由度的内部空间(纤维)相统一的物理空间是可行的.

这个观点对简化(统一)物理观念有如下好处:

(i) 时空和内部空间统一于丛空间; (ii) 时空坐标变换和局域规范变换统一理解为丛上的局部(主)坐标变换; (iii) 规范场是丛空间度规的分量,因此引力场和内部对称性的规范场统一于丛的度规场; (iv) 时空中的广义协变性和内部规范不变性统一理解为丛上的广义协变性; (v) 丛上不变的变分原理自动给出粒子和物质场与引力-规范场的耦合是最小耦合.

本文的表述实际上是统一引力和规范场的高维统一场论，它是老的 Kaluza-Klein 五维理论的新翻版及其非 Abel 推广[6,7]. (把引力和规范场中粒子和物质场的运动规律写为简洁的高维主丛上的变分原理的形式，是本文的新贡献.) 长期以来对于高维统一场论的主要异议是问: 为什么时空以外的其它维没有被观测到? 在紧致规范群的高维主丛理论中,此问题可回答如下: 相应于内部空间的那些附加维是类空且闭合的,其线度为 Planck 长度 ($\sim10^{-32}$cm) 量级,故未能直接被观测到[15]. 因此，高维主丛的统一场论值得注意.

本文只讨论了经典场论，未涉及量子化. 此外也没涉及有对偶荷时大范围的拓扑性质. 从丛空间角度进一步探讨这些问题也值得注意.

附录　Ad-Ad 型张量的存在性证明

令 $Ad(G)$ 为 n 维 Lie 群 G 的伴随表示．构造配丛 $E(M, V^n\otimes V^n, Ad(G)\times Ad(G), P)$[5]，其中 V^n 是 n 维线性空间．据定义，P 的底 M 有开遮盖 $\{U_\lambda\}$，对每一 U_λ 有 $V^n\otimes V^n$ 的一组基 $e^a_{(\lambda)}(x)\otimes e^b_{(\lambda)}(x)(a, b=1,\cdots,n)$，使得当 $x\in U_\lambda\cap U_\mu$ 时有

$$e^a_{(\lambda)}(x)\otimes e^b_{(\lambda)}(x)=(Ad\,\varphi_{\lambda\mu}(x)^{-1})^a_c(Ad\,\varphi_{\lambda\mu}(x)^{-1})^b_d\,e^c_{(\mu)}(x)\otimes e^d_{(\mu)}(x). \qquad (A.1)$$

M 上的二阶协变 Ad-Ad 型张量是一截面 $g: M\to E$；即对每一 U_λ 有 n^2 个连续函数 $g^{(\lambda)}_{ab}(x)(x\in U_\lambda)$，使得当 $x\in U_\lambda\cap U_\mu$ 时有

$$g^{(\lambda)}_{ab}(x)=g^{(\mu)}_{cd}(x)(Ad\,\varphi_{\lambda\mu}(x))^c_a(Ad\,\varphi_{\lambda\mu}(x))^d_b. \qquad (A.2)$$

引理　若 M 有可数基，则必存在（实际上有无穷多）对称（正定）的二阶协变 Ad 型张量．

证明　由于 M 有可数基，对开覆盖 $\{U_\lambda\}$，据单位分解定理，有一组无穷可微的函数 $\{f_\lambda\}$，满足

（1）$0\leqslant f_\lambda\leqslant 1$，$f_\lambda$ 有紧致支集且包含于 U_λ．

（2）$\sum\limits_\lambda f_\lambda=1$．

（3）M 中任意紧致子集上只有有限个 f_λ 非零．

在每个 U_λ 中任取一个对称（正定）的 n^2 个无穷可微函数 $g^{(\lambda)}_{ab}(x)$，并令

$$T^{(\lambda)}=g^{(\lambda)}_{ab}(x)e^a_{(\lambda)}(x)\otimes e^b_{(\lambda)}(x). \qquad (x\in U_\lambda)$$

定义 M 上的二阶协变 Ad 型张量

$$g=\sum_\lambda f_\lambda(x)T^{(\lambda)}, \qquad (A.3)$$

由单位分解的性质（3）、（1），对任一点 $x\in M$，最多只有有限个 $U_{\lambda_1},\cdots,U_{\lambda_k}$，使得 $x\in U_{\lambda_1}\cap\cdots\cap U_{\lambda_k}$，且

$$g=f_{\lambda_1}T^{(\lambda_1)}+\cdots+f_{\lambda_k}T^{(\lambda_k)},$$

所以对每点 $x\in M$，(A.3) 式右边只有有限项非零，因而 (A.3) 式是有意义的．此外，由性质 (2)，这些 $f_{\lambda_1},\cdots,f_{\lambda_k}$ 不能全为 0，由此知 g 非零．由构造式 (A.3)，g 的对称（正定）性是明显的．（证毕）

从证明中知道，这些对称（正定）的二阶协变 Ad 型张量场可以有无穷多个．

参　考　文　献

[1] 吴詠时、陈时、郭汉英，中国科学，1978 年279 页；*Scientia Sinica*, **21**(1978), 193.
[2] R. Jackiw and C. Rebbi, *Phys. Rev.*, **D14**(1976), 517.
[3] 吴詠时、吴建时，科学通报，**23**(1978), 601.
[4] R. Jackiw and C. Rebbi. *Phys. Rev. Lett.*, **36**(1976), 1116.
[5] 有关纤维丛的数学知识，可参阅陆启铿"纤维丛与规范场讲义"，(1973)；或
S. Kabayashi and K. Nomizu, ''Foundations of Differential Geometry,'' Vol. 1, 1963.
[6] Y. M. Cho, *J. Math. Phys.*, **16**(1975), 2029.
[7] L. N. Chang, K. I. Macrae and F. Mansouri, *Phys. Rev.*, **D13**(1976), 235.
[8] 吴詠时、郭汉英，中国科学，1977 年 308 页；*Scientia Sinica*, **20**(1977), 186.
[9] S. K. Wong. *Nuovo Cimento*, **65A**(1970), 689.
[10] 陆启铿，物理学报，**23**(1974), 249.

[11] W. Greub, S. Halperin and R. Vanstein. "Connections, Curvature & Cohomology", Vol. II, 1973.
[12] H. Whitney, *Ann. Math.*, **37**(1935), 645.
[13] C. N. Yang, *Phys. Rev. Lett.*, **33**(1974), 445.
[14] 郭汉英,科学通报,**23**(1978),407.
[15] 吴詠时, Preprint IHES/P/79/271., 物理学报,**29**(1980),395.

RIGHT-TRANSLATION INVARIANT METRICS AND VARIATIONAL PRINCIPLES ON A PRINCIPAL BUNDLE —TREATED AS THE UNION OF SPACE-TIME AND AN INTERNAL SPACE

WU YONG-SHI
(*Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica*)
LU QI-KENG
(*Institute of Mathematics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

In this paper, we discuss how to assign a metric on a principal bundle and how to rewrite the variational principles for a particle and for matter fields in an invariant from on the bundle in the principal-bundle formulation of gauge theories. We show that the right-translation invariant metric on the bundle must contain quantities which transform exactly as gauge potentials, thus providing a new formalism for gauge fields. And we formulate the variational principle for a particle moving in the gauge field as follows: The particle moves along a horizontal geodesic on the principal bundle. Starting from this we derive the Wong's equations of motion.

Moreover, we elucidate the physical view-point which treats the bundle space as the union of space-time and the internal space. Advantages of this viewpoint for understanding the essentialities of gauge transformations and gauge invariance and for establishing unified theories of gravitation and gauge fields are also discussed.