

关于 (e^+e^-) , $(\mu^+\mu^-)$ 原子在库仑场的裂解

庆承瑞

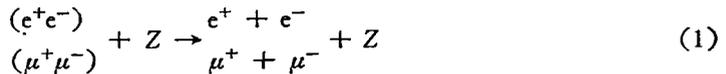
(中国科学院理论物理研究所)

摘 要

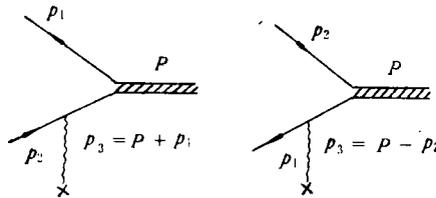
本文应用了复合粒子场论的微扰展开理论^[1]和自旋为 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ 的库仑相互作用原子的 Bethe-Salpeter 协变波函数的近似解^[2], 计算了 (e^+e^-) $(\mu^+\mu^-)$ 原子的高速飞行下裂解截面及能谱. 结果表明 (e^+e^-) 原子的裂解截面比前人的计算约小 20%^[3]. 此外, 计算还表明 (e^+e^-) 及 $(\mu^+\mu^-)$ 原子的单态和三重态裂解截面对任意主量子数 n , 和极端相对论近似下将精确相等, 而前人的计算中只是 $n = 2$ 时才有这一结果, 而对 $n = 1$ 时, 两者相差约有 25%^[3]. 看来很可能是计算中的错误所致.

近年来, 国内发展了一套复合粒子场论理论和相应的微扰展开理论^[1]. 利用这一理论方法可以处理高速飞行的束缚态系统. 特别有兴趣的是研究由纯库仑场组合而成的相对论原子如 (e^+e^-) $(\mu^+\mu^-)$ 等. 文献 [4] 中讨论了形成 (e^+e^-) 或者 $(\mu^+\mu^-)$ 原子束的可能性. 同时, 国外也有人讨论了可能产生 (e^+e^-) 原子束的一些实验^[3,5]. 但是, 为了能得到流强较强的 (e^+e^-) 或 $(\mu^+\mu^-)$ 原子束, 必须知道这类原子的库仑裂解截面, 只有这样才能选取适当的靶核, 确定靶的厚度和设计有关实验. 关于 (e^+e^-) 原子的裂解截面曾在 [3] 中用准势方程进行过计算. 但对 $(\mu^+\mu^-)$ 原子的裂解, 却并未讨论过. 这里我们应用 [1] 中发展的复合粒子场论的微扰展开式和 [2] 中得到的 (e^+e^-) , $(\mu^+\mu^-)$ 原子的协变 B-S 波函数, 重新计算了这些原子的裂解截面.

对于 (e^+e^-) , $(\mu^+\mu^-)$ 原子裂解反应



的最低次微扰展开式的费曼图是:



本文 1979 年 3 月 22 日收到.

由普遍理论可知,只包含上述两图的矩阵元不满足规范不变^[6],但其破坏部分仅为 $O(\alpha)$ 级的修正. (α 为精细结构常数). 因此,在一定精度范围内取上述两图已足够精确. 下面的计算都是只取这两图来进行的.

如果略去原子核的反冲,则和上两图相应的 S 矩阵元就是:

$$\begin{aligned} \langle f|S|i\rangle &= -i2\pi\delta(E_0 - E_1 - E_2)T(p_1, p_2, P), & (2) \\ T(p_1, p_2, P) &= \bar{u}(p_1) \left\{ \gamma_4 \frac{1}{(P - p_2)^2 + m^2} \Gamma_P \left(p_2 - \frac{P}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \Gamma_P \left(p_1 - \frac{P}{2} \right) \frac{1}{(p_1 - P)^2 + m^2} \gamma_4 \right\} V(p_2) \frac{Ze^2 F(q^2)}{q^2} \frac{1}{\sqrt{8E_1 E_2 E_0}} \end{aligned} \quad (3)$$

式中 p_1 代表电子 (μ^- 介子) 的四动量, p_2 代表 e^+ (μ^+ 介子) 的四动量. P 是 (e^+e^-) 或 $(\mu^+\mu^-)$ 原子的四动量. E_0, E_1 和 E_2 分别代表原子, 粒子和反粒子的总能量. $F(q^2)$ 是 Thomas-Fermi 原子的库仑场形状因子, $q = P - p_1 - p_2$. $\Gamma_\nu(p)$ 是束缚态的顶角函数, 对于 0^- 状态的原子有

$$\Gamma_P(p) = f(p) \left(1 - \frac{i\hat{P}}{2m} + \frac{\hat{P}\hat{p} - \hat{p}\hat{P}}{4m^2} \right) \gamma_5; \quad (4)$$

对于 1^- 状态原子有

$$\Gamma_P(p) = f(p) \left(\hat{e} - \frac{i\hat{P}\hat{e}}{2m} - \frac{i(e\hat{p})}{m} + \frac{1}{2m^2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} e_\mu p_\nu P_\rho \gamma_\sigma \gamma_5 \right), \quad (5)$$

式中 e 为原子的极化四矢量.

如果原子处于基态,即主量子数 $n = 1$, 角动量 $l = 0$ 时,

$$f(p) = \frac{N_1}{\left(p^2 + m^2 + \frac{P^2}{4} \right)}, \quad (6)$$

N_1 是基态的 B-S 波函数的归一化常数,

$$N_1 = 16 \sqrt{2\pi m^4} \left(1 + \frac{P^2}{4m^2} \right)^{5/4} \approx 4\sqrt{\pi} m^4 \alpha^{5/2}. \quad (7)$$

如果原子处在 $n = 2, l = 0$ 的激发态,则

$$f(p) = \frac{N_2 \left(-p^2 + m^2 + \frac{P^2}{4} \right)}{\left(p^2 + m^2 + \frac{P^2}{4} \right)^2}. \quad (8)$$

N_2 是相应的波函数归一化因子

$$N_2 \cong 32 \sqrt{2\pi m^4} \left(1 + \frac{P^2}{4m^2} \right)^{5/4} \approx \sqrt{2\pi} m^4 \alpha^{5/2}. \quad (9)$$

利用正反粒子所满足狄拉克方程, 可以将 (2) 式化简, 并对矩阵元绝对值平方, 和对始末态自旋求和. 这样对 0^- 原子得到:

$$\begin{aligned} \sum_{i,f} |\langle f|S|i\rangle|^2 &= 4\pi^2 \delta^2(E_0 - E_1 - E_2) \frac{N_1^2 z^2 e^4 F^2(q^2)}{2E_0 E_1 E_2 m^2} \frac{1}{q^4} \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{1}{A^2} \left[s^2(m^2 + p_1 p_2^+) - p^2 \left(1 - \frac{p_1 p_2^+}{m^2} \right) + 2s(p_1 P^+ - p_2 P) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_3 = & \left\{ 4m^2 + 3PP^+ + 4(p_1P^+ + p_2P^+) - 2(p_1P + p_2P) \right. \\
& - 10p_1p_2 - 2(p_1p_1^+ + p_2p_2^+) + E_0^2 + \left(\frac{E_0^2}{2m^2} - \frac{PP^+}{4m^2} \right) (p_1P^+ \\
& + p_2P^+ - p_1P - p_2P + \frac{1}{2}PP^+) + \frac{1}{m^c} [E_0^2(p_1p_2^+) + (p_1p_1^+)(p_2P) \\
& + (p_2p_2^+)(p_1P)] - \frac{p_1p_2}{m^2} (p_1P^+ + p_2P^+ - 2p_1p_2^+ - PP^+) \\
& + \frac{2(p_1p_2^+)}{m^2} (p_1P + p_2P - 2PP^+) + \frac{1}{m^2} \left[\frac{7}{2} (p_1P^+)(p_2P^+) \right. \\
& - (p_1P)(p_2P) + (p_1P)(p_1P^+) + (p_2P)(p_2P^+) - (p_1P^+)(p_2P) \\
& \left. - (p_1P)(p_2P^+) \right] + \frac{p_1p_2^+}{m^4} \left[(p_1P)(p_2P) - \frac{1}{2} (p_1P^+)(p_2P^+) \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} (p_1p_2^+)(PP^+) \right] + \frac{1}{m^2} [p_1^2P^2 + p_2^2P^2 - (p_1P)^2 - (p_2P)^2 \\
& + 3P^2(p_1p_2) - 3(p_1P)(p_2P) + 2p_1^2(p_2P) + 2p_2^2(p_1P) \\
& - 2(p_1p_2)(p_1P) - 2(p_1p_2)(p_2P)] - \frac{p_1p_2^+}{m^4} [(p_1p_2)P^2 \\
& - (p_1P)(p_2P)] + \frac{1}{m^4} [(p_1p_2)^2P^2 + p_1^2(p_2P)^2 + p_2^2(p_1P)^2 \\
& \left. - p_1^2p_2^2P^2 - 2(p_1p_2)(p_2P)(p_1P) \right] \}. \quad (16)
\end{aligned}$$

在求相应的裂解截面时，必须对 p_1, p_2 的所有方面和能量积分。为了能得到在能近近似下截面的解析定性行为，我们作如下的近似：因为矩阵元平方的表达式中分母 A 和 B 都是 $\cos \theta_1$ 和 $\cos \theta_2$ 的二次以上函数 (θ_1 和 θ_2 代表正反粒子与入射原子束方向的夹角)，且都有极小值。因此对角度积分的主要贡献是在分母为极小之处，因此分子之值可取在分母为零时之值。经过这一简化，立即得到，对单态有：

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j} |\langle f|S|i \rangle|^2 \approx & \frac{1}{q^4} \left\{ \frac{4}{A^2} \left(2E_1^2 - \frac{1}{2}q^2 \right) + \frac{4}{B^2} \left(2E_2^2 - \frac{1}{2}q^2 \right) \right. \\
& \left. + \frac{2}{AB} \left[2m^2 + 8E_1E_2 + \left(2 - \frac{E_0^2}{m^2} \right) q^2 \right] \right\}; \quad (17)
\end{aligned}$$

对三重态有：

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j} |\langle f|S|i \rangle|^2 \approx & \frac{1}{q^4} \left\{ \frac{12}{A^2} \left(2E_1^2 - \frac{1}{2}q^2 \right) + \frac{12}{B^2} \left(2E_2^2 - \frac{1}{2}q^2 \right) \right. \\
& \left. + \frac{2}{AB} \left[8E_0^2 - 12E_1^2 - 12E_2^2 + 16E_1E_2 - 4q^2 + \frac{E_0^2}{4m^4} q^4 \right] \right\}. \quad (18)
\end{aligned}$$

除此以外，对角度积分后还发现，在极端相对论近似下，矩阵元平方中的相干项，即正比于 $\frac{1}{AB}$ 的项和前两项相比，都是小量。因此在对始态原子自旋取平均后，单态原子和三重态原子的裂解几率相等。这在物理上也是合理的。

利用 (17) 式和 (18) 式，先对粒子角度求积分，并取极端相对论近似，对于纯库仑场，

和 $n = 1, l = 0$ 的原子, 其能谱为:

$$\frac{d\sigma(E_1)}{dE_1} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{z^2 e^4 N^2 E_0^5}{m^{12}} \frac{16}{5} |\mathbf{p}_1| |\mathbf{p}_2| \left(\frac{E_2^4}{(aE_2^2 + bE_2 + c)^5} + \frac{E_1^4}{(aE_1^2 + bE_1 + c)^5} \right). \quad (19)$$

式中

$$a = 4(1 - \Delta), \quad b = -4E_0(1 - \Delta), \quad c = E_0^2 - 8m^2\Delta,$$

$\Delta = \frac{\varepsilon}{2m}$, ε 为原子结合能. 在对能量求积分时, 仍然利用分母为高次函数, 及 $\Delta \ll 1$,

和在 $E_1 \sim \frac{E_0}{2}$ 时有极小, 对分子作简化, 由 (19) 式得到裂解截面为:

$$\sigma = \frac{14\pi z^2 E_0^2}{\alpha^4} \frac{r_i^2}{m_i^2}. \quad (20)$$

其中 m_i 为产生粒子的质量, i 代表 e 或 μ ; r_i 为 i 粒子的经典半径.

由式 (20) 可知截面按 E_0 的平方发散, 且与质量的四次方成反比. 但事实上, 必须考虑原子库仑场的屏蔽效应. 为了使近似的解析计算有可能, 以及保持一定的精度, 我们选取 Thomas-Fermi-Moliere 模型^[7,8], 取

$$F(q^2) = \sum_{i=1}^3 \frac{\alpha_i}{q^2 + \beta_i^2}, \quad (21)$$

式中

$$\beta_i = \frac{b_i m_e}{121} z^{1/3}. \quad (22)$$

α_i 和 b_i 是根据数值解而选取的常数:

$$\alpha_1 = 0.1, \quad \alpha_2 = 0.55, \quad \alpha_3 = 0.35, \quad b_1 = 6.0, \quad b_2 = 1.2, \quad b_3 = 0.3, \quad (23)$$

于是经过不困难但是繁杂的计算, 对 $n = 1$ 和极端相对论条件下, 得到的裂解能谱为:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dE_1} = & \frac{N^2(121)^2 z^{4/3} e^4 E_0}{(2\pi)^3 m_e^2 m_i^8} \left\{ \frac{p_1 p_2}{6} \sum_{i=1}^3 \frac{\alpha_i^2}{b_i^2} \left[\frac{E_2^2}{(aE_2^2 + bE_2 + c)^3} + \frac{E_1^2}{(aE_1^2 + bE_1 + c)^3} \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{3} \sum_{i \neq j} \frac{\alpha_i \alpha_j}{(b_i^2 - b_j^2)} \ln \frac{b_i^2}{b_j^2} \left[\frac{p_2 E_1 E_2^2}{(aE_2^2 + bE_2 + c)^3} + \frac{p_1 E_2 E_1^2}{(aE_1^2 + bE_1 + c)^3} \right] \right\}. \quad (24) \end{aligned}$$

对于 $n = 2, l = 0$ 态, 有:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dE_1} = & \frac{N^2(121)^2 z^{4/3} e^4 E_0^2 E^2}{(2\pi)^3 m_e^2 m_i^{10}} \left\{ \frac{2}{5} p_1 p_2 \Sigma \frac{\alpha_i^2}{b_i^2} \left[\frac{p_2 E_2^4}{(4p_1^2 + \beta_i^2)(aE_2^2 + bE_2 + c)^5} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{p_1 E_1^4}{(4p_2^2 + \beta_i^2)(aE_1^2 + bE_1 + c)^5} \right] + \sum_{i \neq j} \frac{\alpha_i \alpha_j}{(b_i^2 - b_j^2)} \ln \frac{b_i^2}{b_j^2} \cdot \frac{12}{5} \right. \\ & \left. \cdot \left[\frac{p_2 E_1^2 E_2^4}{p_1 (aE_2^2 + bE_2 + c)^5} + \frac{p_1 E_1^4 E_2^2}{p_2 (aE_1^2 + bE_1 + c)^5} \right] \right\}, \quad (25) \end{aligned}$$

式中 Σ 为 $n = 2$ 状态时原子的结合能.

应用同样的近似办法, 可以得到有屏蔽时 $n = 1$ 及 $n = 2$ 时的总截面:

$$\sigma = 4\pi \sum_{i \neq j}^3 \left(\frac{\alpha_i^2}{b_i^2} + \frac{2\alpha_i \alpha_j}{b_i^2 - b_j^2} \ln \frac{b_i^2}{b_j^2} \right) (121)^2 z^{4/3} r_e^2, \quad (26)$$

和

$$\sigma = 8\pi \sum_{i \neq j}^3 \left(\frac{\alpha_i^2}{b_i^2} \frac{5}{8} + \frac{2\alpha_i \alpha_j}{b_i^2 - b_j^2} \ln \frac{b_i^2}{b_j^2} \cdot \frac{13}{16} \right) (121)^2 z^{4/3} r_e^2, \quad (27)$$

式中 r_e 是电子的经典半径。

由 (26) 和 (27) 式可知: 考虑库仑场屏蔽效应后, 截面不再随能量增加, 而是趋向一常数。有趣的是: 截面随 z 的关系不再是平方增涨, 而是以 z 的 $4/3$ 次方上升。更重要的是: 总截面不仅是一常数, 而且与粒子质量无关, 即 (e^+e^-) 原子的裂解截面和 $(\mu^+\mu^-)$ 的相同。为理解这一特征可以先讨论没有屏蔽时截面随能量变化的行为。如果入射能量 E_0 固定, $(\mu^+\mu^-)$ 原子裂解截面比 (e^+e^-) 的小 $(205)^4$ 倍。如果固定 $\frac{E_0^2}{m_i^2}$, 则 $(\mu^+\mu^-)$ 原子的裂解截面小 $(205)^2$ 倍。也就是说, 当 $\frac{E_0^2}{m_i^2}$ 相同时, 裂解截面基本上由原子的结合能决定。因为原子的结合能 $\varepsilon_i \propto \alpha^2 m_i$, 和结合能所对应的最大碰撞距离

$$R_{\max} \sim \frac{1}{\varepsilon_i} = \frac{1}{\alpha^2 m_i},$$

由式 (20) 可以看出:

$$\sigma \approx \frac{E_0^2}{m_i^2} R_{\max}^2.$$

而 Thomas-Fermi 原子半径

$$R_T \sim \frac{121}{m_e},$$

所以对于电子, 总有 $R_T \ll R_{\max}$ 。因此对于 (e^+e^-) 的裂解, 必须考虑原子库仑场的屏蔽效应。但 μ 介子因其质量比电子的大 205 倍, 就有 $R_{\max}/R_T \approx 1.3$, 因此只是在非常低能时, 可以略去屏蔽效应, 而当原子束能量较大后, 其截面都只能由 Thomas-Fermi 原子半径决定, 而与粒子质量无关。因此只是在极有限的能区内, 出现屏蔽对 (e^+e^-) 的裂解重要, 而对 $(\mu^+\mu^-)$ 不重要的现象。这一结论与 [7] 中所讨论的关于光生粒子对的情况不尽一样。在那里, 因为没有结合能的问题, 碰撞的最大距离由反冲决定, 因此在一般情况下光生 $\mu^+\mu^-$ 介子对时可以不考虑库仑场的屏蔽。但如果能量十分大, 其截面将超过 Thomas-Fermi 原子时, 截面就将由后者决定了。

最后, 假定入射原子束能量是 1 GeV 以上, 则由以上讨论可知, 不论对 (e^+e^-) 或 $(\mu^+\mu^-)$ 原子都需要考虑屏蔽。根据式 (26) 和 (27), 分别计算了 $n=1$ 和 $n=2$ 时, 入射能量为 1 GeV 的下列元素的裂解截面:

	$n=1$	$n=2$
z	6.10^{17}cm^2	6.10^{17}cm^2
Al ¹³	0.142	0.205
Ni ²⁸	0.395	0.570
Mo ⁴²	0.679	0.976

和 [3] 中结果相比较, 一般相差约为 20% 左右。这可能反映了不同计算方法的差别。但这里的计算不论在实质和形式上都是完全协变的。此外, 根据我们的推导, 在这一能区,

单态和三重态裂解截面应该相等。而 [3] 中对 $n = 1$, 截面相差约达 25% 之多, 但在 $n = 2$ 时, 单态和三重态的截面却又完全相等。考虑到原子波函数的旋量结构与主量子数 n 无关, 而同一 n 时不同旋量结构, 即单态和三重态波函数的空间部分应该一样。因此不同 n 不可能导致单态和三重态截面比有如此大的变化, 很可能作者在计算时出现了错误。

参 考 文 献

- [1] 何祚麻、张肇西、黄涛, 物理学报, **25** (1976), 215;
何祚麻、张肇西、黄涛, 物理学报, **26** (1977), 540.
- [2] 何炬、张肇西、何祚麻, 高能物理与核物理, **3**(1979).
- [3] Л. С. Дудьян, А. М. Кошнян, Р. Н. Фаустов, Я. Ф., **25** (1977), 814.
- [4] 何炬、张肇西、何祚麻, 高能物理与核物理, **3**(1979), 117.
- [5] А. А. Ахундов et al., Я. Ф., **27**(1978), 1542.
- [6] 张肇西、何祚麻, 高能物理与核物理, **2**(1978), 119.
- [7] Y. S. Tzai, Rev. Mod. Phys., **46**(1974), 815.
- [8] G. Moliere, Z. Naturforsch, **A2**(1947), 133.

ON THE COULOMB DISINTEGRATIONS OF ATOMS (e^+e^-) AND $(\mu^+\mu^-)$

QING CHENG-RUI

(Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

The cross sections and energy spectra of the Coulomb disintegration of (e^+e^-) and $(\mu^+\mu^-)$ at high energies are calculated by using the perturbation expansion of composite field theory [1] and the approximate covariant solution to Bethe-salpeter equation with Coulomb potential and spin $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$ ⁽²⁾. The cross sections of disintegration of (e^+e^-) are about 20% less than the cross sections calculated by others [3]. Besides; the results obtained in this paper indicate that the cross sections of coulomb disintegration of (e^+e^-) or $(\mu^+\mu^-)$ at high energies in singlet state and triplet state are equal exactly, while in [3] this occurs only when $n = 2$, and when $n = 1$ the differences between the cross sections in the two states are about 25%. It is very likely that there were some mistakes in these calculations.