

对关联处理方法的讨论

程檀生 曾谨言

(北京大学)

提 要

本文讨论了对关联的两种处理方法的优缺点。在单粒子能级均匀分布的模型下,讨论了对关联对于二粒子转移反应截面、分支比、结合能以及能谱的影响。泡利原理的重要性清楚地表现了出来。

原子核内的对关联,多年来一直沿用BCS方法来处理^[1-3]。这方法最大的优点是计算较为简便,物理概念(准粒子)较为清楚,并且在此基础上发展了处理其他剩余相互作用的一系列方法。然而在原子核的具体情况下,为此而付出的代价很大。主要是:

1. 在原子核内,对力平均强度 $G < b$ (b ——单粒子能级平均间距)。对力只影响到费密面附近不太多的能级或粒子。在此情况下,粒子数不确定值 $\Delta n/n \sim 20\%$ 。对于随粒子数平滑变化的量,或在随粒子数平滑变化的区域,这问题并不严重。但有不少现象,例如原子核转动惯量的回弯现象,在某些地方(例如 $N = 98$)随粒子数急剧变化,对问题下结论时就应特别小心。虽然可以采用粒子数投影方法来补救,但这样一来,这个方法简便的优点就大为削弱了。

2. 对关联的实质在于原子核性质的奇偶差(例如质量奇偶差、能谱奇偶差、转动惯量奇偶差、库仑位移奇偶差等)。在这里,奇核子的堵塞效应起了决定性作用,而要严格计及堵塞效应,使用准粒子概念将非常麻烦,还不如回到平常粒子的概念。当奇偶差本身变化很快的情况,尤其要注意这问题。

3. 随粒子数不守恒而产生的一系列问题,如假态、不同准粒子态的粒子数平均值不相同,以及正交性等问题,虽可用各种办法补救,但这又使计算大为复杂化。

4. 在有些区域,例如满壳附近,若原子核并不处于超导态,也不能用BCS方法处理其对关联。此外,在使用准粒子来表达哈密顿量时,忽略了高级项(准粒子相互作用),这样造成的误差究竟多大,很难准确估计。因此当BCS方法的计算结果与实验不一致时,究竟是由于对力的简单性造成,还是处理方法本身的问题,就难以判断。

以上诸困难,在对力的粒子数守恒(PNC)处理方法中^[4-6],都自动消失。与BCS方法相比,PNC方法在计算上要复杂一些。如果涉及到的粒子数或能级数太大,处理来自

然就很繁杂。但正如前面已提到那样，由于 $G < b$ ，实际应用它来处理原子核基态及低激发态性质时，涉及到的只是费密面附近不太多的能级，再加上粒子数守恒(PNC)方法的计算程序很简单，使用起来并不麻烦。以下将以一些典型情况来说明。

二

哈密顿量取习用的形式

$$H = \sum_{\nu} \epsilon_{\nu} (a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu} + a_{\bar{\nu}}^{\dagger} a_{\bar{\nu}}) - G \sum_{\mu \nu} a_{\mu}^{\dagger} a_{\mu}^{\dagger} a_{\bar{\nu}} a_{\nu} \quad (1)$$

假设单粒子能级 ϵ_{ν} 二重简并， $\bar{\nu}$ 代表 ν 的时间反演态。设费密面附近单粒子能级均匀分布，取间距 $b = 1$ 。当讨论原子核低激发态性质时，具体计算表明，在一般要求下，考虑费密面附近 10 条能级就可以了。若要求更细致一些，不妨多考虑一些能级，此时只要对 G 适当重整化，结果并无明显差异，例如对于具有偶数中子(质子)的核，其基态及对激发态的波函数的一般形式为

$$A_{am}^{\dagger} |0\rangle = \sum_{\rho_1 \dots \rho_m} v_{\rho_1 \dots \rho_m}^a S_{\rho_1 \dots \rho_m}^{\dagger} |0\rangle, \quad (2)$$

$$S_{\rho_1 \dots \rho_m}^{\dagger} = S_{\rho_1}^{\dagger} \dots S_{\rho_m}^{\dagger}, \quad S_{\rho_1}^{\dagger} = a_{\rho_1}^{\dagger} a_{\bar{\rho}_1}^{\dagger}.$$

$\alpha = 0$ (g. s.), $1, 2, \dots$ (对激发态)

而 $v_{\rho_1 \dots \rho_m}^a$ 满足下列方程

$$[E_{\alpha} - 2\epsilon_{\rho_1 \dots \rho_m}] v_{\rho_1 \dots \rho_m}^a + G \left[\sum_{\rho_1'} v_{\rho_1' \rho_2 \dots \rho_m}^a + \sum_{\rho_2'} v_{\rho_1 \rho_2' \dots \rho_m}^a + \dots + \sum_{\rho_m'} v_{\rho_1 \dots \rho_m'}^a \right] = 0, \quad (3)$$

其中 $\epsilon_{\rho_1 \dots \rho_m} = \epsilon_{\rho_1} + \epsilon_{\rho_2} + \dots + \epsilon_{\rho_m}$.

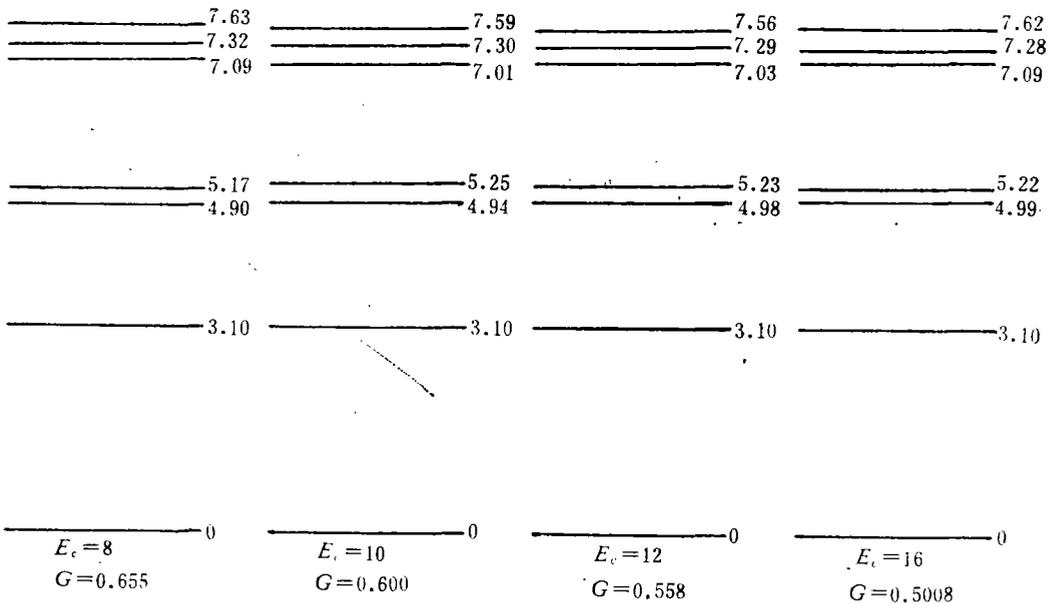


图 1

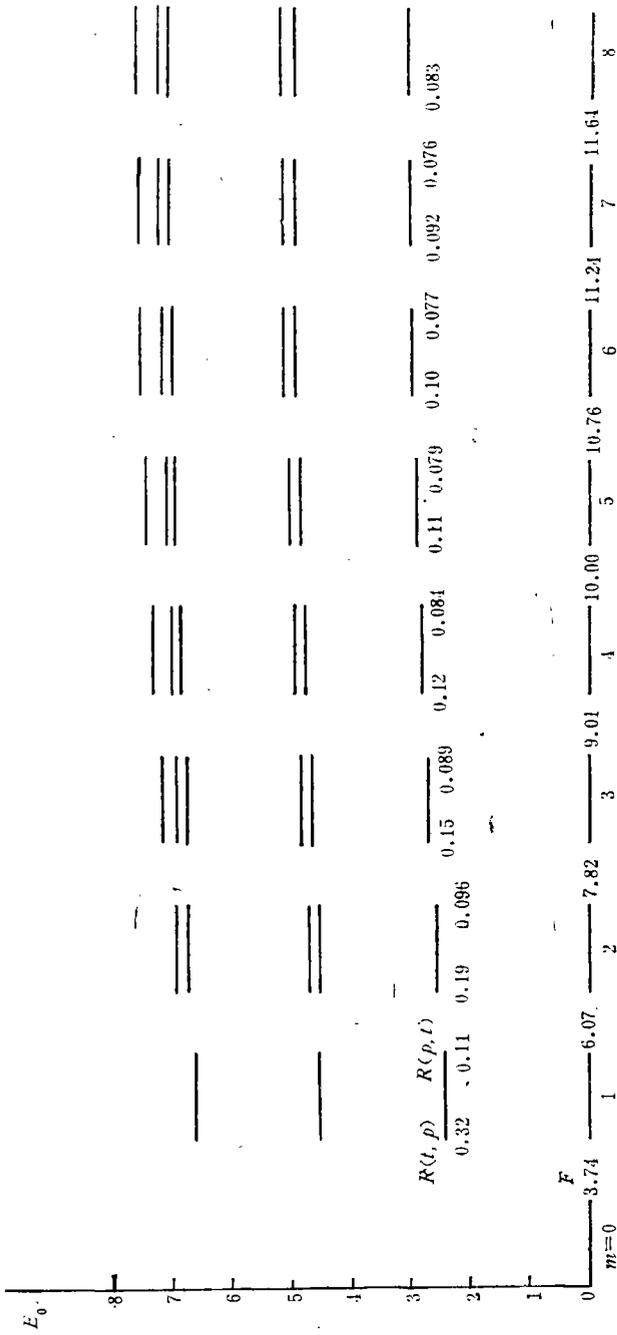
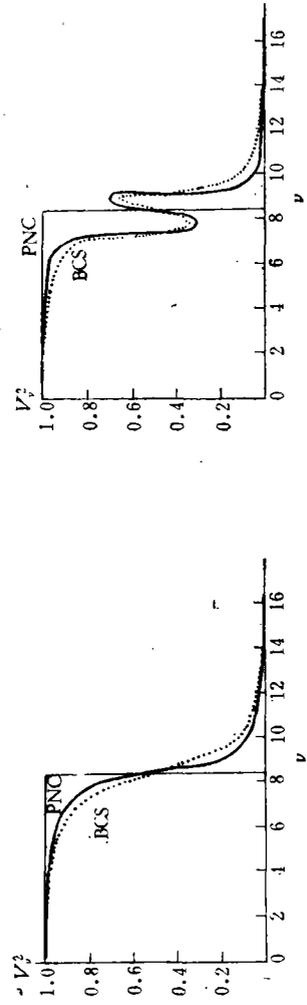


图 2



(b) 第一激发态

(a) 基态

图 3 单粒子能级填充几率

对于奇A核或对拆散态,则把单粒子所占据的能级堵掉即可(堵塞效应)。

在图1中,分别给出考虑费密面附近8条、10条、12条及16条单粒子能级(即考虑费密面附近8个、10个、12个及16个粒子,更确切地说,截断能量 E_c 分别取为8,10,12及16)的情况下 0^+ 激发谱。它们的第一激发 0_1^+ 态位置取为相同(图1中参数 G 取值与原子核实际情况相似)。可以看出,只要 G 适当重整化,所得低激发谱非常相似。波函数的主要成分也很相近。因此在处理较低激发态性质时,所得结果也很相近。具体应用时, G 由原子核的奇偶质量差的观测值定出。通常处理较低的激发态时,取费密面附近约10条能级即可。但在下面讨论时,为稍仔细一点,取截断能量 $E_c = 16$,相应的 $G = 0.500$ ($E_c/G = 32$)。

现在来讨论,当满壳外粒子数逐渐增加(而 G 保持不变)时,能谱及二核子转移分支比的变化规律。如图2所示,当粒子数逐渐增加,对关联也逐渐加强,形成超导态。相邻偶偶核 $g. s. \rightarrow g. s.$ 之间的二核子转移反应,由于对关联而来的加强因子 F 也逐渐增大。在远离满壳情况下, $F \geq 10$ 。

先讨论远离满壳的区域。首先看二核子转移反应分支比

$$R = \frac{F(g. s. \rightarrow 0_1^+, \Delta\alpha = 1)}{F(g. s. \rightarrow g. s., \Delta\alpha = 0)} \sim 8\%,$$

这是 α 选择定则的反映^[6]。在不同对转动带之间二核子转移反应,减弱一个数量级,但并未完全禁戒。把这个结果与BCS计算结果比较是很有趣的。在用BCS方法来处理时,对力强度 G 选得使第一激发态位置与PNC计算值 0_1^+ 相同,这时的 G 为0.418,二核子转移反应分支比[无论 (t, p) 或 (p, t)] $R \sim 3.0\%$ 。即BCS计算值约为PNC计算值的2/5。这相当于在BCS方法中夸大了对力的影响,这一点在单粒子能级填布几率(图3)中就已表现出来了。所以用BCS方法处理问题,下结论时要小心一些。

其次,讨论满壳外粒子数逐渐增加时,二核子转移反应分支比的变化情况。先以 (t, p) 反应为例。从基态分别到相邻偶偶核第一 0^+ 激发态与基态的分支比依次变化如下:

$$32\%, 19\%, 15\%, 12\%, 11\%, 10\%, 9.2\%, 8.3\%, \dots$$

即随粒子数增加而减小。值得注意的是,若按简谐对振动图象,这些分支比均应为0。这表明,虽然对关联效应使 $g. s. \rightarrow g. s.$ 的二核子转移反应大大加强,但还并未把到激发 0^+ 态的振幅剥夺干净。因此,到激发态的分支比并不为0。

对于 (p, t) 反应,从基态分别到相邻偶偶核 0_1^+ 激发态与基态的分支比依次变化如下:

$$11\%, 9.6\%, 8.9\%, 8.4\%, 7.9\%, 7.7\%, 7.6\%, \dots$$

即随粒子数增加而减小,但这些分支比决不应为0,而在满壳附近也并不为1。

相邻核的基态之间二核子转移反应加强因子之比为:

$$3.735:6.070:7.819:9.010:10.004:10.761:11.235:11.642 \dots \\ = 1:1.62:2.09:2.41:2.68:2.88:3.01:3.12: \dots$$

与简谐对振动的估计值:1:2:3:...,相差逐渐增大,这反映泡利原理的重要性愈来愈大,独立的准玻色子概念越来越差。

下面我们讨论对力对于结合能的贡献。当满壳外的粒子对数目 m 增加时,对力对结

合能的贡献 (p_m) 也逐渐增大。图 4(a) 实线所示, 是粒子数守恒方法 (PNC) 严格计算的结果。单粒子能量的贡献已减去。图 4(a) 中, 长虚线所示是简谐声子图象。短虚线所示是计及了声子相互作用后的图象。在粒子对数目不太大 (例如 $m \leq 4$) 时, 它与严格解差别较小。图 4(b) 所示是第 m 对粒子对于结合能的贡献 (单位为 G)。当满壳外粒子对数目 m 较大时, 对力的非对角元贡献达到饱和。每增加一对粒子, 结合能增加 $\sim G$ 。这是泡利原理的反映。

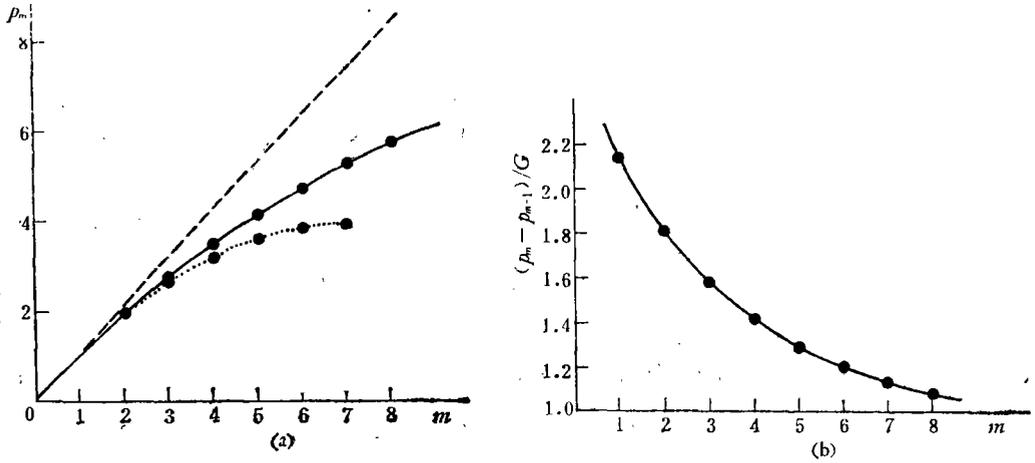


图 4

以上计算中未计及满壳内粒子的贡献 (所谓基态关联)。这相当于两大壳之间间距非常大的极限。设两大壳之间间距为 D , 若 $D \gg 1$, 则上述讨论应没有大的改变。我们具体计算过 $D = 5$ 的情况, 表明确实如此。

当粒子数超过半满壳, 继续增加, 接近于上一个大壳时, 在对力的处理方法上没有什么不同。此时, 由于费密面上的单粒子能级逐渐减少, 在一定截断能量之下的对激发组态也相应减少。对力的非对角元的作用将重新减弱。在这种情况下, 用“空穴对”的填布情况来描述原子核的低激发谱是方便的^[6]。本文不再一一讨论。

此外, 在 PNC 方法处理对力的基础上, 进一步考虑其他剩余相互作用, 可参阅 [7]。

附 录

用粒子数守恒方法处理对力的一些公式已见诸有关文章^[4-6]。现将对关联对于转移反应及衰变影响的公式列举如下, 以供参考。

偶偶核基态及对激发态波函数已由 (2) 式给出。对拆散态 (被拆散粒子处于单粒子能级 r 与 s) 形式如下:

$$A_{am-1}^+(r, s)|0\rangle = a_r^+ a_s^+ \sum_{\rho_1 \dots \rho_{m-1}} v_{\rho_1 \dots \rho_{m-1}}^{a(r,s)} S_{\rho_1 \dots \rho_{m-1}}^+ |0\rangle, \quad (4)$$

而奇 A 核 (奇核子处于单粒子能级 r) 基态或对激发态形式为:

$$A_{am}^+(r)|0\rangle = a_r^+ \sum_{\rho_1 \dots \rho_m} v_{\rho_1 \dots \rho_m}^{a(r)} S_{\rho_1 \dots \rho_m}^+ |0\rangle \quad (5)$$

I. 单核子转移反应

(d, p) 反应

初态 $ i\rangle$	末态 $ f\rangle$	对力加强因子 F
$A_{0m}^+ 0\rangle$	$A_{0m}^+(r) 0\rangle$	$\left[\sum_{\rho_1 \rho_2 \dots \rho_m} v_{\rho_1 \dots \rho_m}^{0(r)} \cdot v_{\rho_1 \dots \rho_m}^0 \right]^2$
$A_{0m}^+(r) 0\rangle$	$A_{0m}^+(r, s) 0\rangle$	$\left[\sum_{\rho_1 \dots \rho_m} v_{\rho_1 \dots \rho_m}^{0(r, s)} \cdot v_{\rho_1 \dots \rho_m}^{0(r)} \right]^2$
$A_{0m}^+(r) 0\rangle$	$A_{0, m+1}^+ 0\rangle$	$\left[\sum_{\rho_1 \dots \rho_m} v_{r \rho_1 \dots \rho_m}^0 \cdot v_{\rho_1 \dots \rho_m}^{0(r)} \right]^2$

(p, d) 反应

$A_{0m}^+ 0\rangle$	$A_{0, m-1}^+(r) 0\rangle$	$\left[\sum_{\rho_1 \dots \rho_{m-1}} v_{\rho_1 \dots \rho_{m-1}}^{0(r)} \cdot v_{r \rho_1 \dots \rho_{m-1}}^0 \right]^2$
$A_{0m}^+(r) 0\rangle$	$A_{0, m-1}^+(r, s) 0\rangle$	$\left[\sum_{\rho_1 \dots \rho_{m-1}} v_{\rho_1 \dots \rho_{m-1}}^{0(r, s)} \cdot v_{s \rho_1 \dots \rho_{m-1}}^{0(r)} \right]^2$
$A_{0m}^+(r) 0\rangle$	$A_{0m}^+ 0\rangle$	$\left[\sum_{\rho_1 \dots \rho_m} v_{\rho_1 \dots \rho_m}^0 \cdot v_{\rho_1 \dots \rho_m}^{0(r)} \right]^2$

II. 二核子转移反应 (t, p) 设

$|i\rangle = A_{0, m-1}^+ |0\rangle$ (偶偶核基态), $|f\rangle = A_{0m}^+ |0\rangle$ (偶偶核), 则

$$F_a = \left[\sum_{\rho_1 \dots \rho_m} v_{\rho_1 \dots \rho_m}^a \cdot v_{\rho_1 \dots \rho_{m-1}}^0 \right]^2.$$

奇 A 核的公式与此类似, 只需计及奇核子的堵塞效应。

III. α 衰变

在重核中, 忽略 np 关联, 则对力对 α 衰变的影响与 (p, t) 反应相似。但中子及质子各自的对关联影响都要考虑进去, 即

$$F = F_N \cdot F_p$$

奇 A 核的 α 衰变与此相似, 但计及奇核子堵塞效应之后, F 因子要小一些。

IV. β 衰变

以 β^+ 衰变为例, (A^+ 表示质子系的状态, B^+ 表示中子系的状态)

初态 $ i\rangle$	末态 $ f\rangle$	对力加强因子 F
$A_{0n}^+(r) B_{0m}^+ 0\rangle$ (奇质子核)	$A_{0n}^+ B_{0m}^+(s) 0\rangle$ (奇中子核)	$\left[\sum_{\rho_1 \dots \rho_n} v_{\rho_1 \dots \rho_n}^0 \cdot v_{\rho_1 \dots \rho_n}^{0(r)} \right]^2 \cdot \left[\sum_{\lambda_1 \dots \lambda_m} w_{\lambda_1 \dots \lambda_m}^{0(s)} \cdot w_{\lambda_1 \dots \lambda_m}^0 \right]^2$
$A_{0n}^+ B_{0, m-1}^+(s) 0\rangle$ (奇中子核)	$A_{0, n-1}^+(r) B_{0m}^+ 0\rangle$ (奇质子核)	$\left[\sum_{\rho_1 \dots \rho_{n-1}} v_{\rho_1 \dots \rho_{n-1}}^{0(r)} \cdot v_{r \rho_1 \dots \rho_{n-1}}^0 \right]^2 \cdot \left[\sum_{\lambda_1 \dots \lambda_{m-1}} w_{s \lambda_1 \dots \lambda_{m-1}}^0 \cdot w_{\lambda_1 \dots \lambda_{m-1}}^{0(s)} \right]^2$
$A_{0n}^+(r) B_{0, m-1}^+(s) 0\rangle$ (奇奇核)	$A_{0n}^+ B_{0m}^+ 0\rangle$ (偶偶核)	$\left[\sum_{\rho_1 \dots \rho_n} v_{\rho_1 \dots \rho_n}^0 \cdot v_{\rho_1 \dots \rho_n}^{0(r)} \right]^2 \cdot \left[\sum_{\lambda_1 \dots \lambda_{m-1}} w_{s \lambda_1 \dots \lambda_{m-1}}^0 \cdot w_{\lambda_1 \dots \lambda_{m-1}}^{0(s)} \right]^2$
$A_{0n}^+(r) B_{0, m-1}^+(s) 0\rangle$ (奇奇核)	$A_{0n}^+ B_{0, m-1}^+(s, t) 0\rangle$ (偶偶核中子对拆散)	$\left[\sum_{\rho_1 \dots \rho_n} v_{\rho_1 \dots \rho_n}^0 \cdot v_{\rho_1 \dots \rho_n}^{0(r)} \right]^2 \cdot \left[\sum_{\lambda_1 \dots \lambda_{m-1}} w_{\lambda_1 \dots \lambda_{m-1}}^{0(s, t)} w_{\lambda_1 \dots \lambda_{m-1}}^{0(s)} \right]^2$

$$A_{0n}^+(r)B_{0m-1}^+(\bar{s})|0\rangle \quad A_{0n-1}^+(r, \epsilon)B_{0m}^+|0\rangle \quad \left[\sum_{\rho_1 \dots \rho_{n-1}} v_{\rho_1 \dots \rho_{n-1}}^{0(r, \epsilon)} \cdot v_{i\rho_1 \dots \rho_{n-1}}^{0(r)} \right]^2$$

(奇奇核) (偶偶核质子对拆散)

$$\cdot \left[\sum_{\lambda_1 \dots \lambda_{m-1}} w_{\lambda_1 \dots \lambda_{m-1}}^0 \cdot w_{\lambda_1 \dots \lambda_{m-1}}^{0(\epsilon)} \right]^2$$

V. γ 跃迁

	初态 $ i\rangle$	末态 $ f\rangle$	F
$A_{am}^+(1) 0\rangle$	$A_{am}^+(2) 0\rangle$	$\left[\sum_{\rho_1 \dots \rho_m} (v_{\rho_1 \dots \rho_m}^{\alpha(2)} \cdot v_{\rho_1 \dots \rho_m}^{\alpha(1)} - \eta v_{1\rho_1 \dots \rho_{m-1}}^{\alpha(2)} \cdot v_{2\rho_1 \dots \rho_{m-1}}^{\alpha(1)}) \right]^2$	
		$\eta = \begin{cases} +1, & EL \\ -1, & ML \end{cases}$	

$$A_{am-1}^+(1, 2)|0\rangle \quad A_{0m}^+|0\rangle \quad \left[\sum_{\rho_1 \dots \rho_{m-1}} v_{\rho_1 \dots \rho_{m-1}}^{\alpha(1,2)} (v_{1\rho_1 \dots \rho_{m-1}}^0 + \eta v_{2\rho_1 \dots \rho_{m-1}}^0) \right]^2$$

当 $G = 0$ 时完全禁戒。

$$A_{am}^+|0\rangle (\alpha \neq 0) \quad A_{0m}^+|0\rangle \quad \text{当 } G \neq 0 \text{ 时, 跃迁矩阵元为}$$

$$\langle f|M|i\rangle = (1 + \eta) \cdot \left[\sum_{\rho_1 \dots \rho_n} (M_{\rho_1 \rho_1} + M_{\rho_2 \rho_2} + \dots + M_{\rho_n \rho_n}) \cdot v_{\rho_1 \dots \rho_n}^\alpha \cdot v_{\rho_1 \dots \rho_n}^0 \right]$$

参 考 文 献

- [1] S. T. Belyaev, *Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk.*, **31**(1959). No. 11.
- [2] L. S. Kisslinger and R. A. Sorenson, *ibid*, **32**(1960), No. 12.
- [3] G. S. Nilsson, and O. Prior, *ibid*, **32**(1961), No. 16.
- [4] 杨立铭, 曾谨言, *物理学报*, **20**(1964), 846.
- [5] 程檀生, 曾谨言, *物理学报*, **26**(1977), 243.
- [6] 曾谨言, *高能物理与核物理*, **2**(1978), 428.
- [7] 程檀生, 曾谨言, *物理*, **2**(1973), 53.

DISCUSSION ON THE METHODS FOR TREATING THE PAIRING CORRELATION

CHENG TAN-SHENG ZENG JIN-YAN (C. Y. Tseng)

(Peking University)

ABSTRACT

The advantages and the defects of the two methods for treating pairing correlation are discussed. Assuming that the spacing of the single-particle levels near the Fermi surface is uniform, the influences of the pairing correlation on the binding energies, the energy spectra, two-particle transfer cross sections and the branching ratios are analysed. The importance of Pauli principle manifests itself clearly.