第4卷 第5期　高能物理与核物理　Vol. 4, No. 5
1980年9月　PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS　Sept., 1980

单纯李群的不可约表示(I)
——单纯经典李群无穷小生成元的张量基

孙洪洲　韩其智
(北京大学)

摘　要

在本文中，通过对单纯经典李群无穷小生成元对易关系的分析，引入了无穷小生成元的一组新基——张量基. 在张量基中，无穷小生成元可以写为若干个相互对易的标量，若干组相互对易的角动量；若干组不可约张量. 它们满足的对易关系简单而有规律. 利用单纯经典李群无穷小生成元的张量基及前几篇文章"秩2紧致单纯李群的不可约表示I, II, III"中所用的方法，我们就可以系统地解决单纯经典李群的不可约表示问题.

一、引　言

我们对于单纯李群的不可约表示已经有相当的了解，在许多重要的物理问题中，都应用到了单纯李群的不可约表示.

但是，除了 A_l 群可以用对称群 U 群理论系统地解决其不可约表示问题（包括求出所有不可约表示，不可约表示直乘的分解，约化系数等等）以外（陈金全、王凡等同志也在这方面进行了系统的研究[1]）. 对于其他单纯李群，具体解决其不可约表示问题尚没有系统的方法. 这主要是因为：

1. 虽然用最高权矢量可以唯一地标记单纯李群的不可约表示，但是要标记该不可约表示的基矢，除了权矢量以外，还须要引入

$$f = \frac{1}{2}(N - 3l)$$

个附加算符[2-4]，其中 N 是群的阶，l 是群的秩. 目前还不清楚如何引入这些算符.

2. 应用单纯李群无穷小生成元的 Cartan-Weyl 基，可以给出一组相对简单的对易关系式. 但是利用这组对易关系式来求李群的不可约表示，却没有一定的方法可循.

3. 对于秩大于1的单纯李群，其不可约表示的直乘不是简单约化的.

不久前，我们从分析秩2单纯李群无穷小生成元对易关系出发，发现秩2单纯李群无穷小生成元的另一组基——张量基. 利用张量基，不仅无穷小生成元满足的对易关系简

本文1979年7月23日收到.

单而有规律，而且可以全部或部分地找到 [1] 中所提到的附加算符（对于 A_2, C_2 找到了全部，对于 B_2, G_2 找到了部分附加算符）. 应用张量基和角动量理论，可以克服前面提到的三个困难，从而解决了秩 2 李群的不可约表示问题[5].

另外，利用秩 2 李群无穷小生成元的张量基，我们还求出了阶化李代数 $SU(2/1)$ $SU(5/1)$ 的不可约表示[6].

我们现在推广这一方法，使它也适用于任何单纯李群. 为此，首先须要对于任意单纯李群建立其无穷小生成元的张量基. 在本文中，我们建立经典单纯李群 A_l, B_l, C_l, D_l 无穷小生成元的张量基. 在建立了单纯李群无穷小生成元的张量基以后，即可应用 [5] 中所述的方法，解决它的不可约表示问题.

二、角动量与不可约张量算符

在本节中，我们定义一些以后常用的算符.

1. 角动量算符

用 $\boldsymbol{\tau}(1)$, $\boldsymbol{\tau}(2)$, $\cdots$, $\boldsymbol{\tau}(n)$ 标记相互对易的 n 组角动量算符，它们满足

$$\begin{aligned}
&[\tau_0(i), \tau_{\pm1}(i)] = \pm\, \tau_{\pm1}(i), \\
&[\tau_1(i), \tau_{-1}(i)] = -\, \tau_0(i), \\
&[\boldsymbol{\tau}(i), \boldsymbol{\tau}(j)] = 0. \quad \text{当 } j \neq i \text{ 时}
\end{aligned} \tag{2.1}$$

其中 $\tau_1(i)$, $\tau_0(i)$, $\tau_{-1}(i)$ 是 $\boldsymbol{\tau}(i)$ 的球分量.

2. 标量算符

用 $A(1)$, $A(2)$, $\cdots$, $A(m)$ 标记相互对易的标量算符，它们满足

$$[\boldsymbol{\tau}(i), A(j)] = 0, \quad i, j \text{ 任意}, \ [A(i), A(j)] = 0. \tag{2.2}$$

3. 不可约张量算符

$\boldsymbol{\tau}(i)$ 的 r 秩不可约张量算符的 p 分量 $U^r_p(i)$，满足以下对易关系

$$\begin{aligned}
&[\tau_0(i), U^r_p(i)] = pU^r_p(i), \\
&[\tau_{\pm1}(i), U^r_p(i)] = C_\pm(rp)U^r_{p\pm1}(i), \\
&[\boldsymbol{\tau}(j), U^r_p(i)] = 0. \quad \text{当 } j \neq i \text{ 时}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

其中 $p = -r, -r+1, \cdots, r$.

$$C_\pm(r\,p) = \mp\sqrt{\frac{1}{2}(r \mp p)(r \pm p + 1)}. \tag{2.3'}$$

4. 多重不可约张量算符

算符 $U^{r_1, \cdots, r_a}_{p_1, \cdots, p_a}(i_1, \cdots, i_a)$ 是 $\boldsymbol{\tau}(i_1)$, $\cdots$, $\boldsymbol{\tau}(i_a)$ 的 r_1, $\cdots$, r_a 秩不可约张量算符，p_1, $\cdots$, p_a 是其相应分量；

$$p_\alpha = -r_\alpha, -r_\alpha + 1, \cdots, r_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \cdots, a.$$

满足以下对易关系：

$$
\begin{aligned}
&[\tau_0(i_\alpha),\ U^{r_1,\cdots,r_a}_{p_1,\cdots,p_a}(i_1,\cdots,i_a)] = p_\alpha U^{r_1,\cdots,r_a}_{p_1,\cdots,p_a}(i_1,\cdots,i_a),\\
&[\tau_{\pm1}(i_\alpha),\ U^{r_1,\cdots,r_a}_{p_1,\cdots,p_a}(i_1,\cdots,i_a)] = C_\pm(r_\alpha p_\alpha)U^{r_1,\cdots,r_\alpha,\cdots,r_a}_{p_1,\cdots,p_\alpha\pm1,\cdots,p_a}(i_1,\cdots,i_a), \qquad (2.4)\\
&[\boldsymbol{\tau}(i_\beta),\ U^{r_1,\cdots,r_a}_{p_1,\cdots,p_a}(i_1,\cdots,i_a)] = 0,\quad i_\beta \neq i_1, i_2, \cdots, i_a
\end{aligned}
$$

其中

$$C_\pm(r_\alpha p_\alpha) = \mp\sqrt{\frac{1}{2}(r_\alpha \mp p_\alpha)(r_\alpha \pm p_\alpha + 1)}. \qquad (2.4')$$

三、单纯李群 A_l 无穷小生成元的张量基

李群 A_l 无穷小生成元的非零根为[2-4]:

$$e_i - e_j,\quad i \neq j,\quad i, j = 1, 2, \cdots, l+1.$$

其中 e_i 是 $l+1$ 维空间矢量:

$$e_1 = (1, 0, 0, \cdots, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0),\ \cdots,\ e_{l+1} = (0, 0, 0, \cdots, 1)$$

根矢量的归一化常数 K 为

$$K = \sqrt{2(l+1)}.$$

在李群 A_l 无穷小生成元的 Cartan-Weyl 基中,取结构常数 $N_{\alpha,\beta}$ 为

$$N_{i-j,j-k} = \frac{1}{K},$$

其中

$$i < j < k.$$

以下分两种情况进行讨论

I. $l = 2\Delta$, Δ为正整数,即 l 为偶数情况. 设 $H_1, H_2, \cdots, H_{l+1}, E_{\pm\alpha}$ 是群 A_l 无穷小生成元的 Cartan-Weyl 基,当 α 对应于某一根 $e_i - e_j$ 时,就直接用 $E_{\pm(i-j)}$ 表示 $E_{\pm\alpha}$. 令

$$
\begin{aligned}
&\tau_0(i) = \frac{K}{2}(-H_{2i-1} + H_{2i}),\\
&\tau_{\pm1}(i) = \pm\frac{K}{\sqrt{2}}E_{\pm(-(2i-1)+2i)};\quad i = 1, 2, \cdots, \Delta.\\
&A(i) = K(H_{2i-1} + H_{2i}), \qquad (3.1\text{-}1)\\
&S = -KH_{l+1} = \sum_{i=1}^{\Delta} A(i);
\end{aligned}
$$

$U^{\frac{1}{2}}_{aq}(i) = U_{aq}(i)$ 为:

$a \backslash q$	$1/2$	$-1/2$
1	$-\frac{K}{\sqrt{2}}E_{2i-(l+1)}$	$\frac{K}{\sqrt{2}}E_{(2i-1)-(l+1)}$
-1	$\frac{K}{\sqrt{2}}E_{-(2i-1)+(l+1)}$	$\frac{K}{\sqrt{2}}E_{-2i+(l+1)}$

(3.1-2)

$U^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{apq}(ij) = U_{apq}(ij)$ 为：

a	p \ q	$1/2$	$-1/2$
1	$1/2$	$-\frac{K}{\sqrt{2}} E_{(2i)-(2j-1)}$	$-\frac{K}{\sqrt{2}} E_{(2i)-(2j)}$
1	$-1/2$	$\frac{K}{\sqrt{2}} E_{(2i-1)-(2j-1)}$	$\frac{K}{\sqrt{2}} E_{(2i-1)-(2j)}$
-1	$1/2$	$-\frac{K}{\sqrt{2}} E_{-(2i-1)+(2j)}$	$\frac{K}{\sqrt{2}} E_{-(2i-1)+(2j-1)}$
-1	$-1/2$	$-\frac{K}{\sqrt{2}} E_{-(2i)+(2j)}$	$\frac{K}{\sqrt{2}} E_{-(2i)+(2j-1)}$

$i<j$　　(3.1-3)

这些算符的总数为

$$3\Delta + \Delta + 2\cdot 2\Delta + 2\cdot 4\cdot \frac{1}{2}\Delta(\Delta-1) = 4\Delta(\Delta+1) = l(l+2). \qquad (3.1\text{-}4)$$

通过直接计算可以证明：

1. $\boldsymbol{\tau}(1), \boldsymbol{\tau}(2), \cdots, \boldsymbol{\tau}(\Delta)$ 是 Δ 组相互对易的角动量算符，它们满足对易关系 (2.1).

2. $A(1), A(2), \cdots, A(\Delta)$ 是 Δ 个相互对易的标量算符，它们满足对易关系 (2.2).

3. $U_{aq}(i)$ 和 $U_{apq}(ij)$ 分别为 $\boldsymbol{\tau}(i)$ 和 $\boldsymbol{\tau}(i)$, $\boldsymbol{\tau}(j)$ 不可约张量和多重不可约张量算符，它们满足对易关系 (2.3) 和 (2.4).

4. $U_{aq}(i)$ 还满足以下对易关系

$$\begin{aligned}
&[A(i), U_{aq}(i)] = aU_{aq}(i),\\
&[U_{aq}(i), U_{-aq}(i)] = -a\sqrt{\frac{1}{2}}\tau_{2q}(i),\\
&[U_{aq}(i), U_{-a-q}(i)] = -\frac{1}{2}\left\{a\tau_0(i) + 2q\left(s + \frac{1}{2}A(i)\right)\right\},\\
&[U_{ap}(i), U_{-aq}(j)] = \sqrt{\frac{1}{2}}\,aU_{apq}(ij).
\end{aligned} \qquad (3.1\text{-}5)$$

5. $U_{apq}(ij)$ 还满足以下对易关系

$$\begin{aligned}
&[A(i), U_{apq}(ij)] = aU_{apq}(ij), \quad [A(j), U_{apq}(ij)] = -aU_{apq}(ij),\\
&[U_{apq}(ij), U_{-ap-q}(ij)] = -q\sqrt{2}\,\tau_{2p}(i),\\
&[U_{apq}(ij), U_{-a-pq}(ij)] = -p\sqrt{2}\,\tau_{2q}(j),\\
&[U_{apq}(ij), U_{-a-p-q}(ij)] = -\{q\tau_0(i) + p\tau_0(j) + apq(A(i) - A(j))\},\\
&[U_{apq'}(ij), U_{a-q'q}(jk)] = \sqrt{2}\,q'U_{apq}(ik).
\end{aligned} \qquad (3.1\text{-}6)$$

在公式 (3.1-6) 中，我们定义了

$$U_{apq}(ij) = U_{-aqp}(ji), \qquad (3.1\text{-}6')$$

(3.1-6) 中 i, j, k 大小可以任意.

6. $U_{aq}(i)$, $U_{apq}(ij)$ 间满足以下对易关系

$$[U_{ap}(i), U_{-a-pq}(ij)] = p\sqrt{2}\,U_{aq}(j). \qquad (3.1\text{-}7)$$

7. 这些算符间的其他对易关系均为 0.

II. $l=2\Delta+1$, Δ 为正整数,即 l 为奇数情况. 这时,令

$$\tau_0(i)=\frac{K}{2}(-H_{2i-1}+H_{2i}),$$

$$\tau_{\pm1}(i)=\pm\frac{K}{\sqrt{2}}(E_{\pm1(-(2i-1)+2i)}),$$

$$A(i)=K(H_{2i-1}+H_{2i}).\quad i=1,2,\cdots,\Delta+1 \tag{3.2-1}$$

其中 $A(i)$ 满足关系

$$\sum_{i=1}^{\Delta+1}A(i)=0,$$

即

$$A(\Delta+1)=-\sum_{i=1}^{\Delta}A(i). \tag{3.2-1'}$$

$U_{\alpha pq}(ij)$ 仍由 (3.1-3) 式决定,不过这时取 $i<j$, $i, j=1,2,\cdots,\Delta+1$. 这些算符的总数为:

$$3(\Delta+1)+\Delta+2\cdot4\cdot\frac{1}{2}(\Delta+1)\Delta=(2\Delta+1)(2\Delta+3)=l(l+2), \tag{3.2-2}$$

容易证明

1. $\boldsymbol{\tau}(1)$, $\boldsymbol{\tau}(2)$, $\cdots$, $\boldsymbol{\tau}(\Delta+1)$ 是相互对易的角动量算符,满足对易关系 (2 1).
2. $A(1)$, $A(2)$, $\cdots$, $A(\Delta)$ 是相互对易的标量算符,满足对易关系 (2.2).
3. $U_{\alpha pq}(ij)$ 满足对易关系 (2.4) 和 (3.1-6).
4. 这些算符间的其它对易关系均为 0.

四、单纯李群 B_l 无穷小生成元的张量基

李群 B_l 无穷小生成元的非零根为[2-4]:

$$\pm e_i\pm e_j,\quad \pm e_i,\quad i<j,\ i,\ j=1,2,\cdots,l.$$

根矢量的归一化常数 K 是

$$K=\sqrt{2(2l-1)}.$$

在李群 B_l 无穷小生成元的 Cartan-Weyl 基中,取结构常数 $N_{\alpha,\beta}$ 为

$$N_{i,j}=N_{j,i-j}=N_{i-k,j+k}=N_{i+k,j-k}=N_{j+k,i-j}=N_{j-k,i-j}=-1/K,$$

其中 i, j, k 满足 $i<j<k$.

以下分两种情况进行讨论:

1. $l=2\Delta$, 即 l 为偶数情况. 这时令

$$\tau_0(i)=\frac{K}{2}(H_i+H_{i_1}),$$

$$\tau_{\pm1}(i)=\pm\frac{K}{\sqrt{2}}E_{\pm(i+i_1)},$$

$$\tau_0(i_1) = \frac{K}{2}(-H_i + H_{i_1}),$$
$$\tau_{\pm 1}(i_1) = \pm \frac{K}{\sqrt{2}} E_{\pm(-i+i_1)}; \tag{4.1-1}$$

$U^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{pq}(i, i_1) = U_{pq}(i)$ 为:

$p \backslash q$	1/2	−1/2
1/2	$-\frac{K}{\sqrt{2}} E_{i_1}$	$\frac{K}{\sqrt{2}} E_i$
−1/2	$\frac{K}{\sqrt{2}} E_{-i}$	$\frac{K}{\sqrt{2}} E_{-i_1}$

(4.1-2)

$U^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{pqp'q'}(ii_1jj_1) = U_{pqp'q'}(ij)$ 为: $i < j$,

$p\ q \backslash p'q'$	$\frac{1}{2}\quad\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\quad -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\quad\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\quad -\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}\quad\frac{1}{2}$	$-\frac{K}{\sqrt{2}} E_{i_1+j_1}$	$\frac{K}{\sqrt{2}} E_{i_1+j}$	$-\frac{K}{\sqrt{2}} E_{i_1-j}$	$-\frac{K}{\sqrt{2}} E_{i_1-j_1}$
$\frac{1}{2}\quad -\frac{1}{2}$	$\frac{K}{\sqrt{2}} E_{i+j_1}$	$-\frac{K}{\sqrt{2}} E_{i+j}$	$\frac{K}{\sqrt{2}} E_{i-j}$	$\frac{K}{\sqrt{2}} E_{i-j_1}$
$-\frac{1}{2}\quad\frac{1}{2}$	$\frac{K}{\sqrt{2}} E_{-i+j_1}$	$-\frac{K}{\sqrt{2}} E_{-i+j}$	$\frac{K}{\sqrt{2}} E_{-i-j}$	$\frac{K}{\sqrt{2}} E_{-i-j_1}$
$-\frac{1}{2}\quad -\frac{1}{2}$	$\frac{K}{\sqrt{2}} E_{-i_1+j_1}$	$-\frac{K}{\sqrt{2}} E_{-i_1+j}$	$\frac{K}{\sqrt{2}} E_{-i_1-j}$	$\frac{K}{\sqrt{2}} E_{-i_1-j_1}$

(4.1-3)

在 (4.1-1)—(4.1-3) 中,

$$i < j,\quad i, j = 1, 3, 5, 7, \cdots, 2\Delta - 1,\quad i_1 = i + 1,\ j_1 = j + 1, \tag{4.1-4}$$

这些算符的总数是

$$3 \cdot 2\Delta + 4 \cdot \Delta + 16 \cdot \frac{1}{2}\Delta(\Delta - 1) = l(2l + 1). \tag{4.1-5}$$

可以证明

1. $\boldsymbol{\tau}(i)$, $\boldsymbol{\tau}(i_1)$ 等是相互对易的角动量算符,它们满足对易关系 (2.1).

2. $U_{pq}(i)$ 和 $U_{pqp'q'}(ij)$ 分别为 $\boldsymbol{\tau}(i)$, $\boldsymbol{\tau}(i_1)$ 和 $\boldsymbol{\tau}(i)$, $\boldsymbol{\tau}(i_1)$, $\boldsymbol{\tau}(j)$, $\boldsymbol{\tau}(j_1)$ 的多重不可约张量算符,它们满足对易关系 (2.4).

3. $U_{pq}(i)$ 还满足以下对易关系:

$$[U_{pq}(i), U_{p-q}(i)] = -q\sqrt{2}\,\tau_{2p}(i),$$
$$[U_{pq}(i), U_{-pq}(i)] = -p\sqrt{2}\,\tau_{2q}(i_1),$$
$$[U_{pq}(i), U_{-p-q}(i)] = -\{q\tau_0(i) + p\tau_0(i_1)\};$$
$$[U_{pq}(i), U_{pq}(j)] = \sqrt{\frac{1}{2}}\,U_{pqp'q'}(ij) \tag{4.1-6}$$

4. $U_{pqp'q'}(ij)$ 还满足以下的对易关系:

$$[U_{pqp'q'}(ij),\ U_{p-q-p'-q'}(ij)] = -qp'q'4\sqrt{2}\,\tau_{2p}(i),$$

$$[U_{pqp'q'}(ij),\ U_{-pq-p'-q'}(ij)] = -pp'q'4\sqrt{2}\,\tau_{2q}(i_1),$$

$$[U_{pqp'q'}(ij),\ U_{-p-q-p'-q'}(ij)] = -4p'q'\{q\tau_0(i) + p\tau_0(i_1)\} - 4pq\{q'\tau_0(j) + p'\tau_0(j_1)\},$$

$$[U_{pqp'q'}(ij),\ U_{-p'-q'p''q''}(jk)] = -p'q'2\sqrt{2}\,U_{pqp''q''}(ik). \tag{4.1-7}$$

在 (4.1-7) 式中，我们定义了

$$U_{pqp'q'}(ij) = -U_{p'q'pq}(ji), \tag{4.1-7'}$$

因此在 (4.1-7) 中，i, j, k 的大小任意.

5. $U_{pq}(i)$, $U_{pqp'q'}(ij)$ 间满足对易关系:

$$[U_{p'q'}(i),\ U_{-p'-q'pq}(ij)] = -p'q'2\sqrt{2}\,U_{pq}(j). \tag{4.1-8}$$

6. 这些算符间的其他对易关系均为 0.

II. $l = 2\Delta + 1$，即 l 为奇数情况．这时令

$$\tau_0(i) = \frac{K}{2}(H_i + H_{i_1}),$$

$$\tau_{\pm1}(i) = \pm\frac{K}{\sqrt{2}}E_{\pm(i+i_1)},$$

$$\tau_0(i_1) = \frac{K}{2}(-H_i + H_{i_1}),$$

$$\tau_{\pm1}(i_1) = \pm\frac{K}{\sqrt{2}}E_{\pm(-i+i_1)},$$

$$\tau_0(l) = KH_l, \quad \tau_{\pm1}(l) = \pm KE_{\pm l}, \tag{4.2-1}$$

$U^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}1}_{p\,q\,r}(ii_1l) = U_{pqr}(i)$ 为:

$p\ q$ \ r	1	0	-1
$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{K}{\sqrt{2}}E_{i_1+l}$	$-\frac{K}{\sqrt{2}}E_{i_1}$	$-\frac{K}{\sqrt{2}}E_{i_1-l}$
$\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$	$-\frac{K}{\sqrt{2}}E_{i+l}$	$\frac{K}{\sqrt{2}}E_{i}$	$\frac{K}{\sqrt{2}}E_{i-l}$
$-\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	$-\frac{K}{\sqrt{2}}E_{-i+l}$	$\frac{K}{\sqrt{2}}E_{-i}$	$\frac{K}{\sqrt{2}}E_{-i-l}$
$-\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$	$-\frac{K}{\sqrt{2}}E_{-i_1+l}$	$\frac{K}{\sqrt{2}}E_{-i_1}$	$\frac{K}{\sqrt{2}}E_{-i_1-l}$

(4.2-2)

$U^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{p\,q\,p'q'}(ii_1jj_1)$ 仍由 (4.1-3) 式决定.

这些算符的总数是

$$3(2\Delta + 1) + 3\cdot 4\Delta + 16\cdot\frac{1}{2}\Delta(\Delta - 1) = l(2l + 1). \tag{4.2-3}$$

可以证明

1. $\boldsymbol{\tau}(i)$, $\boldsymbol{\tau}(i_1)$, $\boldsymbol{\tau}(l)$ 等是相互对易的角动量算符，满足对易关系 (2.1).

2. $U_{pqr}(i)$ 和 $U_{pqp'q'}(ij)$ 分别为 $\boldsymbol{\tau}(i)$, $\boldsymbol{\tau}(i_1)$, $\boldsymbol{\tau}(l)$ 和 $\boldsymbol{\tau}(i)$, $\boldsymbol{\tau}(i_1)$, $\boldsymbol{\tau}(j)$, $\boldsymbol{\tau}(j_1)$ 的多重不可约张量算符，满足对易关系 (2.4).

3. $U_{pqr}(i)$ 还满足以下对易关系

$$
\begin{aligned}
&[U_{pqr}(i), U_{p-q-r}(i)] = (-)^{1+r} q\sqrt{2}\,\tau_{2p}(i),\\
&[U_{pqr}(i), U_{-pq-r}(i)] = (-)^{1+r} p\sqrt{2}\,\tau_{2q}(i_1),\\
&[U_{pqr}(i), U_{-p-q-r}(i)] = (-)^{1+r}\{q\tau_0(i) + p\tau_0(i_1)\} + 2pqr\tau_0(l),\\
&[U_{pqr}(i), U_{-p-q0}(i)] = 2pqr\tau_r(l).
\end{aligned}
\tag{4.2-5}
$$

4. $U_{pqp'q'}(ij)$ 还满足对易关系 (4.1-7).

5. $U_{pqr}(i)$, $U_{pqp'q'}(ij)$ 间满足对易关系：

$$[U_{p'q'r}(i), U_{-p'-q'pq}(ij)] = -p'q'2\sqrt{2}\,U_{pqr}(j). \tag{4.2-6}$$

五、单纯李群 C_l 无穷小生成元的张量基

李群 C_l 无穷小生成元的非零根为[2-4]：

$$\pm e_i \pm e_j, \quad i<j, \quad \pm 2e_i, \quad i, j = 1, 2, \cdots, l$$

根矢量的归一化常数 K 是

$$K = \sqrt{4(l+1)}.$$

在李群 C_l 无穷小生成元的 Cartan-Weyl 基中，取结构常数 $N_{\alpha,\beta}$ 为

$$N_{i-j,\,j+k} = N_{i-j,\,j-k} = N_{i-k,\,j+k} = N_{j-k,\,i+k} = -1/K,$$

$$N_{i-j,\,i+j} = N_{i-j,\,2j} = -\sqrt{2}/K;$$

其中 i, j, k 满足 $i<j<k$. 令

$$\tau_0(i) = \frac{K}{2} H_i,$$

$$\tau_{\pm 1}(i) = \pm\frac{K}{2} E_{\pm 2i}, \quad i = 1, 2, \cdots, l \tag{5.1}$$

$U^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{pq}(ij) = U_{pq}(ij)$ 为

$p \backslash q$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{K}{2}E_{i+j}$	$\frac{K}{2}E_{i-j}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{K}{2}E_{-i+j}$	$\frac{K}{2}E_{-i-j}$

$i<j$　　(5.2)

这些算符的总数是

$$3l + 4\cdot\frac{1}{2}l(l-1) = l(2l+1). \tag{5.3}$$

可以证明

(i) $\boldsymbol{\tau}(i)$ 等是相互对易的角动量算符，满足对易关系 (2.1)；(ii) $U_{pq}(ij)$ 是 $\boldsymbol{\tau}(i)$，$\boldsymbol{\tau}(j)$ 的双重不可约张量算符，满足对易关系 (2.4)；(iii) $U_{pq}(ij)$ 间满足的对易关系为:

$$
\begin{aligned}
&[U_{pq}(ij), U_{p-q}(ij)] = -q\sqrt{2}\tau_{2p}(i),\\
&[U_{pq}(ij), U_{-pq}(ij)] = -p\sqrt{2}\tau_{2q}(j),\\
&[U_{pq}(i,j), U_{-p-q}(ij)] = -\{q\tau_0(i) + p\tau_0(j)\},\\
&[U_{pq'}(ij), U_{-q'q}(jk)] = qU_{p\tilde{q}}(ik).
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

在公式 (5.4) 中，我们定义了

$$U_{pq}(ij) = U_{qp}(ji). \tag{5.4'}$$

在 (5.4) 中 i, j, k 大小任意.

六、单纯李群 D_l 无穷小生成元的张量基

李群 D_l 无穷小生成元的非零根为[2-4]:

$$\pm e_i \pm e_j,\quad i<j,\quad i,j=1,2,\cdots,l.$$

根矢量的归一化常数 K 为

$$K=\sqrt{4(l-1)}.$$

在 D_l 群无穷小生成元的 Cartan-Weyl 基中，取结构常数 $N_{\alpha\beta}$ 为:

$$N_{j+k,i-j} = N_{j-k,i-j} = N_{i-k,j+k} = N_{i+k,j-k} = -1/K,$$

其中 i, j, k 满足 $i<j<k$.

以下分两种情况进行讨论:

I. $l=2\Delta$，即 l 为偶数情况.

这时令

$$
\begin{aligned}
&\tau_0(i) = \frac{K}{2}(H_i + H_{i_1}),\\
&\tau_{\pm1}(i) = \pm\frac{K}{\sqrt{2}}E_{\pm(i+i_1)};\\
&\tau_0(i_1) = \frac{K}{2}(-H_i + H_{i_1}),\\
&\tau_{\pm1}(i_1) = \pm\frac{K}{\sqrt{2}}E_{\pm(-i+i_1)};
\end{aligned}
\tag{6.1-1}
$$

$U^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{pqp'q'}(ii_1jj_1) = U_{pqp'q'}(ij)$ 为:

pq \ $p'q'$	$\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$	$-\frac{K}{\sqrt{2}}E_{i_1+j_1}$	$\frac{K}{\sqrt{2}}E_{i_1+j}$	$-\frac{K}{\sqrt{2}}E_{i_1-j}$	$-\frac{K}{\sqrt{2}}E_{i_1-j_1}$
$\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}$	$\frac{K}{\sqrt{2}}E_{i+j_1}$	$-\frac{K}{\sqrt{2}}E_{i+j}$	$\frac{K}{\sqrt{2}}E_{i-j}$	$\frac{K}{\sqrt{2}}E_{i-j_1}$
$-\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$	$\frac{K}{\sqrt{2}}E_{-i+j_1}$	$-\frac{K}{\sqrt{2}}E_{-i+j}$	$\frac{K}{\sqrt{2}}E_{-i-j}$	$\frac{K}{\sqrt{2}}E_{-i-j_1}$
$-\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}$	$\frac{K}{\sqrt{2}}E_{-i_1+j_1}$	$-\frac{K}{\sqrt{2}}E_{-i_1+j}$	$\frac{K}{\sqrt{2}}E_{-i_1-j}$	$\frac{K}{\sqrt{2}}E_{-i_1-j_1}$

(6.1-2)

$i<j$

以上为 $i<j,\ i,j=1,3,5,\cdots,2\Delta-1,$

$$i_1=i+1,\quad j_1=j+1. \tag{6.1-3}$$

这些算符的总数为：

$$3\cdot 2\Delta+16\cdot\frac{1}{2}\Delta(\Delta-1)=l(2l-1). \tag{6.1-4}$$

可以证明：

(i) $\boldsymbol{\tau}(i)$，$\boldsymbol{\tau}(i_1)$ 等是相互对易的角动量算符，满足对易关系 (2.2)；(ii) $U_{pqp'q'}(ij)$ 是 $\boldsymbol{\tau}(i),\boldsymbol{\tau}(i_1),\boldsymbol{\tau}(j),\boldsymbol{\tau}(j_1)$ 的多重不可约张量算符，满足对易关系 (2.4)；(iii) $U_{pqp'q'}(ij)$ 间满足以下对易关系

$$\begin{aligned}
&[U_{pqp'q'}(ij),U_{p-q-p'-q'}(ij)]=-qp'q'4\sqrt{2}\tau_{2p}(i),\\
&[U_{pqp'q'}(ij),U_{-pq-p'-q'}(ij)]=-pp'q'4\sqrt{2}\tau_{2q}(i_1),\\
&[U_{pqp'q'}(ij),U_{-p-q-p'-q'}(ij)]=-4p'q'\{q\tau_0(i)\\
&\qquad+p\tau_0(i_1)\}-4pq\{q'\tau_0(j)+p'\tau_0(j_1)\},\\
&[U_{pqp'q'}(ij),U_{-p'-q'p''q''}(jk)]=-p'q'\,2\sqrt{2}\,U_{pqp''q''}(ik).
\end{aligned} \tag{6.1-5}$$

在 (6.1-5) 中，我们定义了

$$U_{pqp'q'}(ij)=-U_{p'q'pq}(ji), \tag{6.1-5'}$$

所以 (6.1-5) 中 i，j 大小任意.

II. $l=2\Delta+1$，即 l 为奇数情况.

令：

$$\begin{aligned}
&\tau_0(i)=\frac{K}{2}(H_i+H_{i_1}),\\
&\tau_{\pm1}(i)=\pm\frac{K}{\sqrt{2}}E_{\pm(i+i_1)};\\
&\tau_0(i_1)=\frac{K}{2}(-H_i+H_{i_1}),\\
&\tau_{\pm1}(i_1)=\pm\frac{K}{\sqrt{2}}E_{\pm(-i+i_1)};\\
&A=KH_l
\end{aligned} \tag{6.2-1}$$

$U_{\pm 1pq}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(i, i_1) = U_{\pm 1pq}(i)$ 为:

$p \backslash q$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{K}{\sqrt{2}} E_{i_1 \pm l}$	$\frac{K}{\sqrt{2}} E_{i \pm l}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{K}{\sqrt{2}} E_{-i \pm l}$	$\frac{K}{\sqrt{2}} E_{-i_1 \pm l}$

(6.2-2)

$U_{pqp'q'}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(ii_1jj_1) = U_{pqp'q'}(ij)$ 仍由公式 (6.1-2) 决定.

在(6.2-1)、(6.2-2) 式中 i, i_1, 仍由 (6.1-3) 决定. 这些算符的总数是

$$3 \cdot 2\Delta + 1 + 2 \cdot 4\Delta + 16 \cdot \frac{1}{2} \Delta(\Delta - 1) = l(2l - 1). \tag{6.2-3}$$

容易证明: (i) $\boldsymbol{\tau}(i)$, $\boldsymbol{\tau}(i_1)$ 等是相互对易的角动量算符, 满足对易关系 (2.1); (ii) A 是标量算符, 满足对易关系 (2.2); (iii) $U_{apq}(i)$ 和 $U_{pqp'q'}(ij)$ 分别是 $\boldsymbol{\tau}(i)$, $\boldsymbol{\tau}(i_1)$ 和 $\boldsymbol{\tau}(i)$, $\boldsymbol{\tau}(i_1)$, $\boldsymbol{\tau}(j)$, $\boldsymbol{\tau}(j_1)$ 的多重不可约张量算符, 满足对易关系 (2.4); (iv) $U_{apq}(i)$ 还满足以下对易关系:

$$\begin{aligned}
&[A, U_{apq}(i)] = aU_{apq}(i), \\
&[U_{apq}(i), U_{-ap-q}(i)] = -q\sqrt{2}\,\tau_{2p}(i), \\
&[U_{apq}(i), U_{-a-pq}(i)] = -p\sqrt{2}\,\tau_{2q}(i_1), \\
&[U_{apq}(i), U_{-a-p-q}(i)] = -\{q\tau_0(i) + p\tau_0(i_1) + 2apqA\}, \\
&[U_{apq}(i), U_{-ap'q'}(j)] = \sqrt{\frac{1}{2}}\, U_{pqp'q'}(ij).
\end{aligned} \tag{6.2-4}$$

(v) $U_{pqp'q'}(ij)$ 还满足对易关系 (6.1-5); (vi) $U_{apq}(i)$, $U_{pqp'q'}(ij)$ 间满足对易关系:

$$[U_{ap'q'}(i), U_{-p'-q'pq}(ij)] = -p'q'2\sqrt{2}\,U_{apq}(j). \tag{6.2-5}$$

在引用 (6.1-5)′ 定义之后, (6.2-5) 式中 i, j 大小任意; (vii) 这些算符间的其他对易关系均为零.

七、结束语

通过以上讨论, 我们建立了单纯经典李群 A_l, B_l, C_l, D_l 无穷小生成元的张量基. 显然, 在这组基上, 李群无穷小生成元间的对易关系相当简单而有规律, 它们由一些独立的角动量算符, 标量算符以及相应的不可约张量算符所组成.

利用单纯李群无穷小生成元的张量基及 [5] 中所提出的方法, 我们就可以具体解决任意单纯李群的不可约表示问题.

利用单纯李群无穷小生成元的张量基及 [5] 中所提出的方法, 稍加推广, 还可以讨论单纯李群的无限维表示问题.

参 考 文 献

[1] 陈金全等,物理学报,**27**(1978),32—203、238;高能物理与核物理,3(1979),217.

[2] G. Racah, Group Theory and Spectroscopy, Ergeb. Exakt. Naturwiss, **37** (1965), 28.

[3] R. E. Behrends et al., *Rev. Mod. Phys.*, **34** (1962), 1.

[4] A. Salam, The Formalism of Lei Groups, in Theoretical Physics, Vienna: International Atomic Energy Agency, 1963, p 173.

[5] 孙洪洲,高能物理与核物理,4(1980), 73; 137; 271.

[6] 宋行长等,科学通报,(1980),105.

[7] 孙洪洲等,阶化李代数 $SU(5/1)$ 的不可约表示和一种可能的巨统一模型，1980 年广州粒子物理讨论会文集.

ON THE IRREDUCIBLE REPRESENTATIONS OF THE SIMPLE LIE GROUPS I ——THE TENSOR BASIS FOR THE INFINITESIMAL GENERATORS OF THE CLASSICAL SIMPLE LIE GROUPS

SUN HONG-ZHOU　　HAN QI-ZHI

(*Peking University*)

ABSTRACT

In this paper, we analyse the commutation relations of the infinitesimal generators of all simple classical Lie groups and establish a new basis for these generators, called the tensor basis. In tensor basis, the infinitesimal generators can be written as some scalar operators, some sets of angular momentum operators and some sets of irreducible tensor operators. The commutation relations of these operators are very simple and have many regularities.

By means of the method that has been used in the earlier papers, "On the irreducible representations of the compact simple Lie groups of rank 2, I,II,III" and the tensor basis, all the irreducible representations of the classical simple Lie groups can be calculated systematically.