第4卷 第5期 高能物理与核物理 Vol. 4, No. 5
1980年9月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS Sept., 1980

关于原子核质量新公式

曾谨言 程檀生 杨福家
(北京大学) (复旦大学)

摘 要

对于原子核奇偶质量差比 P/P', Danos-Gillet 的质量新公式与实验有尖锐矛盾. 本文提出了一个质量公式，对库仑能项、对称能项及对能项作了简单的修改. 这样得到的公式，既在 P/P' 和 β 稳定线的问题上与实验符合得比较好，又能保持结合能的计算值与实验值接近的程度.

一、质量新公式与实验事实的矛盾

众所周知,质量(或结合能)是原子核最重要的基本性质之一,它一直为人们所关注. 最近, M. Danos 和 V. Gillet 提出了一个原子核结合能新公式[1]. Weizsäcker 原来的结合能半经验公式中的对称能项及对能项，被代之为一个与 SU_4 群的 Casimir 算子成比例的项,即

$$B(A, Z) = a_V A - a_S A^{2/3} - 0.72 Z^2/A^{1/3} - a_{C2} C2(A, Z) A^{\alpha} + B_{\text{shell}}, \tag{1}$$

$$C2(A, Z) = \begin{cases} (T+2)^2 - 4 & \text{偶偶核}, \\ (T+2)^2 - 5/2 & \text{奇}\,A\,\text{核}, \\ (T+2)^2 & \text{奇奇核}. \end{cases}$$

前三项分别为体能、表面能及库仑能. T 是同位旋量子数. 对于基态, $T = |N-Z|/2$. 壳层效应修正项 B_{shell} 采用 Wing 和 Fong[2] 的结果. 库仑能项的系数 $a_C = 3e^2/5r_0$, r_0 是核电荷分布半径的 $A^{1/3}$ 律 ($R = r_0 A^{1/3}$) 中的常数. 根据高能电子散射及 μ 原子的 X 射线谱定出的 $r_0 \approx 1.20$—1.30 fm. 取 $r_0 = 1.20$ fm, 则 $a_C = 0.72$ MeV. (1) 式中 a_V, a_S, a_{C2} 及 α 作为待定参数.

Weizsäcker 公式表为

$$B(A, Z) = a_V A - a_S A^{2/3} - 0.72 Z^2/A^{1/3} - a_{\text{sym}} T^2 A^{\alpha} + B_P + B_{\text{shell}}. \tag{2}$$

$a_{\text{sym}} T^2 A^{\alpha}$ 是对称能项, B_P 是对能项(见后(10)式).

Danos 和 Gillet 用公式(1)分析了 $56 \leqslant A \leqslant 208$ 的约 1100 个原子核的结合能. 计算值与实验值的方均根偏差≈2.15 MeV. 若用 Weizsäcker 公式，则方均根偏差≈2.38 MeV[1]. 由于 D-G 公式的参数比 Weizsäcker 公式少，而计算结果反而有所改进，因此引起人们的很大注意.

本文 1979 年 3 月 28 日收到.

然而，我们发现，D-G 公式与实验有尖锐的矛盾．我们可以定义原子核的两种奇偶质量差．设 N, Z 均为偶数，令

$$P_n(N, Z) = \frac{1}{2}[B(N, Z) + B(N-2, Z) - 2B(N-1, Z)], \tag{3}$$

$$P'_n(N, Z) = \frac{1}{2}[B(N, Z-1) + B(N-2, Z-1) - 2B(N-1, Z-1)], \tag{3$'$}$$

以及

$$P_p(N, Z) = \frac{1}{2}[B(N, Z) + B(N, Z-2) - 2B(N, Z-1)], \tag{4}$$

$$P'_p(N, Z) = \frac{1}{2}[B(N-1, Z) + B(N-1, Z-2) - 2B(N-1, Z-1)], \tag{4$'$}$$

(3)与(4)是利用偶偶核和相邻奇 A 核的质量来定出的奇偶质量差，即平常习惯上常用的奇偶质量差．(3)′与(4)′是利用奇 A 核和相邻奇奇核的质量来定出的奇偶质量差．利用(3)、(3)′、(4)及(4)′式，我们分析了 Wapstra 和 Gove 所给出的结合能全部数据(1971)[3]，见图 1．可以清楚地看出，

P 系统地大于 P'，即

$$(P/P')_{\text{exp}} \approx 4/3. \tag{5}$$

这就是说，从结合能来看，偶偶核与奇 A 核的差异，系统地大于奇 A 核与奇奇核的差异．但按 D-G 公式，情况与此正好相反，

$$(P/P')_{\text{D-G}} \approx 5/9, \tag{6}$$

即 P 大约只有 P' 的一半那样大．这一结论与 D-G 公式中参数的取值无关．这就表明，D-G 的质量新公式与实验有尖锐的矛盾．

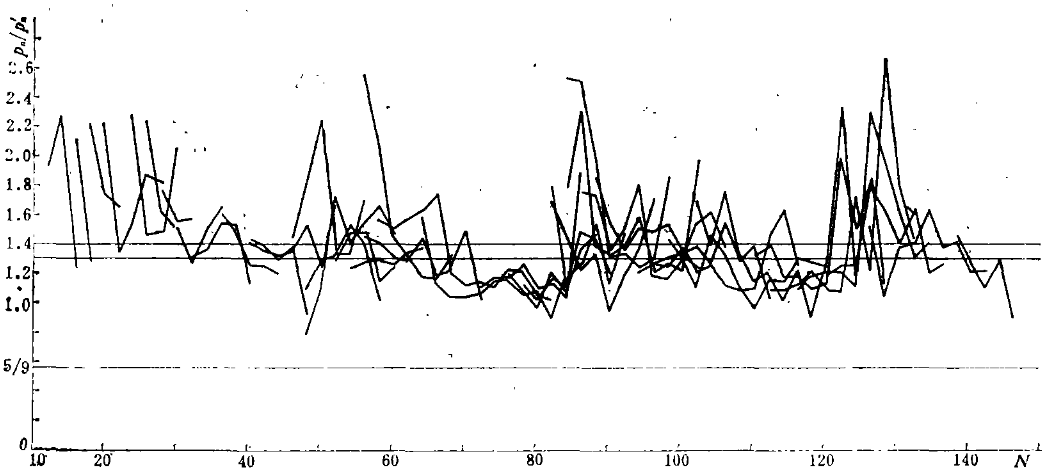

图 1　原子核奇偶质量差比 P_n/P'_n．P_p/P'_p 与此相似

核力的 SU_4 对称性，即核力的电荷及自旋的无关性，在只有 Wigner 力及 Majorana 交换力时，能得到保证．但计及 Bartlett 及 Heisenberg 交换力时，就不再具有这种对称性．D-G 公式在 P/P' 比值上与实验的矛盾，反映出核力与 SU_4 对称性有系统的偏离．

二、对质量公式的改进

自从 Weizsäcker 提出核质量半经验公式以来,有许多人对这问题进行过探讨,并提出过许多不同形式的核质量公式[2]. 这些公式,虽然在某些方面,比原公式有程度不同的改进,但一般说来,有的公式形式比较复杂,参数过多,改进程度并不显著,使用起来不方便.有些公式的物理意义不大清楚. 唯 Gillet 的公式除外,它一方面比较简单,结合能的计算值与观测值偏离也较小. 但不幸的是,在奇偶质量差比的问题上,与实验有尖锐的矛盾.

本文企图修改原子核质量的半经验公式. 一方面要求保持公式的简单性,物理意义清楚,又希望计算结果比较符合实验值,并且要求在奇偶质量差比的问题上与实验基本上一致. 此外,关于 β 稳定线的问题,也是检验核质量公式的一个重要判据[2].

我们将从下列三个方面对核质量公式进行修改:

1. 库仑能项 库仑能与核电荷半径有密切关系. 根据高能电子散射及 μ 原子 X 射线谱的大量的实验资料的分析,原子核电荷半径的 $A^{1/3}$ 律与实验有系统的偏离[4]. 而电荷分布半径 R 较好地遵守 $Z^{1/3}$ 律,即

$$R = r_{0p}Z^{1/3}, \quad r_{0p} \simeq 1.64 \text{ fm}, \tag{7}$$

原子核电荷半径的 $Z^{1/3}$ 律还在原子核许多方面有系统的反映,关于这问题,我们将另文讨论. 因此,库仑能项应取为

$$a_C Z^{5/3}, \quad a_C = \frac{3e^2}{5r_{0p}} = 0.526 \text{ MeV} \tag{8}$$

结合能的具体计算表明,库仑能项经过这样修正后,有明显改进. 众所周知,过去 Weizsäcker 等人的公式所存在的一个严重问题是:如果对于轻核,与实验符合较好,对于重核,B_{cal} 就系统地大于 B_{exp}. 反之,若对重核符合较好,则对轻核 B_{cal} 系统地小于 B_{exp}. 很重要的一个原因,就是库仑能项的形式 $Z^2/A^{1/3}$ 不够好.

2. 对称能项 关于对称能项的形式,已有许多文章讨论过. 对称能项及库仑能项的形式恰当与否,对于 β 稳定线及远离 β 稳定线的原子核的质量起决定性作用. 在 Weizsäcker 公式中,对称能项形式取为 $a_{\text{sym}}T^2A^{\alpha}$. 按 J. Jänecke[5] 对同位旋相似态的实验资料($A < 75$ 的原子核)的分析,对称能项对 T 的依赖关系以取 $T(T+1)$ 为宜. 这就是说,具有同位旋空间中的转动谱的形式. 因此,我们建议,对称能项采用下列形式

$$a_{\text{sym}}\, T(T+1)A^{\alpha}. \tag{9}$$

在下节中,我们将对另外形式的对称能项进行讨论.

3. 对能项 通常采用的对能项形式如下:

$$B_P = \begin{cases} a_P A^{\beta} & \text{偶偶核,} \\ 0 & \text{奇}A\text{核,} \\ -a_P A^{\beta} & \text{奇奇核.} \end{cases} \tag{10}$$

按照 Green 的分析[6], $\beta = -1/2$, $a_p = 11.2$MeV. 而 Wing 和 Fong[2] 则取 $\beta = -1/2$, $a_p = 11.51$ MeV. Myers 和 Swiatecki[7] 则采用 Fermi 所用的形式,即 $\beta = -3/4$, $a_p = 34$ MeV. 计算表明,对能形式的这种变动,对于结合能的计算值与实验符合的好坏,影响

很小．这是因为在结合能数值中，对能项的值并不占重要地位，但对于奇偶质量差却有重要影响．若对能形式采取(10)式，容易证明，

$$P/P' \approx 1, \tag{11}$$

而按 D-G 的质量新公式(1)，则 $P/P' \approx 5/9$．而实验上 $P/P' \approx 4/3$．

对奇偶质量差实验数据的更仔细的分析（用最小二乘法）表明，对能项以采取下列形式为宜

$$B_P = \begin{cases} 13.30A^{-1/2}\ \text{MeV} & \text{偶偶核,} \\ 0 & \text{奇}A\text{核,} \\ -0.776 \times 13.30A^{-1/2}\ \text{MeV} & \text{奇奇核.} \end{cases} \tag{12}$$

对能项作这样修改之后，可以较好地解释 $(P/P')_{\exp} \approx 4/3$ 这一实验事实．

概括起来，我们建议把结合能公式修改如下：

$$B(A, Z) = a_V A - a_S A^{2/3} - 0.526Z^{5/3} - a_{\rm sym} T(T+1)A^{\alpha} + B_P + B_{\rm shell}, \tag{13}$$

B_P 采用(12)式的形式．壳层效应修正 $B_{\rm shell}$ 与 Danos-Gillet 相同，采用 Wing 和 Fong[2] 的结果．a_V，a_S，$a_{\rm sym}$ 及 α 作为待定参数．

三、结果和讨论

我们用公式(13)分析了 Wapstra 和 Gove (1971) 核质量表中给出的 $50 \leqslant A \leqslant 256$ 的大约 1000 个原子核的结合能(表中未给出实验误差具体值的核除外)．所得参数如下(由最小二乘法定出)

$$a_V = 15.703\ \text{MeV}, \quad a_S = 18.410\ \text{MeV},$$
$$a_{\rm sym} = 35.776\ \text{MeV}, \quad \alpha = -0.86. \tag{14}$$

结合能计算值与实验值的方均根偏差为 1.26 MeV．

由图 2 可以看出，$(B_{\exp} - B_{\rm cal})$在满壳附近(特别是 $N = Z = 28$，$Z = 82$、$N = 126$ 附近)系统地较大，这说明 Wing 和 Fong 的壳效应修正项还不够理想．如果采用更好的壳效应修正，结果会更加改进．

以下我们分别就几个方面对公式(13)及计算结果进行讨论．

1. 关于奇偶质量差问题　结合能公式(13)中的对能项，采用(12)式．计算所得原子核奇偶质量差 P 与 P' 之比，与实验结果 $(P/P')_{\exp} \approx 4/3$ 是一致的．这里就提出了一个重要的理论问题，因为按照通常采用的含有对力的哈密顿量形式，无法解释 P 系统地大于 P' 这一事实．哈密顿量中更为正确的对力形式，还有待于进一步探讨．

2. 关于库仑能与电荷半径问题　我们曾经对库仑能项系数的取值对结合能计算值的影响进行过分析．结果表明，公式(13)中的值 (0.526 MeV) 是最好的结果．改变这数值反而会使结果变坏．或者反过来说，我们从结合能的分析所得的核电荷半径常数 r_{0p}，与从高能电子散射及 μ 原子的 X 射线谱定出的半径常数 r_{0p} 完全一致，这是很令人鼓舞的．

3. β 稳定线问题　由核质量公式

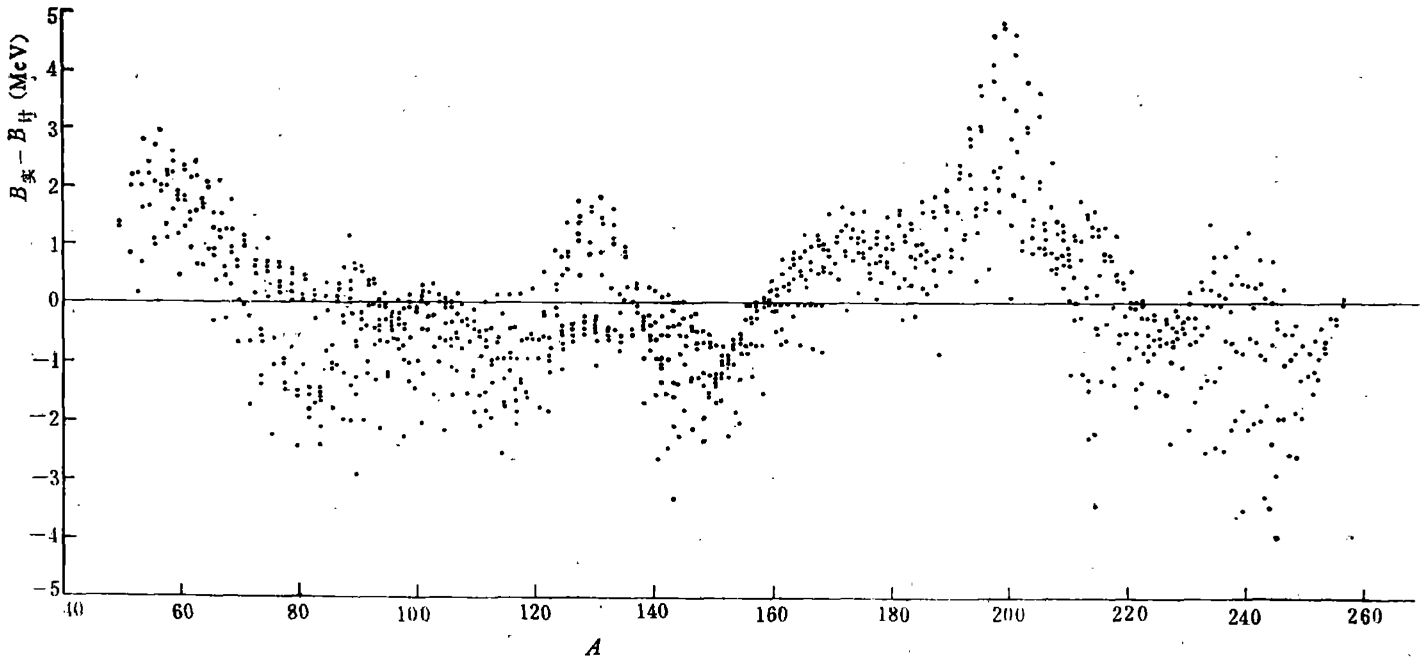

图 2　结合能计算值与实验值的比较

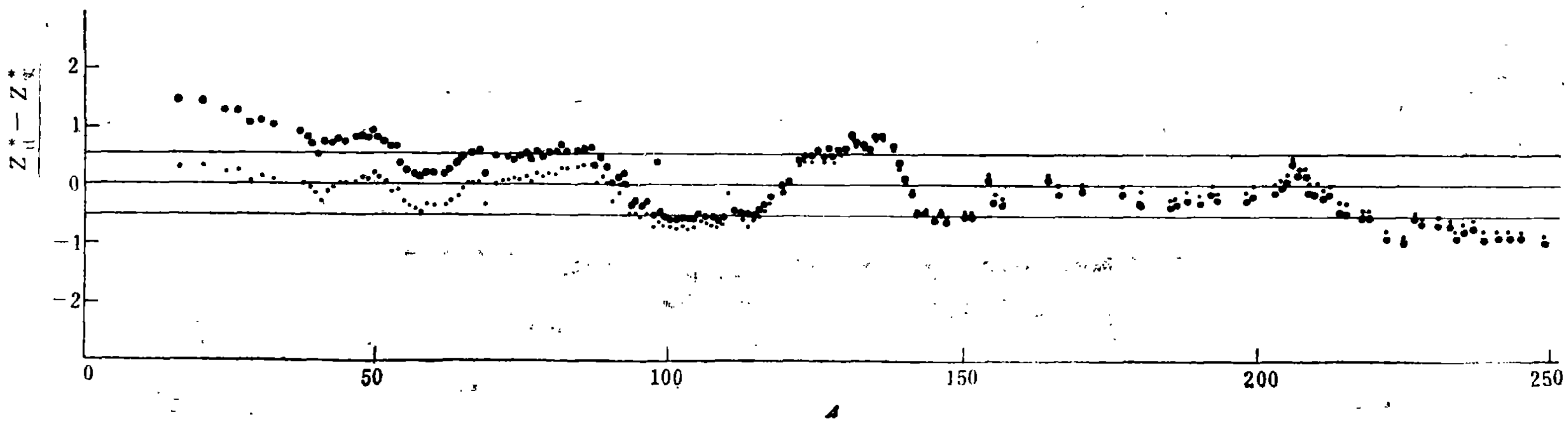

图 3　原子核的 β 稳定性 $Z^*_{实}$ 取自 Dewdney[8]

● ——Danos—Gillet 公式计算值　· ——本文公式计算值

$$M(A, Z) = ZM_H + (A - Z)M_N - B(A, Z) \tag{15}$$

易求出 β 稳定线 (β 稳定谷位置),即由下式确定

$$\left.\frac{\partial M}{\partial Z}\right|_A = 0. \tag{16}$$

A 固定的原子核,对 β 衰变最稳定的同位素的 Z 值记为 Z^*.

对于 Weizsäcker 公式(2)

$$Z^* = \frac{a_{\text{sym}} A^{4/3+\alpha} + 0.78A^{1/3}}{2a_{\text{sym}} A^{1/3+\alpha} + 1.44} \tag{17}$$

对于 Danos-Gillet 公式(1)

$$Z^* = \frac{a_{C2}(A + 4)A^{1/3+\alpha} + 0.78A^{1/3}}{2a_{C2}A^{1/3+\alpha} + 1.44}; \tag{18}$$

对于公式(13),可求得 Z^* 所满足的方程式

$$\frac{5}{3} \times 0.526 \cdot Z^{*2/3} = a_{\text{sym}}(A - 2Z^* + 1)A^\alpha + 0.78. \tag{19}$$

(在推导以上的公式时,略去了 B_{shell} 项). 根据这些公式计算出的 Z^* 与 J. W. Dewdney[8] 从实验分析所得结果的比较,见图 3. 可以清楚地看出,在 β 稳定线问题上,本文公式比 D-G 公式及 Weizsäcker 公式都有明显的改进.

在表 1 中,我们还从自然界中同位素的相对丰度来讨论这问题. 自然界中有一些元素,它们的某个同位素的相对丰度占有绝对的优势[9]. 这些核全部列在表 1 中. 这也是 β 稳定性的一个反映.

4. 对称能形式与结合能计算值 D-G 公式可改写成

$$B(A, Z) = a_V A - a_S A^{2/3} - 0.72Z^2/A^{1/3} - a_{C2}[T(T + 4) + 3/2] \cdot A^\alpha$$
$$+ \begin{cases} 3/2\ a_{C2}A^\alpha & \text{偶偶核,} \\ 0 & \text{奇}A\text{核,} \\ -5/2\ a_{C2}A^\alpha & \text{奇奇核.} \end{cases} \tag{20}$$

从实质上讲, $a_{C2}(T + 2)^2A^\alpha$ 基本上相当于对称能项取 $a_{\text{sym}}T(T + 4)A^\alpha$ 形式. 关于对称能的形式的问题,除前面已提到的 J. Jänecke 的结论外,还有另外一些作者有不同的看法. 例如 Franzini 及 Radicati[10] 的分析: 认为对称能与 T 的关系以 $T(T + 4)$ 为宜,即有利于 SU_4 对称性. 又例如 Aryes 等人[11] 的分析则认为介于 $T(T + 2)$ 与 $T(T + 3)$ 之间. 为此,我们对各种形式都进行了计算,如表 2 所示.

仅从结合能计算值来看,对称能形式似乎取 $T(T + 2)$ 或 $T(T + 3)$ 为宜(方均根偏差小一些). 然而,在 β 稳定线的问题上, $T(T + 2)$、$T(T + 3)$、$T(T + 4)$ 形式以及 D-G 公式,都比较差. 因此,我们仍然认为取 $T(T + 1)$ 较为恰当.

最后,简单地总结一下: 本文主要讨论了三个问题

(i) 原子核奇偶质量差之比 P/P'; (ii) β 稳定线的位置; (iii) 结合能值.

我们对结合能公式中的库仑能项、对称能项及对能项进行了修改,建议采用公式(13)的形式. 这样,在结合能方面与实验符合的程度与 D-G 公式相近, 而在 P/P' 及 β 稳定线方面则与实验符合得较好,不存在 D-G 公式与实验的尖锐矛盾.

表 1

A	同位素	相对丰度(%)	Z^*	A	同位素	相对丰度(%)	Z^*
16	$^{16}_{8}O$	99.759	8.08	88	$^{88}_{38}Sr$	82.56	38.44
19	$^{19}_{9}F$	100	9.45	89	$^{89}_{39}Y$	100	38.84
20	$^{20}_{10}Ne$	90.92	9.90	103	$^{103}_{45}Rh$	100	44.32
23	$^{23}_{11}Na$	100	11.25	115	$^{115}_{49}In$	95.72	48.93
27	$^{27}_{13}Al$	100	13.03	127	$^{127}_{53}I$	100	53.48
31	$^{31}_{15}P$	100	14.79	141	$^{141}_{59}Pr$	100	58.70
36*	$^{35}_{17}Cl$	75.53	16.97	152*	$^{151}_{63}Eu$	47.82	62.75
	$^{37}_{17}Cl$	24.47			$^{153}_{63}Eu$	52.18	
45	$^{45}_{21}Sc$	100	20.84	159	$^{159}_{65}Tb$	100	65.30
48	$^{48}_{22}Ti$	73.94	22.11	169	$^{169}_{69}Tm$	100	68.91
51	$^{51}_{23}V$	99.76	23.37	175	$^{175}_{71}Lu$	97.41	71.06
55	$^{55}_{25}Mn$	100	25.05	181	$^{181}_{73}Ta$	99.99	73.19
59	$^{59}_{27}Co$	100	26.71	186*	$^{185}_{75}Re$	37.07	74.96
64*	$^{63}_{29}Cu$	69.09	28.77		$^{187}_{75}Re$	62.93	
	$^{65}_{29}Cu$	30.91		192*	$^{191}_{77}Ir$	37.3	77.07
70*	$^{69}_{31}Ga$	60.4	31.22		$^{193}_{77}Ir$	62.7	
	$^{71}_{31}Ga$	39.6		197	$^{197}_{79}Au$	100	78.82
75	$^{75}_{33}As$	100	33.25	204*	$^{203}_{81}Tl$	29.50	81.26
80*	$^{79}_{35}Br$	50.54	35.26		$^{205}_{81}Tl$	70.50	
	$^{81}_{35}Br$	49.46		209	$^{209}_{83}Bi$	100	82.99
85	$^{85}_{37}Rb$	72.15	37.25				

* A = 偶数的原子核，若求出的 $[Z^*]$ 为奇数，因而中子数也为奇数，构成奇奇核．但奇奇核不稳定，这已反映在对能项中．在推导 β 稳定线公式 (17)、(18)、(19) 时，都未考虑这一点．因此，对于这样的元素相对丰度最大的一个同位素的质量数分别为 $A\pm1$．实验结果与此完全相符．Z^* 是根据(19)式计算出的．

表 2

形式 \ 参数	$a_{V(\mathrm{MeV})}$	$a_{S(\mathrm{MeV})}$	$a_{sym(\mathrm{MeV})}$	α	χ (方均根偏差MeV)
$T(T+1)$	15.703	18.411	35.776	−0.86	1.26
$T(T+2)$	15.606	18.012	26.425	−0.81	1.20
$T(T+3)$	15.559	17.805	19.628	−0.76	1.20
$T(T+4)$	15.545	17.699	15.429	−0.72	1.23
D-G[1)]	15.889	17.939	$27a_{C_2}.802$	−0.79	1.25

1) 这里所给参数是用 D-G 公式分析 $50\leqslant A\leqslant256$ 的约 1000 个核的结合能定出的．

参 考 文 献

[1] M. Danos and V. Gillet, Proc. Int. Conf. on Nuclear Structure, p. 60 (Tokyo, 1977).
[2] J. Wing and P. Fong, *Phys. Rev.*, **136B** (1964), 923; J. Wing, Atomic Energy Commission Report, ANL—6814 (1964).
[3] A. H. Wapstra and N. Gove, *Nuclear Data Tables*, **9** (1971), 267.
[4] 曾谨言，物理学报，**13**(1957)，357；**24**(1975)，151.
[5] J. Jänecke, *Nucl. Phys.*, **73** (1965), 57.
[6] A. E. S. Green. Nuclear Physics, (1953), Chap. 9.
[7] W. D. Myers and W. J. Swiatecki, *Nucl. Phys.*, **81** (1966), 1.

[8] J. W. Dewdney, *Nucl. Phys.*, **43** (1963), 303.
[9] R. L. Heath, Handbook of Chemistry and Physics (1970—1971, 51st. ed.), B—245.
[10] P. Franzini and L. A. Radicati, *Phys. Lett.*, **6** (1963), 322.
[11] R. Aryes, W. F. Hornyak, D. Chan and H. Fann, *Nucl. Phys.*, **29** (1962), 212.

FURTHER STUDY ON NUCLEAR MASS FORMULA

ZENG JIN-YAN (C. Y. Tseng)　CHENG TAN-SHENG　YANG FU-JIA (F. C. Yang)
(*Peking University*)　(*Fudan Uuiversity*)

ABSTRACT

For the nuclear mass even-odd difference ratio P/P′, there is sharp contradiction between Danos-Gillet's mass formula and the experiment. A new formula is presented in this article, which has the different forms of coulomb energy, symmetry energy and pairing energy terms from the convensional ones. Not only it gives right value of P/P′, but also the good agreement of β stability position and calculated binding energy with the experiment are obtained.