

# 多重性的分布、离散、关联及 KNO Scaling

谢去病 墨文川

(山东大学)

## 摘 要

本文用作者[1,2]中的图象和结果,自然把强子-强子碰撞产生的带电粒子定量分成两类. 决定分布随能量变化的“纯新生”部分,用[1]的  $N(Q)$  关系分析. 证明如假定新生层子对数  $N$  的涨落为依赖其动能势能比的复合泊松分布时,只用一个普适参数就可统一解释: pp 碰撞中多重性分布、离散、关联、KNO 标度等现象.

## 一、引 言

研究高能碰撞末态强子多重性的分布、离散、关联随初态能量的变化,越来越受到重视: (i) 已显示了惊人的规律性,如 Wroblewski 规则、近似 KNO 标度性等等; (ii) 它们在各种反应中定性相同又定量各异,清楚展现某些共性和个性; (iii) 离散  $D$  表征涨落大小,关联函数  $f_2, f_3$  表征粒子产生时的关联,虽都是多重性分布的数字特征,但即使对广阔能区内有系统数据的 pp 碰撞,也没有一个理论能对三者统一定量描述. 目前一些衍射- $\pi$  化二分量模型,有两个缺点: 一是各分量的贡献及其随能量的变化是估计的,任意性很大<sup>[3,4]</sup>,二是或不能同时解释三者<sup>[5]</sup>,或只能解释局部能区<sup>[6]</sup>,或待定参数太多,甚至一个能量一组参数(如[7]).

在我们[1,2]的图象中,次级粒子本来就有两个来源,第二节我们用[1,2]的结果把次级粒子分成真正新产生的及碎裂产生的两类,定量给出它们的贡献和能量变化. 把总带电多重性分布  $P_n$  也相应分解成两个独立部分,首先确定了碎裂部分  $P'_n$  的形式. 第三节着重研究起主导作用的纯新生粒子的分布  $P''_n$ . 分析[1]提出的层子-胶子协同产生机制的基本关系后发现,可假定  $N$  服从依赖  $z$  的复合泊松分布,  $z$  的分布则由物理要求确定. 总括上述结果,第四节给出了  $P_n, D, f_2, f_3$  的公式,它们总共只包含一个普通常数,与 pp 碰撞所有实验材料的比较表明,除个别能量外,都符合很好. 第五节给出了  $P_n$  各阶矩  $c_k \equiv \frac{\langle n^k \rangle}{\langle n \rangle^k}$  的普遍公式,研究了它们的渐近行为,解释了 KNO 标度的表现和性质. 第六节简单探讨多重性分布的可能起因.

## 二、新生粒子与碎裂粒子的贡献

高能强子碰撞时,实验收集的非弹事例,包括例行分类的弹性衍射(准弹性反应)、非

弹衍射(影散射)、纯非弹反应( $\pi$ 化)三类过程的贡献,并无法从实验上明确区分.因此,衍射- $\pi$ 化二分量模型,把前两者合称衍射分量,对其贡献及随能量的变化作半经验的估计,与 $\pi$ 化分量分开,各用不同模型处理.由于未从统一的理论定量给出两分量的贡献,也很难对各分量的模型及总的图象作明确检验.

从我们[2]中的图象及次级强子绝对产额的公式清楚看到,实验直接测到的 $\pi^\pm, K^\pm, \bar{p}, p$ 都有两个来源:一是 $\langle n(M0) \rangle, \langle n(B0) \rangle, \langle n(\bar{B}) \rangle$ 项的贡献,完全是新产生层子(反层子)组合的强子及其快衰变的产物,真是新生粒子.以下把这一类的贡献用脚标“1”标记;一是 $\langle n(M1) \rangle, \langle n(B1) \rangle, \langle n(B2) \rangle$ 项的贡献,是入射强子碎裂的结果,加上[2]中未包括的通常弹性衍射贡献,因正是我们图象中 $N=0$ 时入射粒子碎裂贡献,统称碎裂贡献,用“2”标记.

由[1]已知 $pp, \pi^\pm p, K^\pm p$ 碰撞中次级带电粒子平均数

$$\langle n \rangle = \langle n_{ch} \rangle = 1.14 \langle N \rangle + 2; \quad (1)$$

$\langle N \rangle$ 是新生层子对的平均数,对 $pp$ 碰撞

$$\langle N \rangle = (3.46 + 2.24Q)^{\frac{1}{2}} - 1.68; \quad (2)$$

对 $\pi p, Kp$ 碰撞

$$\langle N \rangle = \left( 3.46 + \frac{6}{5} 2.24Q \right)^{\frac{1}{2}} - 1.68. \quad (2')$$

其中 $Q$ 是入射层子质心系中系统初态的总释放能,可按[1]中的公式由入射强子质心系总能 $\sqrt{s}$ 算出.由 $\sqrt{s}$ 或 $Q$ 按(2)或(2')式算 $\langle N \rangle$ 有5%的允许误差.

现在把 $\langle n \rangle$ 分成新生的 $\langle n_1 \rangle$ 及碎裂的 $\langle n_2 \rangle$ 两部分

$$\langle n \rangle = \langle n_1 \rangle + \langle n_2 \rangle, \quad (3)$$

$$\langle n_1 \rangle = \langle \pi_1^+ \rangle + \langle \pi_1^- \rangle + \langle K_1^+ \rangle + \langle K_1^- \rangle + \langle \bar{p}_1 \rangle + \langle p \rangle. \quad (4)$$

对 $pp$ 碰撞,将[2]中 $\langle \pi_1^\pm \rangle, \langle K_1^\pm \rangle, \langle \bar{p}_1 \rangle, \langle p \rangle$ 的表达式和 $\langle n(M0) \rangle, \langle n(B0) \rangle, \langle n(\bar{B}) \rangle$ 的显式代入(4)式, $\langle n_1 \rangle$ 即表示成 $\langle N \rangle$ 的单值函数,其表达式非常繁杂,但在 $\langle N \rangle$ 的允许误差范围内可简写成

$$\langle n_1 \rangle = 0.972 \langle N \rangle, \quad (5)$$

$$\therefore \langle n_2 \rangle = \langle n \rangle - \langle n_1 \rangle = (1.14 - 0.972) \langle N \rangle + 2 = 2 + 0.168 \langle N \rangle. \quad (6)$$

对 $\pi^\pm p, K^\pm p$ 可得类似结果,从而一般写出:

$$\langle n_1 \rangle = \alpha \langle N \rangle, \quad (5')$$

$$\langle n_2 \rangle = 2 + (1.14 - \alpha) \langle N \rangle. \quad (6')$$

其中 $\alpha$ 为对 $pp, \pi^\pm p, K^\pm p$ 不同的常数,数值近于1,对 $pp$ 反应 $\alpha = 0.972$ .

(5)、(6)或(5)'、(6)'的意义很清楚:新生强子数正比于新生层子对的数目,基本决定 $\langle n \rangle$ 随能量的增加;入射强子至少碎裂成两个带电次级粒子(对于 $K^-p, \pi^-p$ ,我们象得出(1)式的[1]中一样,忽略了电荷交换效应), $\langle n_2 \rangle$ 由2开始,随能量增长很少; $\langle n \rangle$ 小时,主要是 $\langle n_2 \rangle$ 的贡献; $\langle n \rangle$ 大时,主要是 $\langle n_1 \rangle$ 的贡献.图1画出 $\langle n \rangle, \langle n_1 \rangle, \langle n_2 \rangle$ 随 $\sqrt{s}$ 的变化.

以上公式都是对所有碰撞事例的统计平均而言.对单个碰撞,总的次级带电粒子数

$n$  仍可分成新生粒子  $n_1$  及碎裂粒子  $n_2$  两部分:

$$n = n_1 + n_2, \quad (7)$$

但任一能量下,  $n, n_1, n_2$  已是服从某种分布的随机变量. 因多重产生中能量动量守恒对  $n_1, n_2$  的制约很弱,  $n_1, n_2$  近似独立,  $n$  的分布

$$P_n \equiv \frac{\sigma_n}{\sigma_{in}} \text{ 可写成}$$

$$P_n = \sum_{n_1=0}^n P'_{n_1} \cdot P'_{n-n_1}. \quad (8)$$

$\sigma_n$  是拓扑截面,  $\sigma_{in}$  是总非弹截面,  $P'_{n_1}$  是  $n_1$  的分布,  $P'_{n_2} = P'_{n-n_1}$  是  $n_2$  的分布. 电荷守恒仅限制  $n$  取  $\geq 2$  的偶数.  $n$  的离散  $D$  则为

$$D \equiv \sqrt{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2} = \sqrt{D_1^2 + D_2^2}. \quad (9)$$

$D_1, D_2$  分别为  $n_1, n_2$  的离散.

$P'_{n_2}$  及  $D_2$  容易确定, 因入射强子至少碎裂成两个带电粒子, 能量一定时,  $n_2$  增加主要由于直接碎裂粒子的衰变, 所以  $n_2$  只在 2 以外绕  $(1.14 - \alpha)\langle N \rangle$  有小的涨落(见(6)'), 这种涨落服从负指数分布:

$$P'_{n_2} = \frac{1}{(1.14 - \alpha)\langle N \rangle} e^{-\frac{(n_2-2)}{(1.14-\alpha)\langle N \rangle}}, \quad n_2 \geq 2 \quad (10)$$

将(10)离散化, 得

$$P'_{n_2} = A e^{-a(n_2-2)}; \quad A = 1 - e^{-a}; \quad a = \ln \frac{1 + (1.14 - \alpha)\langle N \rangle}{(1.14 - \alpha)\langle N \rangle}. \quad (11)$$

所以

$$D_2^2 \equiv \langle n_2^2 \rangle - \langle n_2 \rangle^2 = \langle n_2 \rangle^2. \quad (12)$$

由此可见  $P'_{n_2}, D$  虽与能量(通过  $\langle N \rangle$ ) 有关, 但依赖很弱,  $P_n, D$  随能量的变化将主要由  $P'_{n_1}, D_1$  决定, 而  $n_1$  的分布又由  $N$  的分布决定.

### 三、 $N$ 的分布

在[1]中我们从层子-胶子协同产生机制得一基本关系

$$\gamma Q = 2N\varepsilon_q + N(2N - 1)\varepsilon_g. \quad (13)$$

其中,  $\gamma$  是两个人射层子碰撞时所带的部分释放能与总释放能  $Q$  的比;  $\varepsilon_q$  是新产生的一个层子或反层子的平均动能;  $\varepsilon_g$  是新生的层子或反层子间, 平均每个相互作用键所具有的势能; 在[1,2]中由(13)出发计算各能量下平均多重数  $\langle n \rangle$  及粒子绝对产额  $\langle j \rangle$  时, 实际上只用到(13)作为对所有碰撞事例的统计平均值  $\langle \gamma \rangle, \langle \varepsilon_q \rangle, \langle \varepsilon_g \rangle, \langle N \rangle$  的关系, 并曾得到  $\langle \gamma_{pp} \rangle = \frac{1}{3}, \langle \gamma_{\pi p} \rangle = \langle \gamma_{Kp} \rangle = \frac{2}{5}, \langle t \rangle = \frac{\langle \varepsilon_q \rangle}{\langle \varepsilon_g \rangle} = 4.22$  等. 然而, (13) 对单个碰撞仍然成立, 我们把(13)改写成

$$Qu = 2N + \frac{N(2N - 1)}{t}, \quad u \equiv \frac{\gamma}{\varepsilon_g}; \quad t \equiv \frac{\varepsilon_q}{\varepsilon_g}. \quad (14)$$

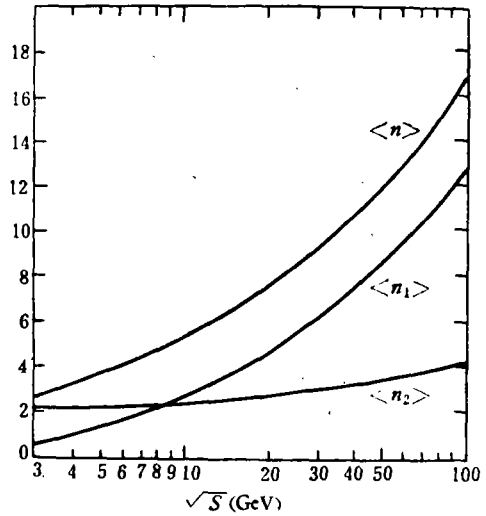


图 1

显然,  $Q$  一定时,  $\alpha$  与  $\left(2N + \frac{(2N-1)N}{t}\right)$  只有一个独立变化. 已知  $N$  为随机变量,  $t$  也是随机变量. 以后用  $f(t)$  表示  $t$  的密度.

由于  $N$  是新产生的层子对的数目, 只取正整数, 一般认为将是泊松型的分布, 但由 (14) 看到,  $N$  的分布不能与  $t$  无关, 因此我们自然假定它是与  $t$  的复合泊松分布

$$P_{N,t} = \frac{(\lambda t)^N e^{-\lambda t}}{N!} f(t) dt, \quad (15)$$

$$P_N = \int_0^{\infty} \frac{(\lambda t)^N e^{-\lambda t}}{N!} f(t) dt. \quad (16)$$

由

$$\langle N \rangle = \sum_{N=0}^{\infty} N P_N = \int_0^{\infty} \lambda t f(t) dt = \lambda \langle t \rangle \quad (17)$$

及(2)得

对 pp 碰撞

$$\lambda = \frac{\langle N \rangle}{\langle t \rangle} = \frac{(3.46 + 2.24Q)^{\frac{1}{2}} - 1.86}{4.22} \quad (18)$$

对  $\pi p$ ,  $K p$  碰撞

$$\lambda = \frac{\langle N \rangle}{\langle t \rangle} = \frac{\left(3.46 + \frac{6}{5} \times 2.24Q\right)^{\frac{1}{2}} - 1.86}{4.22}, \quad (18)'$$

即对任一  $Q$  值,  $\lambda$  为已知常数.

由(5)'式

$$\langle n_1 \rangle = \alpha \langle N \rangle = \lambda \alpha \langle t \rangle, \quad \text{令 } \lambda' \equiv \lambda \alpha \quad (19)$$

即得  $n_1$  的分布:

$$P'_{n_1} = \int_0^{\infty} \frac{(\lambda' t)^{n_1} e^{-\lambda' t}}{n_1!} f(t) dt, \quad (20)$$

$$\langle n_1^2 \rangle = \sum_{n_1=0}^{\infty} n_1^2 \cdot P'_{n_1} = \lambda'^2 \langle t^2 \rangle + \lambda' \langle t \rangle, \quad (21)$$

$$D_1^2 \equiv \langle n_1^2 \rangle - \langle n_1 \rangle^2 = \frac{D_t^2}{\langle t \rangle^2} \langle n_1 \rangle^2 + \langle n_1 \rangle, \quad (22)$$

其中

$$D_t^2 \equiv \langle t^2 \rangle - \langle t \rangle^2, \quad (23)$$

包含在  $P'_{n_1}$  或  $P_N$  中的随机变量  $t$  的分布  $f(t)$  则可由以下考虑确定: (i) 由  $t$  的物理意义(见(14)式),  $t$  为连续变量,  $t > 0$ ,  $t$  很大时几率也应很小; (ii) 把  $D_1, D_2$  的表达式(22)、(12)代入(9)得

$$D = \sqrt{c \langle n_1 \rangle^2 + \langle n_2 \rangle^2 + \langle n_1 \rangle}, \quad (24)$$

其中

$$c \equiv \frac{D_t^2}{\langle t \rangle^2}. \quad (25)$$

对 pp 碰撞, 将(5)、(6)代入(24), 得

$$D = \sqrt{c(0.972\langle N \rangle)^2 + (0.168\langle N \rangle)^2 + (0.972\langle N \rangle)}, \quad (24)'$$

与实验比较(见下节)得  $c$  是小于 1 的常数, 即  $f(t)$  的方差与期望值平方之比必须是常数, 但又不是 1; (3)  $f(t)$  为一常见分布; 显然只有  $\Gamma$  分布

$$f_{\mu, \eta}(t) = \frac{1}{\Gamma(\eta)} \mu^\eta t^{\eta-1} e^{-\mu t} \quad (\eta > 0, t > 0) \quad (26)$$

符合上述三个要求. 此时

$$\langle t \rangle = \eta/\mu; \quad D_t^2 = \eta/\mu^2; \quad D_t^2/\langle t \rangle^2 = \frac{1}{\eta} = c; \quad \mu = \eta/\langle t \rangle = \frac{1}{c\langle t \rangle},$$

所以

$$f(t) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{c}\right)} \left(\frac{1}{c\langle t \rangle}\right)^{\frac{1}{c}} (t)^{\frac{1}{c}-1} e^{-\frac{t}{c\langle t \rangle}} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{c}\right)} \cdot \left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{1}{c}} \cdot \left(\frac{t}{\langle t \rangle}\right)^{\frac{1}{c}-1} e^{-\frac{t}{c\langle t \rangle}} \cdot \frac{1}{\langle t \rangle}. \quad (27)$$

将(27)代入(16)和(20)即最后给出  $P_N$  及  $P'_{n_1}$  的表式

$$P_N = \int_0^\infty \frac{(\langle N \rangle t)^N}{N!} e^{-\langle N \rangle t} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{c}\right)} \cdot t^{\frac{1}{c}-1} \cdot \left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{1}{c}} \cdot e^{-\frac{t}{c}} dt, \quad (28)$$

$$P'_{n_1} = \int_0^\infty \frac{(\alpha \langle N \rangle t)^{n_1}}{n_1!} e^{-\alpha \langle N \rangle t} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{c}\right)} \cdot t^{\frac{1}{c}-1} \cdot \left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{1}{c}} \cdot e^{-\frac{t}{c}} dt. \quad (29)$$

由得出  $P_N$  的过程及(28)式都可看到,  $P_N$  不依赖于入射粒子的类型, 因此它是一切多重产生过程的共性, 是非弹过程根本机制的表现.

#### 四、总的多重性分布、离散与关联

由上两节的结果, 立即可写出多重产生中次级带电粒子数  $n$  的分布  $P_n$ . 离散  $D$  与关联  $f_2, f_3$  的表达式: 将(11)、(29)代入(8), 得

$$P_n = \frac{\sigma_n}{\sigma_{in}} = \sum_{n_1=0}^n \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha \langle N \rangle t} (\alpha \langle N \rangle t)^{n_1}}{n_1!} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{c}\right)} \cdot t^{\frac{1}{c}-1} \cdot \left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{1}{c}} \cdot e^{-\frac{t}{c}} dt A e^{-\alpha(n-n_1-2)}. \quad (30)$$

将(5)'、(6)'代入(24)得

$$D = \sqrt{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2} = \sqrt{c\alpha^2 \langle N \rangle^2 + (1.14 - \alpha)^2 \langle N \rangle^2 + \alpha \langle N \rangle}. \quad (31)$$

关联函数

$$f_2 = \langle n(n-1) \rangle - \langle n \rangle^2 = D^2 - \langle n \rangle = c\alpha^2 \langle N \rangle^2 + (1.14 - \alpha)^2 \langle N \rangle^2 - (1.14 - \alpha) \langle N \rangle - 2, \quad (32)$$

$$f_3 = \langle n(n-1)(n-2) \rangle - 3f_2 \langle n \rangle - \langle n \rangle^3 = \langle n^3 \rangle - 3f_2(\langle n \rangle + 1) - \langle n \rangle^3 - 3\langle n \rangle^2 - \langle n \rangle. \quad (33)$$

上式中

$$\langle n^3 \rangle \equiv \sum_{n=0}^{\infty} n^3 P_n. \quad (34)$$

从(33)看到,  $f_3$  中唯一的新东西是  $\langle n^3 \rangle$ , 所以在反映关联方面, 它不比  $f_2$  多更多东西, 而  $\langle n \rangle$  的高次幂的积累误差却很大, 直接比较  $\langle n^3 \rangle$  倒是  $P_n$  的灵敏检验.

由(30)–(34)及其得出过程看到: (i) 我们理论中  $P_n, D, f_2, f_3$  是统一给出的; (ii) 第二、三节的处理原则适用于任何反应; (iii) 对可直接用于  $pp, \pi^\pm p, K^\pm p$  的(30)–(34)式, 只是不同反应  $\alpha$  不同; (iv) 它们总共只含一个与反应类型、入射能量无关的待定普适参数  $c$ ; (v) 对  $pp$  反应, 我们已从理论上得到  $\alpha = 0.972$  (见第二节), 所以  $P_n, D, f_2, f_3$  或  $\langle n^3 \rangle$  的公式中只有一个待定参数  $c$

$$P_n = \sum_{n_1=0}^n \int_0^{\infty} \frac{e^{-0.972\langle N \rangle t} (0.972\langle N \rangle t)^{n_1}}{n_1!} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{c}\right)} \cdot t^{\frac{1}{c}-1} \cdot \left(\frac{1}{c}\right)^{\frac{1}{c}} \cdot e^{-\frac{1}{c}t} dt A e^{-\alpha(n-n_1-2)}, \quad (30)'$$

$$D = \sqrt{0.945c\langle N \rangle^2 + 0.028\langle N \rangle^2 + 0.972\langle N \rangle}, \quad (31)'$$

$$f_2 = 0.945c\langle N \rangle^2 + 0.028\langle N \rangle^2 - 0.168\langle N \rangle - 2, \quad (32)'$$

$$\langle n^3 \rangle = \sum n^3 P_n. \quad (34)$$

现在也只在  $pp$  反应中有最广阔能区 ( $10 \leq P_{in} \leq 2100 \text{ GeV}/c$ ) 上  $P_n, D, f_2, \langle n^3 \rangle$  四方面的实验资料, 下面我们取  $c = 0.412$  后, 把(30)'–(32)', (34) 算的理论值与实验比较, 以检验我们的理论. 由于计算各能量下  $\langle N \rangle$  值的公式(2)有5%的允许误差<sup>[1]</sup>, 使  $D, f_2$  有允许误差  $\Delta_D, \Delta_{f_2}$ :  $\Delta_D \leq 0.05D$ ;  $\Delta_{f_2} = 0.0417\langle N \rangle^2 + 0.0084\langle N \rangle$ . 由于  $c = 0.412$  主要从适应  $P_n$  定出, 与实验比较时  $P_n$  及  $\langle n^3 \rangle$  的理论误差暂不考虑. 图2–4 分别给出  $D, f_2, \langle n^3 \rangle$  理论曲线与实验值的比较,  $D, f_2$  都只有一、两个实验点与理论不

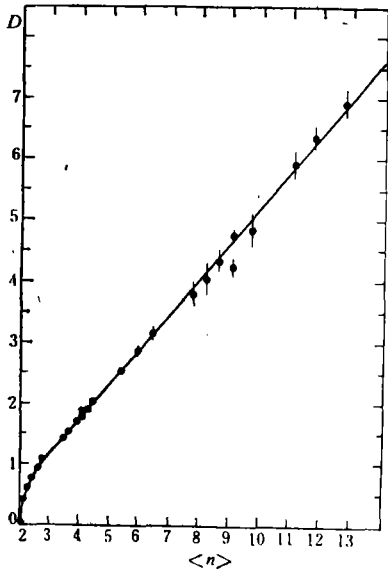


图 2

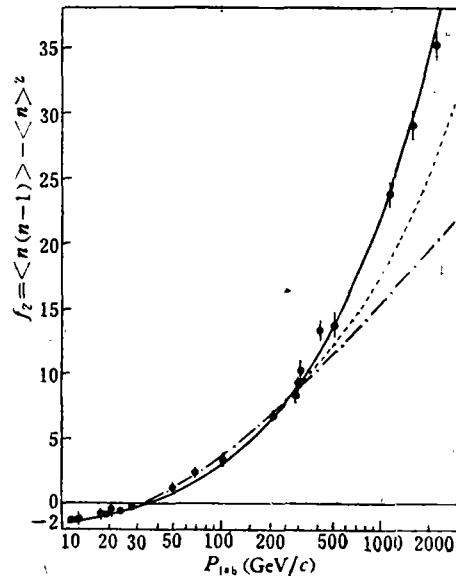


图 3

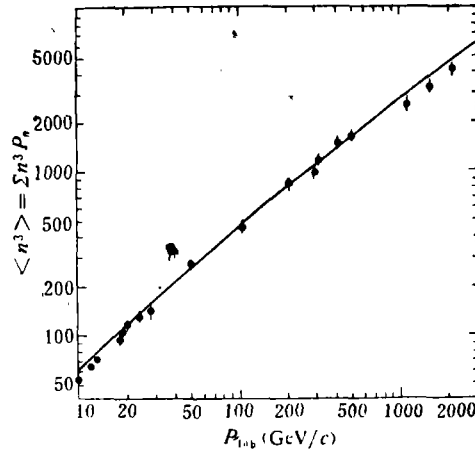


图 4

符。

至今发表了 17 个能量下  $P_n$  的实验值, 对其中 13 个给出了测量的非弹事例总数的, 都作  $\chi^2$  检验, 其余 4 个则直接画出实验与理论分布 (图 5—8)、表 1 第 4 列给出该能量下  $D, f_2, \langle n^3 \rangle, P_n$  所有实验资料的来源, 5、6、7 列为对  $P_n$  作  $\chi^2$  检验时的  $\chi^2$  值、自由度、及剔出的例外点, 可见所有  $P_n$  实验结果都相当符合 (30)' 给出的理论分布。

表 1

1	$P_{1,0}(\text{GeV}/c)$	4.0	5.5	10	12	12.9	18	19	21.1	24.1	28.5	50
2	$\sqrt{s}(\text{GeV})$	3.08	3.50	4.54	4.93	5.10	5.97	6.12	6.43	6.84	7.42	9.78
3	$\langle N \rangle$	0.62	0.81	1.21	1.35	1.41	1.69	1.75	1.84	1.95	2.13	2.74
4	资料来源	[8]	[9]	[10]	[11]	[12]	[12]	[13]	[12]	[11]	[14]	[15]
5	$\chi^2$			图 5	图 6			11.05		图 7	图 8	4.86
6	自由度							6				7
7	例外点( $n$ )							(2)				(8)
1	69	100	102	205	300	303	405					
2	11.5	13.76	13.9	19.6	23.7	23.9	27.6	23.6	30.8	45.2	53.2	62.8
3	3.15	3.63	3.65	4.71	5.38	5.41	5.95	5.36	6.40	8.16	9.02	9.97
4	[15]	[16]	[17]	[18]	[19]	[20]	[17]	[21]	[21]	[21]	[21]	[21]
5	10.30	6.14	11.2	15.57	16.1		7.85		3.10	12.94	14.77	16.18
6	8	9	9	12	13		15		12	12	15	16
7	(10)	(+)(10)	(10)	(4)(12)	(4)(6)		(6)		(4)	(18)	(2)(10)	(2)(10)

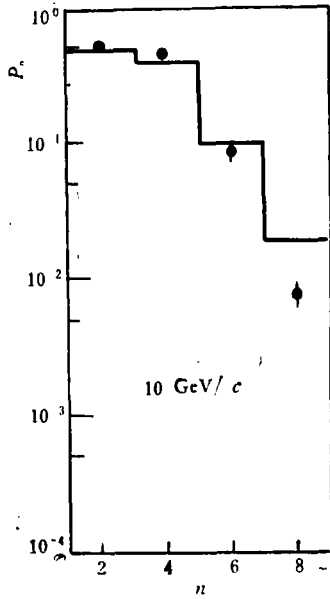


图 5

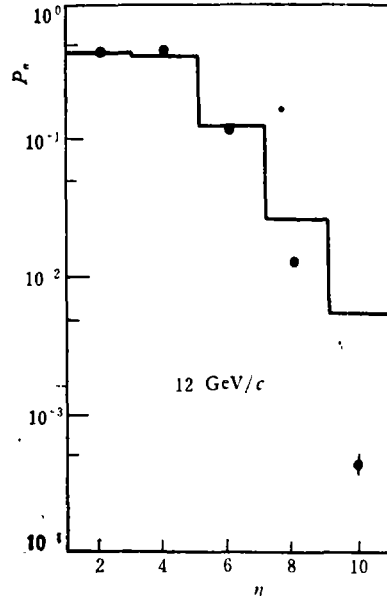


图 6

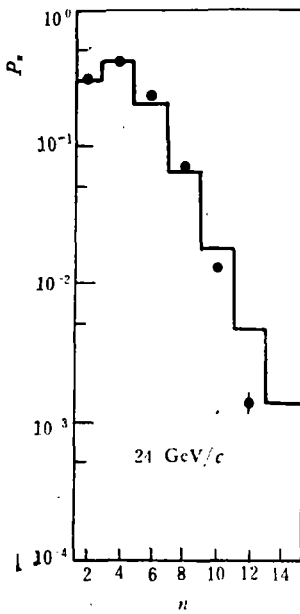


图 7

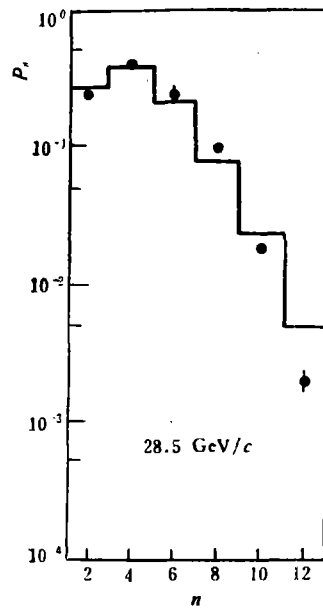


图 8

### 五、 $P_n$ 的各阶矩与 KNO Scaling

由概率论知，在一定条件下研究分布  $P_n$  的各阶矩与研究分布等价。又知，电荷矩  $c_k = \frac{\langle n^k \rangle}{\langle n \rangle^k}$  与能量无关与 KNO Scaling 等价<sup>[22]</sup>。至今，KNO Scaling 存不存在？是偶然现象还是固有规律？是近似规律还是渐近规律？近似程度或渐近速度如何？都是看法纷



统的问题<sup>[23]</sup>. 下面从我们的理论给出任意阶  $c_k$  的严格数学表示, 从而对上述问题作出明确解答.

1. 求  $\langle n^k \rangle$  由[24]知, 泊松分布  $\frac{a^n}{n!} e^{-a} (n = 0, 1, 2, \dots)$  的  $k$  阶原点矩

$$m_k = S_k(a) = S_k(m_1).$$

$S_k$  为一  $k$  阶多项式,  $k$  次项系数为 1, 零次项系数为零, 如

$$m_1 = a; m_2 = a^2 + a; m_3 = a^3 + 3a^2 + a; \dots, \quad (35)$$

而  $\Gamma$  分布(27)的  $k$  阶原点矩为

$$\langle t^k \rangle = \int_0^\infty t^k f(t) dt = (c+1) \cdots ((k-1)c+1) \langle t \rangle^k. \quad (36)$$

从而得  $P'_{n_1}$  的  $k$  阶原点矩

$$\begin{aligned} \langle n_1^k \rangle &= \int_0^\infty \sum_{n_1=0}^\infty n_1^k \frac{(\lambda' t)^{n_1}}{n_1!} e^{-\lambda' t} f(t) dt, \quad (n_1 = 0, 1, 2, \dots) \\ &= \int_0^\infty S_k(\lambda' t) f(t) dt = \lambda'^k \langle t^k \rangle + \dots + \lambda' \langle t \rangle. \end{aligned}$$

将(19)、(36)代入, 即得

$$\begin{aligned} \langle n_1^k \rangle &= (c+1) \cdots ((k-1)c+1) \langle n_1 \rangle^k + \dots + \langle n_1 \rangle, \quad (k \geq 2) \\ &\equiv S'_k(\langle n_1 \rangle). \end{aligned} \quad (37)$$

令  $v_0 = v_1 = 1$ ,  $v_i = (c+1) \cdots (c_i-1)c+1$ , ( $i \geq 2$ )

即可见  $\langle n_1 \rangle \rightarrow \infty$  时

$$\frac{\langle n_1^k \rangle}{\langle n_1 \rangle^k} \rightarrow v_k = \text{常数}, \quad (38)$$

所以新生粒子的分布  $P'_{n_1}$  有渐近 KNO Scaling.

2. 求  $\langle n_2^k \rangle$  设  $n_2 = n'_2 + 2$ , 由第二节知  $n'_2$  有负指数分布, 但负指数分布是  $\Gamma$  分布(27)式  $\eta = 1$  的特例, 因  $c = \frac{1}{\eta} = 1$ , 故由(36)得

$$\langle n_2^k \rangle = k! \langle n'_2 \rangle^k,$$

于是

$$\begin{aligned} \langle n_2^k \rangle &= \langle (n'_2 + 2)^k \rangle = \langle n_2^k \rangle + 2c_k^1 \langle n_2^{k-1} \rangle + \dots + 2^k \\ &= k! \langle n'_2 \rangle^k + 2c_k^1 (k-1)! \langle n'_2 \rangle^{k-1} + \dots + 2^k \equiv S''_k(\langle n'_2 \rangle). \end{aligned} \quad (39)$$

3. 求  $\langle n^k \rangle$  和  $c_k$  由于  $n = n_1 + n_2$ ,  $n_1, n_2$  统计独立(见第二节), 所以

$$\langle n^k \rangle = \langle (n_1 + n_2)^k \rangle = \sum_{i=0}^k c_k^i \langle n_1^i \rangle \langle n_2^{k-i} \rangle.$$

将(37)、(39)式代入, 得

$$\langle n^k \rangle = \sum_{i=0}^k c_k^i S'_i(\langle n_1 \rangle) S''_{k-i}(\langle n_2 \rangle).$$

将(5)'式  $\langle n_1 \rangle = \alpha \langle N \rangle$  及(6)'式  $\langle n_2 \rangle = (1.14 - \alpha) \langle N \rangle$  代入上式, 得

$$\langle n^k \rangle = \pi_k(\langle N \rangle). \quad (40)$$

$\pi_k$  亦为  $k$  阶多项式, 其  $\langle N \rangle^k$  项的系数是

$$\pi_k = \sum_{i=0}^k c_k^i (k-i)! \nu_i \alpha^i (1.14 - \alpha)^{k-i}. \quad (41)$$

由(1)式得

$$\langle n \rangle^k = (1.14 \langle N \rangle + 2)^k = \sum_{i=0}^k c_k^i \cdot 2^i \cdot (1.14 \langle N \rangle)^{k-i},$$

所以

$$c_k = \frac{\langle n^k \rangle}{\langle n \rangle^k} = \frac{\pi_k(\langle N \rangle)}{\sum_{i=0}^k c_k^i 2^i (1.14 \langle N \rangle)^{k-i}}. \quad (42)$$

分子分母同用  $\langle N \rangle^k$  除, 得

$$c_k = \frac{\pi_k + O\left(\frac{1}{\langle N \rangle}\right)}{(1.14)^k + O\left(\frac{1}{\langle N \rangle}\right)}. \quad (43)$$

当  $\langle N \rangle \rightarrow \infty$  时

$$c_k \rightarrow \frac{\pi_k}{(1.14)^k} = \text{常数}, \quad (k \geq 2) \quad (44)$$

即 KNO Scaling 成立. (42)式给出各  $\langle N \rangle$  值(即各  $\sqrt{s}$ )下  $k \geq 2$  的  $c_k$  值, 它们随  $\frac{1}{\langle N \rangle} \rightarrow 0$  趋向极限值  $\frac{\pi_k}{(1.14)^k}$ , 渐近速度由  $O\left(\frac{1}{\langle N \rangle}\right)$  给出, 由于  $\pi_k$  随  $k$  增加而增加, 故  $c_k$  的渐近速度也随  $k$  增加而减缓.

**4. pp 反应** 已知 pp 反应  $\alpha = 0.972$ , 并已定出  $c = 0.412$ , 由(41)得

$$\pi_2 = (c+1)\alpha^2 + 2\alpha(1.14 - \alpha) + 2(1.14 - \alpha)^2 = 1.717,$$

$$\pi_3 = (c+1)(2c+1)\alpha^3 + 3(c+1)\alpha^2(1.14 - \alpha) + 6\alpha(1.14 - \alpha)^2 = 3.202,$$

$$\pi_4 = (c+1)(2c+1)(3c+1)\alpha^4 + 4(c+1)(2c+1)\alpha^3(1.14 - \alpha) + 12(c+1)\alpha^2(1.14 - \alpha)^2 + 24\alpha(1.14 - \alpha)^3 + 24(1.14 - \alpha)^4 = 7.311,$$

.....

再用(42)式, 即可算出各能量下的  $c_k$  值:

$$c_2 = \frac{1.717 \langle N \rangle^2 + 5.532 \langle N \rangle + 4}{(1.14 \langle N \rangle + 2)^2},$$

$$c_3 = \frac{3.230 \langle N \rangle^3 + 12.126 \langle N \rangle^2 + 20.484 \langle N \rangle + 8}{(1.14 \langle N \rangle + 2)^3},$$

$$c_4 = \frac{7.311 \langle N \rangle^4 + 29.106 \langle N \rangle^3 + 57.789 \langle N \rangle^2 + 68.556 \langle N \rangle + 16}{(1.14 \langle N \rangle + 2)^4},$$

.....

表2列出了  $c_2, c_3, c_4$  的极限值及 ISR 能量下的理论和实验值<sup>[21]</sup>

表 2

$\sqrt{s}$ GeV		23.6	30.8	45.2	53.2	62.8	$\infty$
$c_2$	理论	1.261	1.270	1.279	1.283	1.286	1.321
	实验	$1.249 \pm 0.009$	$1.256 \pm 0.012$	$1.287 \pm 0.015$	$1.295 \pm 0.008$	$1.297 \pm 0.010$	
$c_3$	理论	1.806	1.845	1.896	1.915	1.940	2.180
	实验	$1.840 \pm 0.033$	$1.859 \pm 0.041$	$1.988 \pm 0.054$	$2.012 \pm 0.030$	$2.017 \pm 0.034$	
$c_4$	理论	2.90	3.04	3.23	3.30	3.37	4.328
	实验	$3.08 \pm 0.09$	$3.12 \pm 0.11$	$3.53 \pm 0.16$	$3.58 \pm 0.09$	$3.60 \pm 0.10$	

可见: (i) 理论的预言与现有的实验符合相当好; (ii) 在目前加速器最高能量下,  $c_2$  与极限值尚差 2% 左右,  $c_3$  尚差 10% 左右,  $c_4$  尚差 20% 左右, 即 KNO Scaling 仍未成立; (iii) 在有限能量下, 由于愈高阶的矩与其极限值的近似程度愈差, 渐近速度愈慢, 因此严格的 KNO Scaling 只是渐近规律。

## 六、对动力学起因的初步探讨

本文从层子-胶子协同产生机制的(14)(或(13))出发, 假定  $N$  服从分布(16), 定量解释了各能量下多重分布的大量现象。但  $N$  的分布, 应是碰撞中的动力学结果。从(14)或(13)不难看出, 仅仅由于  $\varepsilon_q$  或  $\varepsilon_g$  及  $\varepsilon_q$  与  $\varepsilon_g$  随机变化, 都不足以引起  $P_N$ ; 因为只是  $\varepsilon_q$  或  $\varepsilon_g$  为随机变量时, 不仅与能量守恒矛盾,  $P_N$  也完全由  $f(t)$  决定, 与前述结果矛盾; 只是  $\varepsilon_q$  和  $\varepsilon_g$  随机变化, 则必须同时  $t$  服从  $f(t)$ ,  $\varepsilon_g$  的分布决定  $P_N$ ,  $2N\varepsilon_q + N(2N-1)\varepsilon_g =$  常数, 也是不可能的, 所以, 为了引起  $P_N$ , 必须(14)或(13)中的  $\gamma$  为随机变量。  $\gamma$  不同, 当然  $N$  一般也会不同。从物理上更易理解: 由轻子深度非弹实验已知强子内价层子动量是一随机量, 两入射强子中哪两个层子发生了碰撞也是随机的, 它们带来的能量份额  $\gamma$  当然是随机变量, 并在即使  $\varepsilon_q, \varepsilon_g$  不变时, 也导致  $N$  的分布。因此  $\gamma$  的涨落将是引起多重性分布的基本原因,  $\varepsilon_q, \varepsilon_g$  的涨落是次要原因。对这问题的定量探讨, 以后专题进行。

感谢杨洪同志在数值计算中的大量帮助。

## 参 考 文 献

- [1] 谢去病, 高能物理与核物理, **3** (1979), 530
- [2] 谢去病, 高能物理与核物理, **4** (1980), 466.
- [3] K. Zalewski, 1974 Proc. 17th Int. Conf. on High Energy Physics, London, I—108.
- [4] J. P. Aurenche and J. E. Paton, *Rep. Prog. Phys.*, **39** (1976), 175.
- [5] B. C. Мурзин et al., Множественные процессы при высоких энергиях М. атомиздат, 1974, p. 200.
- [6] N. Hashimoto, *Prog. Theor. Phys.*, **61** (1979), 151.
- [7] A. D'Innocenzo et al., *Nuo. Cim.*, **44A** (1978), 375.
- [8] L. Bodini et al., *Nuo. Cim.*, **58A** (1968), 475.
- [9] G. Alexander et al., *Phys. Rev.*, **154** (1967), 1284.
- [10] S. P. Almeida et al., *Phys. Rev.*, **174** (1968), 1638.
- [11] V. Blobel et al., *Nucl. Phys.*, **69B** (1974), 454.
- [12] D. B. Smith et al., *Phys. Rev. Lett.*, **23** (1969), 1064.
- [13] H. Bóggild et al., *Nucl. Phys.*, **27B** (1971), 285.
- [14] W. H. Sims et al., *Nucl. Phys.*, **41B** (1972), 317.

- [15] V. V. Ammosov et al., *Phys. Lett.*, **42B**(1972), 519.  
 [16] W. M. Morse et al., *Phys. Rev.*, **D15**(1977), 66.  
 [17] C. Bromberg et al., *Phys. Rev. Lett.*, **31** (1973), 1563.  
 [18] S. Barish et al., *Phys. Rev.*, **D9** (1974), 2689.  
 [19] A. Firestone et al., *Phys. Rev.*, **D10** (1974), 2080.  
 [20] Dao et al., *Phys. Rev. Lett.*, **29** (1972), 1627.  
 [21] W. Thome et al., *Nucl. Phys.*, **B129** (1977), 365.  
 [22] J. Whitmro, *Phys. Reports*, **10C** (1974), 273.  
 [23] 可见 I. Yotsuyanagi et al., *Phys. Rev.*, **D19** (1979), 230 及其所引有关文献。  
 [24] 王梓坤, 《概率论基础及其应用》(1963), p. 114, 115. 科学出版社。

## MULTIPLICITY DISTRIBUTIONS, DISPERSION, CORRELATIONS AND KNO SCALING

XIE QU-BING MO WEN-CHUAN

(Shandong University)

### ABSTRACT

Secondary charged particles produced in hadron-hadron collisions are divided quantitatively into two kinds in the light of the picture given by the authors [1, 2] and the results deduced therefrom. One of these parts, the genuine newborn particles, is analysed by means of the  $N(Q)$  dependence in [1]. Under the assumption that the dependence of the fluctuation of the number of newborn quark pairs on the ratio of kinetic to potential energies takes the form of a compound Poisson distribution, it is shown that the multiplicity distributions, dispersions, correlations and KNO scaling in pp collisions can be fitted with a single parameter on a unified basis. General formula of moments  $c = \frac{\langle n \rangle^k}{\langle n \rangle^k}$  are given and their asymptotic properties are studied, resulting in an explanation of the appearance and behavior of the KNO scaling. A brief discussion is given to the possible origin of the multiplicity distribution.