

Eikonal-Born 展开及其对大角度 散射问题的应用

卢世琪

朱熙泉

(中国科学院高能物理研究所) (中国科学院理论物理研究所)

赵维勤 鲍诚光

(中国科学院高能物理研究所)

摘 要

本文以沿入射方向和沿出射方向传播的两个程函波函数取代 DWBA 的扭曲波, 将散射振幅展开。从而给出一种利用程函近似计算非相对论大角度散射的方法。这一方法易于推广到相对论性唯象动力学方程。

一、引 言

对散射问题的研究是强子相互作用唯象理论的重要方面。从低能二体散射的研究已经得到了核力的许多知识。但是在低能过程中, 动量转移小, 粒子间相互作用仅限于核力外区。散射截面对核力内区是不敏感的。为了了解核力内区的情况必须研究有“大动量转移”的散射, 即高能大角度散射。

当能量较高时, 分波法不宜使用。对大角度散射问题, 程函近似亦不宜使用。这就必须发展一种方法能处理“高能大角度散射”问题。自从以 Schrödinger 方程为基础的程函近似应用于中能小角度散射以来^[1], 就有人在此基础上着手大角度散射的研究。Frahn^[2]以入射方向程函解为基础考虑了全部垂直于该方向的动量转移的修正, 得到了一个漂亮的形式解。(得到的散射振幅形式和 Glauber 的散射振幅形式一样。但传播子和波函数的具体形式复杂, 没法实际应用。) Wallace^[3]以入射和出射的平均方向的程函解为基础讨论了最初几级非线性动量转移的修正, 对于中间角度的散射问题取得了相当的成功。但是对于大角度散射, 特别是向后散射问题, 要想以入射方向或入射与出射的平均方向为基础来考虑修正效应, 是比较困难的。因此这些工作在向后散射的区域同严格解之间仍然存在数量级的差异^[4]。Levy^[5]不是从 Schrödinger 方程出发, 而是直接从散射振幅的 Born 展开出发, 分别引入沿入射和沿出射方向的线性传播子以完成 Born 序列的求和。形式上散射振幅具有大角度折射的效果。无疑 Levy 的方法在推广到场论为基础的散射振幅

线性化问题时具有特别的优越性。但是作为一个位散射问题,这个近似在大角度时的意义是十分不易了解的。事实上对于向后散射的问题,Levy的结果与严格解之间也同样存在巨大差异^[5]。

当然,对于真正“大动量转移”散射,只有在高能情况才能实现,但这时 Schrödinger 方程应该用一个相对论性的方程去替代它。仍从唯象的角度来说,或者说在保持位势的概念下,这种相对论性的方程可以是 Bakamjian-Thomas 方程^[6],也可以是以 Bethe-Salpeter 型方程为基础的三维准势方程^[7]。这些方程的求解均可以程函近似为基础^[8,7]。并且一般来说,能量越高,程函近似越好。为了研究高能下的核力或者说核力内区的行为,最终我们应从这些方程出发。

本文给出在 Schrödinger 方程基础上散射振幅 Eikonal-Born 展开的严格表达式,它的一级近似 Eikonal-Born 近似(EWBA)与通常的扭曲波 Born 近似类似,只是扭曲波分别代之以入射和出射方向的程函波函数。这种从程函波函数出发的分析,亦可以从 T 矩阵的分解来实现(Sugar 和 Blankenbecler 在 [9] 中出色地完成了这一分解,但此后有关的工作对这一形式的物理内容未给以足够的重视)。我们的数值计算表明对于向后区域以外相当广的角度范围内,EWBA 是一个十分方便的近似方法。对向后散射的问题,则讨论了二次 EWBA 的可能近似。随后的工作中将把这一方法推广到 B-T 方程为基础的大角度散射振幅的计算。

二、Eikonal-Born 展开

在质心系,两体散射的 Schrödinger 方程是

$$(\nabla^2 + k^2)\psi = \frac{2\mu}{\hbar^2} V\psi. \quad (1)$$

μ 为约化质量,对任意方向,例如入射方向 \mathbf{n}_i (以下亦用到出射方向 \mathbf{n}_f 和中间方向 \mathbf{n}_0) 可定义沿 \mathbf{n}_i 方向和垂直于 \mathbf{n}_i 方向的坐标与梯度 $z_i, \nabla_{\parallel i}, \mathbf{b}_i, \nabla_{\perp i}$ 。

可令
$$\nabla^2 + k^2 = 2k[(k + i\nabla_{\parallel i}) - h_i], \quad (2)$$

其中
$$h_i = \frac{1}{2k} ((k + i\nabla_{\parallel i})^2 - \nabla_{\perp i}^2). \quad (3)$$

如果在 (2) 式中略去 h_i , 相应地得到 (1) 式的程函近似解 ϕ_i^{eik} ,

$$\phi_i^{eik} = e^{i\mathbf{h}_i \cdot \mathbf{r}} e^{-i \int_{-\infty}^z dx'_i \tilde{V}(\mathbf{b}_i, x'_i)}, \quad (4)$$

满足
$$(k^+ + i\nabla_{\parallel i})\phi_i^{eik} = \tilde{V}\phi_i^{eik}, \quad (5)$$

其中
$$\tilde{V} = \frac{\mu}{\hbar^2} V.$$

(1) 式的严格解 ψ 可以按 ϕ_i^{eik} 展开, 写为

$$\psi = \phi_i^{eik} + g h_i \phi_i^{eik} \quad (6)$$

其中
$$g = \frac{1}{(k^+ + i\nabla_{\parallel i}) - \tilde{V} - h_i}, \quad (7)$$

由于 (7) 可化成

$$g = \frac{\hbar^2 k}{\mu} \cdot \frac{1}{E^+ - H} = \frac{2E}{\hbar} \cdot \frac{1}{E^+ - T - V},$$

因而 g 是不带方向性的“全传播子”。换言之, (7) 式中 ∇_{\parallel} 和 h 的下标 i 可改换成任意其他方向的相应下标。利用 (6) 式, 可将散射振幅写成

$$\langle f|V|\psi\rangle = \langle f|V|\psi_i^{eik}\rangle + \langle f|V|gh_i\psi_i^{eik}\rangle, \quad (8)$$

其中 $\langle f|V|gh_i\psi_i^{eik}\rangle = \langle g^*V^*f|h_i\psi_i^{eik}\rangle = \frac{2E}{\hbar} \langle \psi_i^{(-)} - f|h_i\psi_i^{eik}\rangle. \quad (9)$

其中 $\psi_i^{(-)}$ 是 Schrödinger 方程具有入射波边界条件的解:

$$\psi_i^{(-)} = \left(1 + \frac{1}{E^- - T - V^*} V^*\right) e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}}. \quad (10)$$

(10) 式亦可以程函波函数展开

$$\psi_i^{(-)} = \psi_i^{eik} + g^* h_i \psi_i^{eik}, \quad (11)$$

其中

$$h_i = \frac{1}{2k} [(\mathbf{k} + i\nabla_{\parallel i}) - \nabla_{\perp i}^2], \quad \psi_i^{eik} = e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} e^{i \int_{z_0}^{\infty} \tilde{v}^*(b_i, z'_i) dz'_i}, \quad (12)$$

满足 $(k^- - i\nabla_{\parallel i})\psi_i^{eik} = \tilde{v}^* \psi_i^{eik}. \quad (13)$

以 (11) 式再代回 (9) 式中, 并利用(证明见附录)

$$\langle g^* h_i \psi_i^{eik} | h_i \psi_i^{eik} \rangle = \langle h_i \psi_i^{eik} | g | h_i \psi_i^{eik} \rangle, \quad (14)$$

最后得到散射振幅以程函波函数描述的展开式

$$\langle f|V|\psi\rangle = \langle f|V|\psi_i^{eik}\rangle + \frac{2E}{\hbar} \langle \psi_i^{eik} - f|h_i\psi_i^{eik}\rangle + \frac{2E}{\hbar} \langle h_i\psi_i^{eik} | g | h_i\psi_i^{eik}\rangle. \quad (15)$$

(15) 式是散射振幅严格表达式。在文[9]中利用对 T 矩阵的分解得到了同样的表达式。其首项即通常的 Eikonal 振幅。第二项表示 EWBA 即非线性动量转移的一次修正。第三项是必须引入适当近似的。由于 g 夹在两种传播方式之间——即沿 \mathbf{k}_i 和 \mathbf{k}_f 两个方向的线性传播子之间, 作为描写中间过程的传播, 一个方便和适宜的近似是把 g 中的所有自由传播子近似为沿中间方向的线性传播子, 即令

$$g \equiv \frac{1}{(k^+ + i\nabla_{\parallel 0}) - \tilde{v} - h_{i0}} \simeq \frac{1}{(k^+ + i\nabla_{\parallel 0}) - \tilde{v}} \\ = \frac{1}{k^+ + i\nabla_{\parallel 0}} + \frac{1}{k^+ + i\nabla_{\parallel 0}} \tilde{v} \frac{1}{k^+ + i\nabla_{\parallel 0}} + \dots, \quad (16)$$

由此得

$$g = -i \int_{-\infty}^{z_0} dz'_0 e^{ik(z-z'_0)} e^{-i \int_{z'_0}^{z_0} \tilde{v}(b_0, z''_0) dz''_0}, \quad (17)$$

或

$$\langle \mathbf{r} | g | \mathbf{r}' \rangle = -i \delta^{(2)}(\mathbf{b}_0 - \mathbf{b}'_0) \theta(z_0 - z'_0) e^{ik(z_0 - z'_0)} e^{-i \int_{z'_0}^{z_0} \tilde{v} dz''_0} \quad (18)$$

以 (17) 式代入 (15) 式的第三项, 这时我们注意到 (15) 式中的传播子, 根据不同的情况

使用了沿三个不同方向(入射、出射和中间方向)的线性化,同时全部考虑了沿入射和出射两个方向的线性化近似所带来的运动学修正,表现在算符 h_i 和 h_f 上,唯一没有考虑的是沿中间方向线性化所带来的修正。这显然是一种高级效应,因此我们可以预期该式能达到相当精确的结果。

一个比(16)式更进一步的近似是不仅考虑沿中间方向的传播,而且考虑沿其反方向的传播,此时令

$$\frac{1}{k^2 + \nabla^2} \simeq \frac{1}{k^{+2} + \nabla_{\parallel 0}^2} = \frac{1}{2k} \left(\frac{1}{k^+ + i\nabla_{\parallel 0}} + \frac{1}{k^+ - i\nabla_{\parallel 0}} \right),$$

于是

$$g \equiv \frac{2k}{k^{+2} + \nabla^2 - 2k\tilde{V}} = \left(\frac{1}{k^+ + i\nabla_{\parallel 0}} + \frac{1}{k^+ - i\nabla_{\parallel 0}} \right) + \left(\frac{1}{k^+ + i\nabla_{\parallel 0}} + \frac{1}{k^+ - i\nabla_{\parallel 0}} \right) \tilde{V} \left(\frac{1}{k^+ + i\nabla_{\parallel 0}} + \frac{1}{k^+ - i\nabla_{\parallel 0}} \right) + \dots, \quad (19)$$

由此得

$$g = (1 + B) \sum_{n=0}^{\infty} (AB)^n A' + (1 + A) \sum_{n=0}^{\infty} (BA)^n B'. \quad (20)$$

其中

$$\begin{aligned} A &= -i \int_{-\infty}^{x_0} dz'_0 e^{ik(x_0 - z'_0)} e^{-i \int_{z'_0}^{x_0} dz''_0 \tilde{V}} \cdot \tilde{V}(b_0 z'_0), \\ A' &= -i \int_{-\infty}^{x_0} dz'_0 e^{ik(x - z'_0)} e^{-i \int_{z'_0}^{x_0} dz''_0 \tilde{V}}, \\ B &= -i \int_{x_0}^{\infty} dz'_0 e^{-ik(x_0 - z'_0)} e^{-i \int_{z'_0}^{x_0} dz''_0 \tilde{V}} \cdot \tilde{V}(b_0, z'_0), \\ B' &= -i \int_{x_0}^{\infty} dz'_0 e^{-ik(x - z'_0)} e^{-i \int_{z'_0}^{x_0} dz''_0 \tilde{V}}. \end{aligned} \quad (21)$$

(20)式比(16)式复杂得多,实际上仅当散射角度十分大时(例如 $>135^\circ$)才有必要考虑沿反 \mathbf{n}_0 方向的传播。(当 180° 朝后散射时,沿 \mathbf{n}_0 和反 \mathbf{n}_0 方向传播的重要性相等)。而且此时可对(20)式作截断近似。例如令

$$g \simeq A' + B'.$$

四、讨 论

回顾(15)式,其中第一项,对小角度散射来说是最主要的项,给出明显的朝前峰。但随角度的增大第一项衰减很快,第二项即 EWBA 的重要性逐渐增大。由于它的意义明确,且计算简单,仔细讨论它所能达到的精确度是十分重要的。以下以 α 散射为例,令 α 粒子间的相互作用是高斯势: $V = V_0 e^{-r^2/\beta^2}$,

$$\alpha \text{ 粒子质量 } m_\alpha = 3728.2 \text{ MeV}, \quad \text{位阱深度 } V_0 = -41.6 \text{ MeV},$$

力程 $\beta = 1\text{fm}$, 质心系动能 $T = 166.0\text{MeV}$.

计算出的微分截面如图 1 所示,其中只考虑第一项的结果由——线表示 (Eikonal 近似),同时考虑第一、二项的结果由……线表示. (EWBA) 由分波法算出的严格解由——线表示. 图表明散射角不很大时,仅需考虑第一、二项就能得到较好的结果.

随后的工作中,将应用这一方法计算 Bakamjian-Thomas 方程的大角度散射振幅,并与实验资料联系起来.

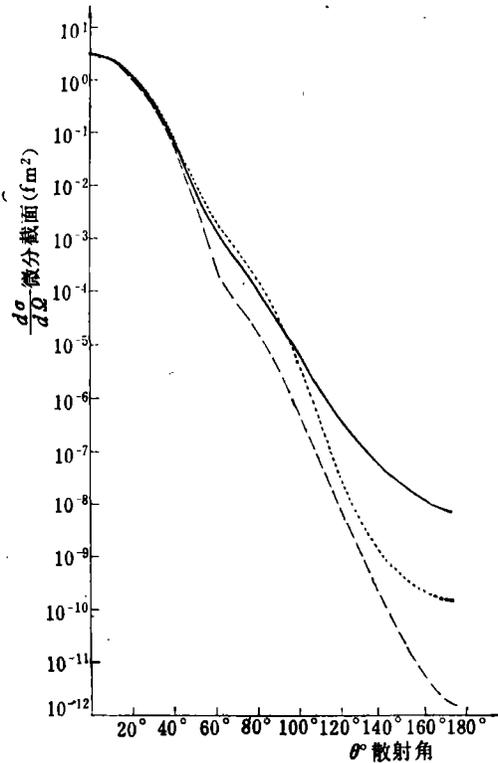


图 1

附 录 A

以下给出文中 (14) 式的证明 ((9) 式可用类似的证明), (14) 式左方

$$\langle g^* h_1 \psi_i^{qik} | h_1 \psi_i^{qik} \rangle = \langle g^* h_1 \psi_i^{qik} | g^- g h_1 \psi_i^{qik} \rangle, \tag{A1}$$

其中

$$g^- = \frac{1}{2k} \left[(k^2 + \nabla^2) - \frac{2\mu}{\hbar^2} V \right]. \tag{A2}$$

把 g^- 从刃矢 (ket) 挪到刁矢 (bra) 内, (A2) 式成为

$$\begin{aligned} \langle g^* h_1 \psi_i^{qik} | h_1 \psi_i^{qik} \rangle &= \langle h_1 \psi_i^{qik} | g | h_1 \psi_i^{qik} \rangle + \frac{1}{2k} [\langle g^* h_1 \psi_i^{qik} | \nabla^2 | h_1 \psi_i^{qik} \rangle \\ &\quad - \langle \nabla^2 g^* h_1 \psi_i^{qik} | g h_1 \psi_i^{qik} \rangle]. \end{aligned} \tag{A3}$$

若令

$$\begin{aligned} \psi_1 &= g h_1 \psi_i^{qik}, \\ \psi_2 &= g^* h_1 \psi_i^{qik}, \end{aligned}$$

则上式右方括号内等于

$$\iint d\sigma \cdot (\psi_1^* \nabla \psi_1 - (\nabla \psi_1^*) \psi_1) \quad (A4)$$

(大球表面)

由于当 $r \rightarrow \infty$ 时

$$\psi_1 = \phi - \phi_1^{*ik} \rightarrow f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} - \theta(z) e^{ikz} (e^{-i \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{v} dz'} - 1),$$

$$\psi_2 = \phi_1^{(-)} - \phi_1^{*ik} \rightarrow g(\theta\varphi) \frac{e^{-ikr}}{r} - \theta(-z) e^{-ikz} (e^{i \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{v} dz'} - 1). \quad (A5)$$

以(A5)代回(A4),利用 $(e^{-i \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{v} dz'} - 1)$ 型因子,在大球表面上仅在一个很小的区域上(即 \tilde{v} 的作用半径所覆盖的区域)不为零这一点,易于证明(A4)式为0,由此(14)式得证。

参 考 文 献

- [1] R. J. Glauber, "Lectures in Theoretical Physics" 1(1959), 315.
- [2] W. E. Frahn and B. Schurmann, *Ann. Phys.*, 84(1974), 147.
- [3] S. J. Wallace, *Ann. Phys.*, 78(1973), 190.
- [4] 姜焕清、李扬国,高能物理与核物理,2(1978),411.
- [5] M. Levy and J. Sucher *Phys. Rev.*, 186(1969), 1656.
- [6] B. Bakamjian and L. H. Thomas, *Phys. Rev.*, 92(1953), 1300.
- [7] V. G. Kadyshevsky, *Nucl. Phys.*, B6(1968), 125.
- [8] 鲍诚光、赵维勤,高能物理与核物理,2(1978),336.
- [9] R. L. Sugar and R. Blankenbecler, *Phys. Rev.*, 183(1969), 1387.

EIKONAL-BORN EXPANSION AND ITS APPLICATION IN LARGE-ANGLE SCATTERING

LU SHI-QI ZHAO WEI-QIN BAO CHENG-GUANG
(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica)

ZHU XI-QUAN

(Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

In this paper, the scattering amplitude is expanded by two eikonal wave functions which propagate along the incoming and outgoing directions respectively to replace the distorted wave functions in DWBA. Then, we obtain a method to calculate the non-relativistic large angle scattering. This method can be easily generalized to relativistically phenomenological dynamical equation.