第5卷 第4期 高能物理与核物理 Vol. 5, No. 4
1981年7月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS July, 1981

$SU(2)$ Higgs 场的玻色凝结和 Weinberg-Salam 模型中的电子质量

倪光炯 苏汝铿 陈苏卿
(复旦大学)

摘要

本文推广 Higgs 场的玻色凝结概念[1]到 $SU(2)$ Higgs φ^4 模型. 证明在 Higgs 场的自作用下，当荷电复场和中性复场的凝聚密度之和不变时，对称凝聚和不对称凝聚的真空能量相同，元激发谱也都包含三个 Goldstone 粒子和一个质量为$\sqrt{2}\,m$ 的粒子，并由此出发，通过引入无质量涡电子和中性 Higgs 场的耦合，给出了和 Weinberg-Salam 模型相符的电子质量.

一、引言

在文[1]中，我们讨论了复 Higgs 场的真空自发破缺和玻色凝结的关系. 证明了所谓 Higgs 场的真空自发破缺，实质上是具有"错误"符号的质量项的φ场在排斥性φ^4自作用下，从正常态到超流态的一种相变. 所谓 Higgs 真空，其实就是玻色凝聚态. 在 Higgs 真空本底上，我们找到了两支中性元激发谱，一支表示零质量的 Goldstone 粒子，另一支表示实质量为$\sqrt{2}\,m$的 Higgs 粒子. 但文 [1] 的讨论仅局限在只存在一种复 Higgs 场（相当于$U(1)$）的情况.

自然产生问题：对于复$SU(2)$ Higgs 场，Higgs 真空自发破缺就是超流相变的概念是否仍然正确？ 在目前认为已经比较成功地统一了弱作用和电磁作用的 Weinberg-Salam 模型中[2]，就曾引入$SU(2)$ Higgs 场

$$\Phi=\begin{pmatrix}\phi\\ \chi\end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

(1.1) 式中ϕ是荷电复标量场，χ是中性标量场. 并且令Φ场的真空平均值为

$$\langle\Phi\rangle_0=\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{v}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

在这个基础上通过左、右旋无质量的涡电子和χ场的耦合，使电子获得质量.

本文将把文 [1] 的工作推广到$SU(2)$ Higgs 场. 在第二节中我们将在二次量子化表象中写出$SU(2)$ Higgs φ^4 场的哈密顿量. 在第三节中我们用逐次正则变换法分别找

本文 1979 年 10 月 5 日收到.

出对称凝聚和不对称凝聚下的基态能量和元激发谱．在第四节中我们引入 χ 和涡电子的相互作用，使电子获得质量，并与 W-S 模型相比较．最后我们总结一下本文所得的结果．

二、$SU(2)$ Higgs 场的 φ^4 模型

$SU(2)$ Higgs 场的拉格朗日密度为

$$\mathscr{L}_H = -\partial_\mu \Phi^* \partial_\mu \Phi + m^2 \Phi^* \Phi - g^2 (\Phi^* \Phi)^2. \tag{2.1}$$

其中 $m^2 > 0$, $g^2 > 0$, 以 (1.1) 式代入后得

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_H = &-\partial_\mu \phi^* \partial_\mu \phi - \partial_\mu \chi^* \partial_\mu \chi + m^2(\phi^*\phi + \chi^*\chi) \\ &- g^2[(\phi^*\phi)^2 + (\chi^*\chi)^2 + 2\phi^*\phi\chi^*\chi]\end{aligned} \tag{2.2}$$

定义 $\pi_\phi = \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}^*$, $\pi_\chi = \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial \chi} = \dot{\chi}^*$ 等

$$\mathscr{H} \equiv \pi_\phi \dot{\phi} + \pi_{\phi^*} \dot{\phi}^* + \pi_\chi \dot{\chi} + \pi_{\chi^*} \dot{\chi}^* - \mathscr{L},$$

则 (2.2) 式对应的哈密顿量是

$$H = \int \mathscr{H} d\tau = H_C + H_B + H_{BC}. \tag{2.3}$$

其中

$$H_C = \int [(\dot{\phi}^* \dot{\phi}) + (\nabla\phi^*)(\nabla\phi) - m^2\phi^*\phi + g^2(\phi^*\phi)^2] d\tau, \tag{2.4}$$

$$H_B = \int [(\dot{\chi}^*\dot{\chi}) + \nabla\chi^*\nabla\chi - m^2\chi^*\chi + g^2(\chi^*\chi)^2] d\tau \tag{2.5}$$

分别表示荷电 ϕ 场和中性复场 χ 的哈密顿量，而

$$H_{BC} = 2g^2 \int (\phi^*\phi\chi^*\chi) d\tau, \tag{2.6}$$

表示它们之间的相互作用．

对 ϕ 和 χ 分别进行正则量子化

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} (a_{\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + b^\dagger_{-\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}), \tag{2.7}$$

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} (\rho_{\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + \nu^\dagger_{-\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}), \tag{2.8}$$

$$\pi_\phi = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\boldsymbol{k}} i\sqrt{\frac{\omega_k}{2}} (a^\dagger_{\boldsymbol{k}} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} - b_{-\boldsymbol{k}} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}),$$

$$\pi_\chi = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\boldsymbol{k}} i\sqrt{\frac{\omega_k}{2}} (\rho^\dagger_{\boldsymbol{k}} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} - \nu_{-\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}).$$

其中选 $\omega_k^2 = m^2 + k^2$, 各算符都隐含时间．注意到由于存在玻色凝结，$\boldsymbol{k} = 0$ 的占有数是个大量，引进变换

$$a_{\boldsymbol{k}} = \sqrt{N_C}\,\delta(\boldsymbol{k}) + \tilde{a}_{\boldsymbol{k}}, \quad b_{\boldsymbol{k}} = \sqrt{N_C}\,\delta(\boldsymbol{k}) + \tilde{b}_{\boldsymbol{k}}, \tag{2.9}$$

$$\rho_{\boldsymbol{k}} = \sqrt{N_B}\delta(\boldsymbol{k}) + \tilde{\rho}_{\boldsymbol{k}}, \quad \nu_{\boldsymbol{k}} = \sqrt{N_B}\delta(\boldsymbol{k}) + \tilde{\nu}_{\boldsymbol{k}}. \tag{2.10}$$

其中

$$\delta(\boldsymbol{k}) = \begin{cases} 0, & \text{当 } \boldsymbol{k} \neq 0 \\ 1. & \text{当 } \boldsymbol{k} = 0 \end{cases} \tag{2.11}$$

以(2.7)、(2.8)、(2.9)、(2.10)、(2.11)代入哈密顿量的表示式中，经过一些运算后可以证明，二次量子化表象中体系的哈密顿量为

$$\left\{\begin{aligned}
H &= H_0 + H_1 + H_2 + O\left(\frac{\sqrt{N}}{V}\right) + O\left(\frac{1}{V}\right), \\
H_0 &= \frac{4g^2}{\omega_0^2 V}(N_C + N_B)^2 - 2(N_C + N_B)\omega_0 + \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{6g^2}{\omega_0\omega_k V}(N_C + N_B), \\
H_1 &= \left[\frac{4g^2}{\omega_0 V}(N_C + N_B) - \omega_0\right]\sqrt{N_C}\,(\tilde{a}_0 + \tilde{a}_0^\dagger + \tilde{b}_0 + \tilde{b}_0^\dagger) \\
&\quad + \left[\frac{4g^2}{\omega_0 V}(N_C + N_B) - \omega_0\right]\sqrt{N_B}\,(\tilde{\rho}_0 + \tilde{\rho}_0^\dagger + \tilde{\nu}_0 + \tilde{\nu}_0^\dagger), \\
H_2 &= \sum_{\boldsymbol{k}>0}\Big\{\varepsilon_k(a_{\boldsymbol{k}}^\dagger b_{-\boldsymbol{k}}^\dagger + a_{\boldsymbol{k}} b_{-\boldsymbol{k}} + a_{-\boldsymbol{k}}^\dagger b_{\boldsymbol{k}}^\dagger + a_{-\boldsymbol{k}} b_{\boldsymbol{k}}) \\
&\quad + \left(\omega_k - \frac{m^2}{\omega_k} + 4\eta_k + 2\eta_k'\right)(a_{\boldsymbol{k}}^\dagger a_{\boldsymbol{k}} + b_{\boldsymbol{k}}^\dagger b_{\boldsymbol{k}} + a_{-\boldsymbol{k}}^\dagger a_{-\boldsymbol{k}} + b_{-\boldsymbol{k}}^\dagger b_{-\boldsymbol{k}}) \\
&\quad + 2\eta_k(a_{\boldsymbol{k}}^\dagger a_{-\boldsymbol{k}}^\dagger + a_{-\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{k}} + b_{\boldsymbol{k}}^\dagger b_{-\boldsymbol{k}}^\dagger + b_{-\boldsymbol{k}} b_{\boldsymbol{k}}) \\
&\quad + 2\eta_k(a_{\boldsymbol{k}}^\dagger b_{\boldsymbol{k}} + b_{\boldsymbol{k}}^\dagger a_{\boldsymbol{k}} + a_{-\boldsymbol{k}} b_{-\boldsymbol{k}} + b_{-\boldsymbol{k}}^\dagger a_{-\boldsymbol{k}}) \\
&\quad + \varepsilon_k'(\rho_{\boldsymbol{k}}^\dagger \nu_{-\boldsymbol{k}}^\dagger + \rho_{\boldsymbol{k}} \nu_{-\boldsymbol{k}} + \rho_{-\boldsymbol{k}}^\dagger \nu_{\boldsymbol{k}}^\dagger + \rho_{-\boldsymbol{k}} \nu_{\boldsymbol{k}}) \\
&\quad + \left(\omega_k - \frac{m^2}{\omega_k} + 4\eta_k' + 2\eta_k\right)(\rho_{\boldsymbol{k}}^\dagger \rho_{\boldsymbol{k}} + \nu_{\boldsymbol{k}}^\dagger \nu_{\boldsymbol{k}} + \rho_{-\boldsymbol{k}}^\dagger \rho_{-\boldsymbol{k}} + \nu_{-\boldsymbol{k}}^\dagger \nu_{-\boldsymbol{k}}) \\
&\quad + 2\eta_k'(\rho_{\boldsymbol{k}}^\dagger \rho_{-\boldsymbol{k}}^\dagger + \rho_{-\boldsymbol{k}} \rho_{\boldsymbol{k}} + \nu_{\boldsymbol{k}}^\dagger \nu_{-\boldsymbol{k}}^\dagger + \nu_{-\boldsymbol{k}} \nu_{\boldsymbol{k}}) \\
&\quad + 2\eta_k'(\rho_{\boldsymbol{k}}^\dagger \nu_{\boldsymbol{k}} + \nu_{\boldsymbol{k}}^\dagger \rho_{\boldsymbol{k}} + \rho_{-\boldsymbol{k}}^\dagger \nu_{-\boldsymbol{k}} + \nu_{-\boldsymbol{k}}^\dagger \rho_{-\boldsymbol{k}}) \\
&\quad + 2\sqrt{\eta_k\eta_k'}\,[a_{\boldsymbol{k}}^\dagger \rho_{\boldsymbol{k}} + a_{\boldsymbol{k}} \nu_{-\boldsymbol{k}}^\dagger + a_{-\boldsymbol{k}}^\dagger \rho_{-\boldsymbol{k}} + a_{-\boldsymbol{k}}^\dagger \nu_{-\boldsymbol{k}}^\dagger + b_{-\boldsymbol{k}} \rho_{\boldsymbol{k}} + b_{-\boldsymbol{k}} \nu_{-\boldsymbol{k}}^\dagger \\
&\quad + b_{\boldsymbol{k}} \rho_{-\boldsymbol{k}} + b_{\boldsymbol{k}} \nu_{\boldsymbol{k}}^\dagger + a_{\boldsymbol{k}} \rho_{\boldsymbol{k}}^\dagger + a_{\boldsymbol{k}} \nu_{-\boldsymbol{k}} + a_{-\boldsymbol{k}} \rho_{-\boldsymbol{k}}^\dagger + a_{-\boldsymbol{k}} \nu_{\boldsymbol{k}} + b_{-\boldsymbol{k}}^\dagger \rho_{\boldsymbol{k}}^\dagger \\
&\quad + b_{-\boldsymbol{k}}^\dagger \nu_{-\boldsymbol{k}} + b_{\boldsymbol{k}}^\dagger \rho_{-\boldsymbol{k}}^\dagger + b_{\boldsymbol{k}}^\dagger \nu_{\boldsymbol{k}} + a_{\boldsymbol{k}}^\dagger \rho_{-\boldsymbol{k}}^\dagger + a_{\boldsymbol{k}}^\dagger \nu_{\boldsymbol{k}} + a_{-\boldsymbol{k}}^\dagger \rho_{\boldsymbol{k}}^\dagger + a_{-\boldsymbol{k}}^\dagger \nu_{-\boldsymbol{k}} \\
&\quad + b_{-\boldsymbol{k}} \rho_{-\boldsymbol{k}}^\dagger + b_{-\boldsymbol{k}} \nu_{\boldsymbol{k}} + b_{\boldsymbol{k}} \rho_{\boldsymbol{k}}^\dagger + b_{-\boldsymbol{k}} \nu_{-\boldsymbol{k}} + a_{\boldsymbol{k}} \rho_{-\boldsymbol{k}} + a_{\boldsymbol{k}} \nu_{\boldsymbol{k}}^\dagger + a_{-\boldsymbol{k}} \nu_{-\boldsymbol{k}}^\dagger \\
&\quad + a_{-\boldsymbol{k}} \rho_{\boldsymbol{k}} + b_{-\boldsymbol{k}}^\dagger \rho_{-\boldsymbol{k}} + b_{-\boldsymbol{k}}^\dagger \nu_{\boldsymbol{k}}^\dagger + b_{\boldsymbol{k}}^\dagger \rho_{\boldsymbol{k}} + b_{\boldsymbol{k}}^\dagger \nu_{-\boldsymbol{k}}^\dagger]\Big\}.
\end{aligned}\right. \tag{2.12}$$

(2.12)式中

$$\left\{\begin{aligned}
&\varepsilon_k = 4\eta_k + 2\eta_k' - \frac{m^2}{\omega_k}, \quad \varepsilon_k' = 4\eta_k' + 2\eta_k - \frac{m^2}{\omega_k} \\
&\eta_k = \frac{g^2 N_C}{\omega_0\omega_k V}, \quad \eta_k' = \frac{g^2 N_B}{\omega_0\omega_k V}.
\end{aligned}\right. \tag{2.13}$$

在 Bogoliubov[3] 近似下，$O\left(\frac{\sqrt{N}}{V}\right)$，$O\left(\frac{1}{V}\right)$ 项均可略去. 下面我们通过基态能量的极小值条件定出凝聚密度，并通过逐次正则变换法[1]使 H_2 对角化，求出体系的基态能量和元

激发谱.

三、元激发谱和基态能量

仿照文[1]的方法,引入玻色算符的正则变换

$$\begin{cases} a_k = u_k\alpha_k + v_k\alpha^\dagger_{-k}, \\ b_k = u_k\beta_k + v_k\beta^\dagger_{-k}, \end{cases} \quad \begin{cases} \rho_k = s_k\gamma_k + w_k\gamma^\dagger_{-k}, \\ \nu_k = s_k\delta_k + w_k\delta^\dagger_{-k}. \end{cases} \tag{3.1}$$

其中 u_k, v_k, s_k, w_k 是实函数,满足条件

$$u_k^2 - v_k^2 = 1, \quad s_k^2 - w_k^2 = 1. \tag{3.2}$$

以(3.1)式代入(2.12)式,按正规乘积的次序整理后,可得

$$H = U + H', \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} U = H_0 + \sum_{k>0}\Bigg[&\left(4\eta_k + 2\eta_k' + \omega_k - \frac{m^2}{\omega_k}\right)4v_k^2 + 2\eta_k 4u_kv_k \\ &+ \left(4\eta_k' + 2\eta_k + \omega_k - \frac{m^2}{\omega_k}\right)4w_k^2 + 2\eta_k'\cdot 4s_kw_k\Bigg], \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} H' = \sum_{k>0}\Bigg\{&\left[\left(\omega_k - \frac{m^2}{\omega_k} + 4\eta_k + 2\eta_k'\right)(u_k^2 + v_k^2) + 2\eta_k(2u_kv_k)\right] \\ &\cdot(\alpha_k^\dagger\alpha_k + \beta_k^\dagger\beta_k + \alpha^\dagger_{-k}\alpha_{-k} + \beta^\dagger_{-k}\beta_{-k}) \\ &+ \left[\left(\omega_k - \frac{m^2}{\omega_k} + 4\eta_k + 2\eta_k'\right)2u_kv_k + 2\eta_k(u_k^2 + v_k^2)\right] \\ &\cdot(\alpha_k^\dagger\alpha^\dagger_{-k} + \alpha_k\alpha_{-k} + \beta_k^\dagger\beta^\dagger_{-k} + \beta_{-k}\beta_k) \\ &+ [\varepsilon_k(2u_kv_k) + 2\eta_k(u_k^2 + v_k^2)] \\ &\cdot(\alpha_k^\dagger\beta_k + \alpha^\dagger_{-k}\beta_{-k} + \beta_k^\dagger\alpha_k + \beta^\dagger_{-k}\alpha_{-k}) \\ &+ [\varepsilon_k(u_k^2 + v_k^2) + 2\eta_k(2u_kv_k)] \\ &\cdot(\alpha_k^\dagger\beta^\dagger_{-k} + \alpha^\dagger_{-k}\beta_k^\dagger + \alpha_k\beta_{-k} + \alpha_{-k}\beta_k) \\ &+ \left[\left(\omega_k - \frac{m^2}{\omega_k} + 4\eta_k' + 2\eta_k\right)(s_k^2 + w_k^2) + 2\eta_k'(2s_kw_k)\right] \\ &\cdot(\gamma_k^\dagger\gamma_k + \gamma^\dagger_{-k}\gamma_k + \delta_k^\dagger\delta_k + \delta^\dagger_{-k}\delta_{-k}) \\ &+ \left[\left(\omega_k - \frac{m^2}{\omega_k} + 4\eta_k' + 2\eta_k\right)2s_kw_k + 2\eta_k'(s_k^2 + w_k^2)\right] \\ &\cdot(\gamma_k^\dagger\gamma^\dagger_{-k} + \gamma_{-k}\gamma_k + \delta_k^\dagger\delta^\dagger_{-k} + \delta_{-k}\delta_{-k}) \\ &+ [\varepsilon_k'(2s_kw_k) + 2\eta_k'(s_k^2 + w_k^2)] \\ &\cdot(\gamma_k^\dagger\delta_k + \gamma^\dagger_{-k}\delta_{-k} + \delta_k^\dagger\gamma_k + \delta^\dagger_{-k}\gamma_{-k}) \\ &+ [\varepsilon_k'(s_k^2 + w_k^2) + 2\eta_k'(2s_kw_k)] \\ &\cdot(\gamma_k^\dagger\delta^\dagger_{-k} + \gamma^\dagger_{-k}\delta_k^\dagger + \gamma_k\delta_{-k} + \gamma_{-k}\delta_k) \\ &+ 2\sqrt{\eta_k\eta_k'}(u_ks_k + v_kw_k + u_kw_k + v_ks_k) \\ &\cdot[\alpha_k^\dagger\gamma_k + \alpha^\dagger_{-k}\gamma_{-k} + \alpha_k\gamma_k^\dagger + \alpha_{-k}\gamma^\dagger_{-k} + \alpha_k^\dagger\gamma^\dagger_{-k} + \alpha^\dagger_{-k}\gamma_k^\dagger \\ &+ \alpha_k\gamma_{-k} + \alpha_{-k}\gamma_k + \beta_k^\dagger\delta_k + \beta^\dagger_{-k}\delta_{-k} + \beta_{-k}\delta^\dagger_{-k} + \beta_k^\dagger\delta^\dagger_{-k} + \beta_k\delta_k^\dagger \end{aligned}$$

$$+ \beta^{\dagger}_{-k}\delta^{\dagger}_{k} + \beta_{k}\delta_{-k} + \beta_{-k}\delta_{k} + \alpha^{\dagger}_{k}\delta_{-k} + \alpha^{\dagger}_{-k}\delta_{k} + \alpha_{k}\delta_{-k} + \alpha_{-k}\delta_{k}$$
$$+ \alpha^{\dagger}_{k}\delta_{k} + \alpha^{\dagger}_{-k}\delta_{-k} + \delta^{\dagger}_{k}\alpha_{k} + \delta_{-k}\alpha_{-k} + \beta^{\dagger}_{k}\gamma^{\dagger}_{-k} + \beta^{\dagger}_{-k}\gamma^{\dagger}_{k} + \beta_{k}\gamma_{-k}$$
$$+ \beta_{-k}\gamma_{k} + \beta^{\dagger}_{k}\gamma_{k} + \beta^{\dagger}_{k}\gamma_{k} + \gamma^{\dagger}_{k}\beta_{k} + \gamma^{\dagger}_{-k}\beta_{-k}]\Big\}, \tag{3.5}$$

哈密顿量中只有一个算符项的 H_1 不再写出．下面将证明 H_1 的贡献为零．定义算符

$$\xi_{p} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_{k} + \beta_{p}), \qquad \zeta_{p} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_{p} - \beta_{p}), \tag{3.6}$$

$$y_{p} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_{p} + \delta_{p}), \qquad z_{p} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_{p} - \delta_{p}). \tag{3.7}$$

计算对易关系后，不难证明

$$[\xi_{p}, H] = F_p\xi_{p} + \Delta_p\xi^{\dagger}_{-p} + J_p(y_{p} + y^{\dagger}_{-p}), \tag{3.8}$$

$$[\zeta_{p}, H] = F'_p\zeta_{p} + \Delta'_p\zeta^{\dagger}_{-p}, \tag{3.9}$$

$$[y_{p}, H] = G_py_{p} + \Omega_py^{\dagger}_{-p} + J_p(\xi_{p} + \xi^{\dagger}_{-p}), \tag{3.10}$$

$$[z_{p}, H] = G'_pz_{p} + \Omega'_pz^{\dagger}_{-p}. \tag{3.11}$$

$$\begin{cases} F_p = D_p(u_p^2 + v_p^2) + C_p(2u_pv_p), \\ \Delta_p = D_p(2u_pv_p) + C_p(u_p^2 + v_p^2), \end{cases} \tag{3.12}$$

$$D_p = \omega_p - \frac{m^2}{\omega_p} + 6\eta_p + 2\eta'_p, \qquad C_p = \varepsilon_p + 2\eta_p = \frac{-m^2}{\omega_p} + 6\eta_p + 2\eta'_p, \tag{3.13}$$

$$\begin{cases} F'_p = D'_p(u_p^2 + v_p^2) + C'_p2u_pv_p, \\ \Delta'_p = D'_p2u_pv_p + C'_p(u_p^2 + v_p^2), \end{cases} \tag{3.14}$$

$$D'_p = \omega_p - \frac{m^2}{\omega_p} + 2\eta_p + 2\eta'_p, \qquad C'_p = 2\eta_p - \varepsilon_p = \frac{m^2}{\omega_p} - 2\eta'_p - 2\eta_p, \tag{3.15}$$

$$\begin{cases} G_p = \widetilde{D}_p(s_p^2 + w_p^2) + \widetilde{C}_p2s_pw_p, \\ \Omega_p = \widetilde{D}_p2s_pw_p + \widetilde{C}_p(s_p^2 + w_p^2), \end{cases} \tag{3.16}$$

$$\widetilde{D}_p = \omega_p - \frac{m^2}{\omega_p} + 6\eta'_p + 2\eta_p, \qquad \widetilde{C}_p = \varepsilon'_p + 2\eta'_p = -\frac{m^2}{\omega_p} + 6\eta'_p + 2\eta_p, \tag{3.17}$$

$$\begin{cases} G'_p = \widetilde{D}'_p(s_p^2 + w_p^2) + \widetilde{C}'_p2s_pw_p, \\ \Omega'_p = \widetilde{D}'_p2s_pw_p + \widetilde{C}'_p(s_p^2 + w_p^2), \end{cases} \tag{3.18}$$

$$\widetilde{D}'_p = D'_p, \qquad \widetilde{C}_p = C'_p, \tag{3.19}$$

$$J_p = 4\sqrt{\eta_p\eta'_p}(u_p + v_p)(s_p + w_p). \tag{3.20}$$

利用基态能量的极小值条件 $\frac{\delta\langle H\rangle}{\delta N} = 0$ 来决定凝聚密度，$\langle H\rangle$ 表示 H 对准粒子真空的平均值．不难算出，决定凝聚密度的条件为

$$\frac{N}{V} = \frac{N_C + N_B}{V} = \frac{\omega_0^3}{4g^2}, \tag{3.21}$$

这和令 $H_1 = 0$ 的结果一致，所以在整个讨论中 H_1 项可以不必考虑．由 (3.21) 可见 $N = N_C + N_B$ 是一个整体，N_B，N_C 二者之间此长彼消，只有通过引入 Higgs 场和其它场的相互作用，才有可能把它们区别开来．

为求元激发谱，可以分几种情况进行讨论：

1. 不对称凝聚 $N_C=0$ 的情况 显然,这相应于 Weinberg-Salam 模型中引入的(1.2)式的情况,荷电 Higgs 场没有凝聚,不发生真空破缺,处于正常态,中性 Higgs 场发生凝聚,产生真空破缺,处于超流态. 此时有

$$\eta_p=0,\quad J_p=0,\quad D'_p=D_p=\omega_p-\frac{m^2}{\omega_p}+2\eta'_p,$$
$$C'_p=-C_p=\frac{m^2}{\omega_p}-2\eta'_p. \tag{3.22}$$

由 (3.8)—(3.11) 可见,这时四个算符 ξ_p, ζ_p, g_p, z_p 无耦合,(u_p, v_p) 和 (s_p, ω_p) 应视为相互独立的变数. 无妨在 (3.8) 式中取

$$\Delta_p=D_p2u_pv_p+C_p(u_p^2+v_p^2)=0. \tag{3.23}$$

计及 $u_p^2-v_p^2=1$ 决定 u_p, v_p, 得

$$\begin{cases} u_p^2=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{D_p}{\sqrt{D_p^2-C_p^2}}\right)=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{2p^2+m^2}{2p\sqrt{m^2+p^2}}\right), \\ v_p^2=\dfrac{1}{2}\left(-1+\dfrac{D_p}{\sqrt{D_p^2-C_p^2}}\right)=\dfrac{1}{2}\left(-1+\dfrac{2p^2+m^2}{2p\sqrt{m^2+p^2}}\right). \end{cases} \tag{3.24}$$

上式的最后一步已将 C_p, D_p 及由 (2.13)、(3.21) 定出的 $\eta'_p=\dfrac{\omega_0^2}{4\omega_p}$ 代入. 于是,由(3.8)式有

$$[\xi_p, H]=F_p\xi_p,$$

这表示 $\xi_p^\dagger$ 是一种独立的元激发,它的能量是

$$E_\xi=F_p=\sqrt{D_p^2-C_p^2}=p. \tag{3.25}$$

这是一个质量为零的 Goldstone 粒子.

由 (3.9) 看出,$\zeta_p^\dagger$ 不是元激发. 为此,再作一次正则变换,令

$$Q_p=\lambda_p\zeta_p+\mu_p\zeta_{-p}^\dagger,\quad \lambda_p^2-\mu_p^2=1. \tag{3.26}$$

要求由

$$[Q_p, H]=E_QQ_p \tag{3.27}$$

的条件来确定参数 λ_p, μ_p 以及元激发 $Q_p^\dagger$ 的能量 E_Q. 以 (3.9)、(3.26) 以及

$$[\zeta_{-p}^\dagger, H]=-F'_p\zeta_{-p}^\dagger-\Delta'_p\zeta_p$$

代入 (3.27) 式,比较 ζ_p, $\zeta_{-p}^\dagger$ 的系数后得联立代数方程组

$$(F'_p-E_Q)\lambda_p-\Delta'_p\mu_p=0,\quad \Delta'_p\lambda_p-(F'_p+E_Q)\mu_p=0. \tag{3.28}$$

从而解得

$$E_Q=\sqrt{F'^2_p-\Delta'^2_p}=\sqrt{D'^2_p-C'^2_p}=\sqrt{D_p^2-C_p^2}=p, \tag{3.29}$$

$$\mu_p^2=\frac{F'_p-E_Q}{2E_Q}. \tag{3.30}$$

(3.29) 表示元激发 $Q_p^\dagger$ 也是 Goldstone 粒子.

在文 [1] 中我们曾证明,也可采用另一种方案,即在 (3.9) 式中,先令 $\Delta'_p=0$ 以决定 u_p, v_p, 再用新的正则变换以使 (3.8) 式对角化. 但这时不产生新的元激发谱. 可以证

明,这些讨论对现在的情况仍然成立. 为行文简洁起见,这些情况以后不再写入.

同法可以处理 (3.10) 和 (3.11) 式. 令

$$Q'_p = 0, \tag{3.31}$$

得

$$\begin{cases} s_p^2 = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{D'_p}{\sqrt{D'^2_p - C'^2_p}}\right) = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{2p^2 + m^2}{2p\sqrt{m^2 + p^2}}\right), \\ w_p^2 = \dfrac{1}{2}\left(-1 + \dfrac{D'_p}{\sqrt{D'^2_p - C'^2_p}}\right) = \dfrac{1}{2}\left(-1 + \dfrac{2p^2 + m^2}{2p\sqrt{m^2 + p^2}}\right). \end{cases} \tag{3.32}$$

元激发 $z_p^\dagger$ 的能量为

$$E_z = G'_p = \sqrt{D'^2_p - C'^2_p} = p, \tag{3.33}$$

再引入

$$\gamma_p = \lambda'_p y_p + \mu'_p y^\dagger_{-p}, \quad \lambda'^2_p - \mu'^2_p = 1, \tag{3.34}$$

可算得元激发 $y_p^\dagger$ 的能量为

$$E_\gamma = \sqrt{\widetilde{D}_p^2 - \widetilde{C}_p^2} = \sqrt{p^2 + 2m^2}, \tag{3.35}$$

而

$$\mu'^2_p = \frac{G_p - E_\gamma}{2E_\gamma}. \tag{3.36}$$

至此, 我们已找到了体系的四种单粒子元激发 $\xi_p^\dagger$, $Q_p^\dagger$, $z_p^\dagger$, $y_p^\dagger$, 前三个是 Goldstone 粒子, 最后一个是质量为 $\sqrt{2}\,m$ 的准粒子. 并可把对角化了的哈密顿量 H 写为

$$\begin{aligned} H = U + H' = U + E_0 + \sum_{p>0} \{ & E_\xi(\xi_p^\dagger \xi_p + \xi_{-p}^\dagger \xi_{-p}) \\ & + E_Q(Q_p^\dagger Q_p + Q_{-p}^\dagger Q_{-p}) + E_z(z_p^\dagger z_p + z_{-p}^\dagger z_{-p}) \\ & + E_y(y_p^\dagger y_p + y_{-p}^\dagger y_{-p})\}, \end{aligned} \tag{3.37}$$

其中常数项 E_0 为

$$E_0 = -2\sum_{p>0}\{E_Q \mu_p^2 + E_y \mu'^2_p\} = -\sum_{p>0}\{F'_p - E_Q + G_p - E_y\}, \tag{3.38}$$

$(U + E_0)$ 表示准粒子真空中的基态能量. 注意到 (3.38) 式中 F'_p 和 G_p 分别是 v_p 和 w_p 的函数, E_Q 和 E_Y 则与 v_p, w_p 无关,而准粒子真空作为能量的最低态,必然满足

$$\frac{\delta(U + E_0)}{\delta v_p} = 0 \tag{3.39}$$

以及

$$\frac{\delta(U + E_0)}{\delta w_p} = 0. \tag{3.40}$$

以 (3.2)、(3.4)、(3.38)、(3.14)、(3.18) 等诸式代入, 经过一些运算后可以证明, (3.39) 式正是 (3.23) 式; (3.40) 式正是 (3.31) 式. 这表明我们的理论是自洽的.

2. 不对称凝聚 $N_B = 0$ 的情况 这时相当于中性 Higgs 场不破缺、不凝聚,处在正常态,而荷电 Higgs 场有自发破缺,处于超流的玻色凝结态. 此时有

$$\begin{cases}\eta'_p = 0, \quad J_p = 0, \\ D'_p = \widetilde{D}_p = \omega_p - \dfrac{m^2}{\omega_p} + 2\eta_p, \quad C'_p = -\widetilde{C}_p = \dfrac{m^2}{\omega_p} - 2\eta_p.\end{cases} \tag{3.41}$$

显然与情况 1 完全对称. 不难同样证明，这时也有四支元激发谱，其中三支是 Goldstone 粒子谱，一支是实质量 $\sqrt{2}\,m$ 谱.

3. 对称凝聚 $N_B = N_C$ 的情况 这时有

$$\eta_p = \eta'_p = \frac{\omega_0^2}{8\omega_p}, \tag{3.42}$$

同时可取 $u_p = s_p$, $v_p = w_p$, 于是得

$$\begin{cases}J_p = 4\eta_p(u_p^2 + v_p^2 + 2u_pv_p), \quad D_p = \widetilde{D}_p = \omega_p - \dfrac{m^2}{\omega_p} + 8\eta_p; \\ C_p = \widetilde{C}_p = -\dfrac{m^2}{\omega_p} + 8\eta_p, \quad D'_p = 4\eta_p + \omega_p - \dfrac{m^2}{\omega_p}; \\ C'_p = \dfrac{m^2}{\omega_p} - 4\eta_p, \ F_p = G_p; \quad \Delta_p = \Omega_p, \ F'_p = G'_p, \ \Delta'_p = \Omega'_p.\end{cases} \tag{3.43}$$

我们可以将(3.8)和(3.10)进一步组合，定义

$$A_p = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_p + y_p), \quad B_p = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_p - y_p), \tag{3.44}$$

于是有

$$\begin{aligned}[A_p, H] &= (F_p + J_p)A_p + (\Delta_p + J_p)A^\dagger_{-p} \\ [B_p, H] &= (F_p - J_p)B_p + (\Delta_p - J_p)B^\dagger_{-p}.\end{aligned} \tag{3.45}$$

不妨先令

$$\begin{aligned}\Delta_p + J_p = \left(\omega_p - \frac{m^2}{\omega_p} + 12\eta_p\right)(2u_pv_p) \\ + \left(-\frac{m^2}{\omega_p} + 12\eta_p\right)(u_p^2 + v_p^2) = 0,\end{aligned} \tag{3.46}$$

以决定 u_p, v_p, 可得

$$\begin{cases}u_p^2 = s_p^2 = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{2p^2 + 3m^2}{2\sqrt{m^2 + p^2}\sqrt{p^2 + 2m^2}}\right), \\ v_p^2 = w_p^2 = \dfrac{1}{2}\left(-1 + \dfrac{2p^2 + 3m^2}{2\sqrt{m^2 + p^2}\sqrt{p^2 + 2m^2}}\right).\end{cases} \tag{3.47}$$

元激发 $A_p^\dagger$ 的能量为

$$E_A = F_p + J_p = \sqrt{\left(\omega_p - \frac{m^2}{\omega_p} + 12\eta_p\right)^2 - \left(-\frac{m^2}{\omega_p} + 12\eta_p\right)^2} = \sqrt{p^2 + 2m^2}. \tag{3.48}$$

但这时 $\zeta_p^\dagger$, $z_p^\dagger$, $B_p^\dagger$ 都不是元激发，为此，再进一步作正则变换

$$\begin{cases}X_p = \lambda'_p\zeta_p + \mu'_p\zeta^\dagger_{-p}, \\ Z_p = \lambda'_p z_p + \mu'_p z^\dagger_{-p}, \\ \mathscr{B}_p = \tilde{\lambda}_p B_p + \tilde{\mu}_p B^\dagger_{-p},\end{cases} \quad \begin{aligned}&\lambda'^2_p - \mu'^2_p = 1 \\ & \\ &\tilde{\lambda}_p^2 - \tilde{\mu}_p^2 = 1\end{aligned} \tag{3.49}$$

由 $X_p^\dagger$，$\mathscr{B}_p^\dagger$，$Z_p^\dagger$ 都是元激发的条件定 λ_p'，μ_p' 及 $\tilde{\lambda}_p$，$\tilde{\mu}_p$，可算得元激发 $X_p^\dagger$，$Z_p^\dagger$ 的能量为

$$E_X = E_Z = \sqrt{F_p'^2 - \Delta_p'^2} = p \tag{3.50}$$

及

$$\mu_p'^2 = \frac{F_p' - E_Z}{2E_Z}. \tag{3.51}$$

元激发 $\mathscr{B}_p^\dagger$ 的能量为

$$E_{\mathscr{B}} = \sqrt{(F_p - J_p)^2 - (\Delta_p - J_p)^2} = p, \tag{3.52}$$

$$\tilde{\mu}_p^2 = \frac{F_p - J_p - E_{\mathscr{B}}}{2E_{\mathscr{B}}}. \tag{3.53}$$

于是证明了在对称凝聚条件下，单粒子激发仍然是四支，其中三个是 Goldstone 粒子 ($X_p^\dagger$，$Z_p^\dagger$，$\mathscr{B}_p^\dagger$)，一个是质量为 $\sqrt{2}\,m$ 的粒子 ($A_p^\dagger$)．与不对称凝聚的元激发谱相同，但元激发的结构是彼此不同的．

同时，哈密顿量可对角化为

$$\begin{aligned} H = U + E_0' + \sum_{p>0} \{ & E_A(A_p^\dagger A_p + A_{-p}^\dagger A_{-p}) + E_X(X_p^\dagger X_p + X_{-p}^\dagger X_{-p}) \\ & + E_Z(Z_p^\dagger Z_p + Z_{-p}^\dagger Z_{-p}) + E_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}_p^\dagger \mathscr{B}_p + \mathscr{B}_{-p}^\dagger \mathscr{B}_{-p})\}, \end{aligned} \tag{3.54}$$

其中

$$\begin{aligned} E_0' &= -2\sum_{p>0}\{E_X\mu_p'^2 + E_Z\mu_p'^2\} - \sum_{p>0} E_B\tilde{\mu}_p^2 \\ &= -\sum_{p>0}[2F_p' + F_p - J_p - 3p] \\ &= -\sum_{p>0}\left\{\left[12\eta_p + 3\left(\omega_p - \frac{m^2}{\omega_p}\right)\right](u_p^2 + v_p^2)\right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{m^2}{\omega_p} - 4\eta_p\right) 2u_p v_p - 3p\right\}. \end{aligned} \tag{3.55}$$

同样可以证明，极值条件

$$\frac{\delta(U + E_0')}{\delta v_p} = 0 \tag{3.56}$$

等价于 (3.46) 式．

进一步，为在对称凝聚和非对称凝聚中作出选择，应该比较二者的基态能量．为此，需分别计算 E_0 和 E_0'．通过一些运算后，可以证明

$$(U + E_0')_{\eta_p = \eta_p' = \frac{\omega_0^2}{8\omega_p}} = (U + E_0)_{\substack{\eta_p = 0, \\ \eta_p' = \frac{\omega_0^2}{4\omega_p}}} \tag{3.57}$$

对称凝聚和不聚对称凝的基态能量相等．所以对于 $SU(2)$ 对称的 Higgs φ^4 模型，既可以发生对称凝聚，也可以发生不对称凝聚．

四、Weinberg-Salam 模型中的电子质量

现在让我们在纯 $SU(2)$ Higgs 场的拉格朗日密度 $\mathscr{L}_H$ 外，再加上无质量电子(涡电子)的拉格朗日密度 $\mathscr{L}_H$ 以及涡电子和 Higgs 场的相互作用 $\mathscr{L}_{\text{int}}$

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}_H+\mathscr{L}_F+\mathscr{L}_{\text{int}},\quad L_F=-\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\mu\psi,\quad \mathscr{L}_{\text{int}}=-G[\bar{\psi}_R\psi_L\chi^\dagger+\bar{\psi}_L\psi_R\chi]. \tag{4.1}$$

将涡电子算符 ψ 正则量子化

$$\psi(x)=\frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{p}}\sum_{r=1,2}\{c_r(\boldsymbol{p})u^r(\boldsymbol{p})e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}+d_r^\dagger(\boldsymbol{p})v^r(p)e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\}. \tag{4.2}$$

(4.2)式中 $c_1(\boldsymbol{p})$(或 $c_2(\boldsymbol{p})$)表示右旋(或左旋)电子 e^- 的湮灭算符，$d_1^\dagger(\boldsymbol{p})$(或 $d_2^\dagger(\boldsymbol{p})$)表示左旋(或右旋)正电子 e^+ 的产生算符. 它们都隐含时间. 于是，体系的哈密顿量可写为

$$H=H_B+H_C+H_{BC}+H_F+H_{FB}, \tag{4.3}$$

$$H_F=\sum_\alpha \varepsilon_\alpha(c_\alpha^\dagger c_\alpha+c_{\bar{\alpha}}^\dagger c_{\bar{\alpha}}). \tag{4.4}$$

在对偶近似下

$$\begin{aligned}H_{FB}=-G\sum_{\boldsymbol{p}}\Big\{&[c_R^\dagger(\boldsymbol{p})d_R^\dagger(+\boldsymbol{p})+d_L(-\boldsymbol{p})c_L(\boldsymbol{p})]\frac{1}{\sqrt{2\omega_0V}}(\rho_0^\dagger+\nu_0)\\&+[c_L^\dagger(\boldsymbol{p})d_L^\dagger(-\boldsymbol{p})+d_R(-\boldsymbol{p})c_R(\boldsymbol{p})]\frac{1}{\sqrt{2\omega_0V}}(\rho_0+\nu_0^\dagger)\Big\}.\end{aligned} \tag{4.5}$$

(4.4)式中 $\varepsilon_\alpha=C_p$，而 $C_\alpha=C_{\underset{(L)}{R}}(\boldsymbol{p})$ 与 $c_{\bar{\alpha}}=d_{\underset{(L)}{R}}(\boldsymbol{p})$ 配对；在(4.5)式中考虑到中性 Higgs 场的玻色凝结，我们只保留了最主要的贡献(零动量算符).

为了寻找新真空态，设

$$|0\rangle=f(c)g(\rho,\nu)|0\rangle=|f\rangle|g\rangle, \tag{4.6}$$

由总能量 $E_0=\langle 0|H_F+H_B+H_{FB})|0\rangle$ 为极小以决定算符函数 $f(c)$ 和 $g(\rho,\nu)$ 的形式.

由于

$$\rho_0=N_B+\tilde{\rho}_0,\quad \nu_0=N_B+\tilde{\nu}_0,\quad \tilde{\rho}_0|0\rangle=0,\quad \tilde{\nu}_0|0\rangle=0. \tag{4.7}$$

按照第一节的结果，可算出

$$\begin{aligned}E_0''=\langle 0|H_B|0\rangle=&\frac{4g^2}{\omega_0^2V}N_B^2-2\omega_0N_B+\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{g}{\omega_0\omega_kV}6N_B\\&+\sum_{\boldsymbol{k}>0}{}'\Big[\Big(\omega_k-\frac{m^2}{\omega_k}+2\frac{g^2N_B}{\omega_0\omega_kV}\Big)4v_k^2+\Big(\omega_k-\frac{m^2}{\omega_k}+\frac{4g^2N_B}{\omega_0\omega_kV}\Big)4w_k^2\\&+\frac{2g^2N_B}{\omega_0\omega_kV}4s_kw_k\Big],\end{aligned} \tag{4.8}$$

$$|f\rangle=\prod_\alpha(U_\alpha+V_\alpha c_\alpha^\dagger c_{\bar{\alpha}}^\dagger)|0\rangle,\quad U_\alpha^2+V_\alpha^2=1, \tag{4.9}$$

$$\langle f|c_\alpha^\dagger c_\alpha\cdot|f\rangle=\langle f|c_{\bar{\alpha}}^\dagger c_{\bar{\alpha}}|f\rangle=V_\alpha^2,\quad \langle f|c_\alpha^\dagger c_{\bar{\alpha}}^\dagger|f\rangle=\langle f|c_{\bar{\alpha}}c_\alpha|f\rangle=U_\alpha V_\alpha,$$

$$E_0=\sum_a 2\varepsilon_a V_a^2-4G\sqrt{\frac{N_B}{2\omega_0 V}}\sum_a U_a V_a+E_0''. \tag{4.10}$$

由 E_0 对 $\langle f|$ 变分得

$$\widetilde{H}_F|f\rangle=E_F|f\rangle, \tag{4.11}$$

$$\widetilde{H}_F=\sum_a \varepsilon_a(c_a^\dagger c_a+c_{\bar a}^\dagger c_{\bar a})-2G\sqrt{\frac{N_B}{2\omega_0 V}}\sum_a\cdot(c_a^\dagger c_{\bar a}^\dagger+c_{\bar a}c_a), \tag{4.12}$$

对 $\langle g|$ 变分得

$$\widetilde{H}_B|g\rangle=E_B|g\rangle, \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{H}_B=&\left[\left(\frac{4g^2}{\omega_0^2 V}N_B-\omega_0\right)\sqrt{N_B}-\frac{G}{\sqrt{2V\omega_0}}\sum_a U_aV_a\right]\left[(\tilde\rho_0^\dagger+\tilde\rho_0+\tilde\nu_0+\tilde\nu_0^\dagger)\right.\\&+\left(-\omega_0+\frac{4g^2N_B}{\omega_0^2V}\right)(\tilde\rho_0^\dagger\tilde\nu_0^\dagger+\tilde\rho_0\tilde\nu_0)+\frac{g^2N_B}{\omega_0^2V}(4\tilde\rho_0^\dagger\rho_0+4\tilde\nu_0^\dagger\nu_0+\tilde\rho_0^\dagger\tilde\rho_0^\dagger\\&\left.+\tilde\rho_0\tilde\rho_0+\tilde\nu_0^\dagger\tilde\nu_0^\dagger+\tilde\nu_0\tilde\nu_0+2\tilde\rho_0^\dagger\tilde\nu_0+2\tilde\nu_0^\dagger\tilde\rho_0)\right]-\frac{G}{\sqrt{2V\omega_0}}\sum_a U_aV_a 4\sqrt{N_B}.\end{aligned} \tag{4.14}$$

由 $\dfrac{\delta E_0}{\delta N_B}=0$ 决定 N_B，得

$$\frac{4g^2}{\omega_0^2 V}N_B-2\omega_0-\frac{2G}{\sqrt{2\omega_0 V}}\frac{1}{\sqrt{N_B}}\sum_a U_aV_a=0 \tag{4.15}$$

显然 (4.15) 式与在 $\widetilde{H}_B$ 中含一个算符项前面的系数为零得出的结果一致，这正是所预期的.

如果略去第三项，就得到

$$\frac{N_B}{V}=\frac{\omega_0^3}{4g}. \tag{4.16}$$

(4.16) 与 (3.21) 式一致. 这表示在所讨论的近似程度下，涡电子的存在不影响中性玻色场的凝聚密度和元激发谱.

但是对费米场，由 $\dfrac{\delta E_0}{\delta V_a}=0$ 得

$$2\varepsilon_a U_a V_a-\frac{G}{\sqrt{2\omega_0 V}}2\sqrt{N_B}(U_a^2+V_a^2)=0, \tag{4.17}$$

这其实就是涡电子的能隙方程. 由此不难得出，涡电子获得的质量为

$$m_e=2G\sqrt{\frac{N_B}{2\omega_0 V}}=G\frac{v}{\sqrt{2}}. \tag{4.18}$$

(4.18) 与 W-S 模型的结果一致[4].

五、结　论

1. 在本文中，我们推广 Higgs 场玻色凝结的概念到 $SU(2)$ Higgs φ^4 场，证明了 Higgs 场的真空自发破缺的经典观念对应于某种超流相变. 当荷电 Higgs 场和中性复

Higgs 场的凝聚密度之和 $\frac{N_B+N_C}{V}$ 为常数时，对称凝聚 $N_B=N_C$ 和不对称凝聚 ($N_B\neq 0$, $N_C=0$) 的基态能量不变. 而且，尽管二者的元激发结构不同，但得出的单粒子激发均为三个 Goldstone 粒子和一个质量为 $\sqrt{2}\,m$ 的粒子. 这一点从 $SU(2)$ 转动不变性看来是很自然的.

2. 在 Weinberg-Salam 模型中，引入兼有左、右旋的无质量涡电子. 通过它和中性 Higgs 场 χ 的耦合，使电子获得质量. 可以认为，这相当于在原来能量简并的各种可能凝聚方式中，触发了一种不对称的中性 Higgs 场凝聚，同时抑制了荷电 Higgs 场的凝聚，从而使 Higgs 场的真空平均值具有 (1.2) 的形式. 鉴于各种可能凝聚的基态能量相同，所以 W-S 模型中真空自发破缺的假定 (1.2) 无疑是正确的. 本文推出的电子质量 $m_e=G\frac{v}{\sqrt{2}}$ 也与 W-S 模型的结果一致.

3. 值得指出，如果假定标量场为实质量的 Klein-Gordon 场，可以证明，凝聚后的新真空能量对凝聚密度是一个极大值，因而 Klein-Gordon 场的凝聚态只是一种亚稳态，而当标量场是"虚质量"的 Higgs 场，玻色凝聚后的超流基态才是稳定态，基态能量对凝聚密度而言是极小值. 由此看来，要使耦合的玻色、费米体系具有稳定的凝聚态，Higgs 场的引入无疑是必要的.

参 考 文 献

[1] 倪光炯、苏汝铿，科学通报. 1980 年第 1 期第 9 页.
[2] S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.*, 19(1967), 1264; A. Salam, In Elementary Particle Theory, edited by N. Svartholm (Almgvist and Wiksell, 1968).
[3] 博戈留玻夫，《量子统计学》杨棨译，科学出版社.
[4] 倪光炯、苏汝铿，科学通报，1980 年数理化专辑第 169 页.

BOSE CONDENSATION OF *SU*(2) HIGGS FIELDS AND THE ELECTRON MASS IN WEINBERG-SALAM MODEL

NI GUANG-JIONG　SU RU-KENG　CHEN SU-QING
(*Fudan University*)

ABSTRACT

The concept of Bose Condensation of Higgs fields is applied to $SU(2)$ Higgs φ^4 model. It is proved that under the selfinteractions between Higgs fields, when the sum of condensation densities of charged complex fields and neutral complex fields remains fixed, the vaccum energies of symmetrical and asymmetrical condensations are equal to each other whereas the elementary excitation spectra all include three Goldstone particles and a particle with mass $\sqrt{2}\,m$. Then by introducing a coupling between massless electron and neutral Higgs field, we derive an expression of electron mass which coincides with that in Weinberg-Salam model.