

相互作用玻色子-费米子模型与“回弯”现象

有马朗人

(日本东京大学)

张锡珍 李祝霞

(中国科学院原子能研究所)

摘 要

本文给出了一种相互作用玻色子-费米子模型哈密顿量。在先辈数 $\nu \leq 2$ 的情况下对此模型哈密顿量进行了求解和讨论。结果表明,“回弯”现象的一系列特性可以被很好地描述。

一、引 言

相互作用玻色子模型 (IBM) 能用统一的方式较成功地描述过渡区和大形变区偶-偶核较低的集体激发谱^[1-3]。如何将这种模型推广使之能描述原子核在高自旋态下的行为是一个重要的课题。由转动场中准粒子谱性质的研究可知^[4,5], 原子核的总角动量由集体转动和价核子团的排列角动量两部分所贡献, 所谓“回弯”现象只不过是处于某些特殊轨道的价核子团的排列角动量突然增加的一种表现。为了同时描述集体转动和价核子团的角动量排列效应, 必须在 IBM 的框架下引入玻色子 (s 玻色子和 d 玻色子) 拆成费米子对的概念。这是容易作到的, 因为 s 玻色子和 d 玻色子本来就是角动量为 0 和角动量为 2 的费米子对的某种玻色化, 所以玻色子拆成费米子对时必须满足角动量和粒子数守恒。本文给出了许可玻色子和费米子对互相变化的玻色子-费米子系统的模型哈密顿量, 在形式上它与 [6] 中的某团-转子模型哈密顿量有类似之处, 即可以保证价核子团与核心之间的粒子对交换, 而保持整个原子核的粒子数守恒都是在空间固定的坐标系中讨论问题并不引入科里奥利力。但两者之间也有显著的差别, 由于原子核是有限核子系统, 为了保证整个原子核的粒子数守恒, 在集团转子模型中必须人为地引入一些假定和参数, 而本文所给出的模型则可以严格做到而且所有的公式都有解析形式。另外玻色子与费米子对的互换也有明确的意义。

对于这种玻色子-费米子模型哈密顿量, 我们在先辈数 $\nu \leq 2$ 的情况下作了对角化, 对于高自旋态下的“回弯”现象的一系列特性进行了讨论。

二、模型哈密顿量

对于相互作用玻色子-费米子系统(假定费米子团处于单 i 轨道),我们取模型哈密顿量为

$$H = H_{\text{IBM}} + H_V + kQ_c \cdot Q_i + G_0(s^+[a_i a_i]^0 + [a_i^+ a_i^+]^0 s) \\ + G_2((d^+[a_i a_i]^2)^0 + ([a_i^+ a_i^+]^2 d)^0),$$

这里 H_{IBM} 是相互作用玻色子模型哈密顿量,对于大变形区(稀土)原子核,我们取其 SU_3 极限,即

$$H_{\text{IBM}}(SU_3) = -KQ_c \cdot Q_c - K'L \cdot L,$$

对于基带,其能量表达式为

$$E([N](2N, 0)0LM) = \alpha L(L+1) - \beta C(2N, 0),$$

其中 $C(\lambda, \mu)$ 是 SU_3 的卡什米尔算子.

$$H_V = \epsilon_0 \sum_m a_{jm}^+ a_{jm} + \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \langle \alpha\beta | V | \delta\gamma \rangle a_\alpha^+ a_\beta^+ a_\gamma a_\delta$$

是价核子团的哈密顿量. 因我们讨论稀土区的原子核,所以假定价核子团处于 $i_{13/2}$ 单 i 轨道上. 二体相互作用 V 取为表面 δ 函数.

Q_c 是相互作用玻色子在 SU_3 极限下的四极矩算符,而 Q_i 是价核子团的四极矩算符,所以 $kQ_c \cdot Q_i$ 表示 SU_3 核心与价核子团之间的四极相互作用,在某种近似下它表示价核子团所受 SU_3 核心的四极场(类似尼尔森位中的四极形变参数). G_0 项表示 SU_3 核心与价核子团之间互换角动量为 0 的核子对,或者近似地可视为 SU_3 核心对价核子团所提供的单极对力的平均场. G_2 项表示核心与价核子团之间角动量为 2 的核子对的交换,或近似地视为 SU_3 核心对价核子团所提供的四极对力的平均场. 可以看出,我们的模型哈密顿量严格保持原子核 (SU_3 核心加价核子团) 的粒子数守恒. 价核子团与 SU_3 核心的核子对的交换可用图 1 表示出来.

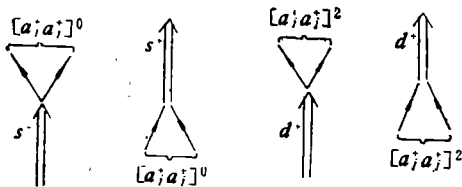


图 1 玻色子与费米子对的互换图形

我们的哈密顿量保持总核子数守恒,而在 $i_{13/2}$ 单 i 轨道上价核子团中的核子数可为 $0, 2, \dots, 14$. 又 H 是空间转动不变的,总角动量 (SU_3 核心与价核子团的角动量的合成) 是好量子数. 如限于先辈数 $\nu \leq 2$, 则价核子团的角动量的可能值为 $0, 2, 4, \dots, 12$. 而基波函数可以用

$$|(2N_c, 0)L_c \otimes |j^N \nu \nu J_\nu\rangle; I\rangle$$

来表示. 在确定的总角动量 I 下,基的数目(矩阵的维数)由跑遍各种许可的 N_c, N_ν ($2N_c + N_\nu = \text{常数}$) 和 L_c, J_ν 确定. 在这组基下 H 的矩阵元容易写出:

对于四极相互作用项

$$\langle (2N'_c, 0)L'_c \otimes |j^{N'_\nu} \nu' J'_\nu\rangle; I | kQ_c \cdot Q_i | (2N_c, 0)L_c \otimes |j^N \nu \nu J_\nu\rangle; I \rangle$$

$$= k(-1)^{L_c+J'_v} \left\{ \begin{matrix} L_c & J_v & I \\ J'_v & L'_c & 2 \end{matrix} \right\} \langle (2N'_c, 0) L'_c \| Q_c \| (2N_c, 0) L_c \rangle \\ \cdot \langle j^{N'_c} v' J'_v \| Q_j \| j^{N_c} v J_v \rangle \delta_{N'_c N_c} \delta_{N'_v N_v}.$$

其中

$$\langle (2N'_c, 0) L'_c \| Q_c \| (2N_c, 0) L_c \rangle = \frac{(2L_c + 1) C(0, L'_c)}{(2L'_c + 1)^{1/2} C(0, L_c)} C_{L'_c 0}^{L'_c 0} \\ \cdot \left\{ 4N_c + 3 + \frac{1}{2} L'_c (L'_c + 1) - \frac{1}{2} L_c (L_c + 1) \right\}$$

$$C(0, L) = [(2L + 1)b(\lambda, L)]^{1/2}$$

$$b(\lambda, L) = \frac{\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) \cdots (\lambda - L + 1)}{(\lambda - L + 1)(\lambda - L + 3) \cdots (\lambda + L + 1)} \quad L \geq 1$$

$$b(\lambda, 0) = \frac{1}{\lambda + 1}$$

而

$$\langle j^{N_c} v J_v \| Q_j \| j^{N_c} v J_v \rangle = \frac{2Q - 2N_v}{2Q - 2v} \langle j^v v J'_v \| Q_j \| j^v v J_v \rangle$$

$$\langle j^{N_c+2} v J'_v \| Q_j \| j^{N_c} v J_v \rangle = \sqrt{\frac{(N_c - v)(2Q - N_c - v)}{2(2Q - 2v - 2)}} \langle j^v v + 2J'_v \| Q_j \| j^v v J_v \rangle$$

对于 G_0 项,

$$\langle (2N'_c, 0) L'_c \otimes | j^{N'_c} v' J'_v \rangle; 1 | G_0 (S^+ [a_j a_j]^0 + [a_j^\dagger a_j^\dagger]^0 S) | (2N_c, 0) L_c \otimes \\ | j^{N_c} v J_v \rangle; 1 \rangle = \delta_{L'_c L_c} \delta_{J'_v J_v} G_0 \frac{1}{(2L_c + 1)^{1/2}} \frac{1}{(2J_v + 1)^{1/2}} \\ \cdot \{ \langle (2N'_c, 0) L'_c \| S^+ \| (2N_c, 0) L_c \rangle \cdot \langle j^{N'_c} v' J'_v \| [a_j a_j]^0 \| j^{N_c} v J_v \rangle \\ + \langle (2N'_c, 0) L'_c \| S \| (2N_c, 0) L_c \rangle \cdot \langle j^{N'_c} v' J'_v \| [a_j^\dagger a_j^\dagger]^0 \| j^{N_c} v J_v \rangle \}.$$

对于 G_2 项

$$\langle (2N'_c, 0) L'_c \otimes | j^{N'_c} v' J'_v \rangle; \\ 1 | G_2 ((\widetilde{d^+ [a_j a_j]^0} + [a_j^\dagger a_j^\dagger] \widetilde{d})^0) | (2N_c, 0) L_c \otimes | j^{N_c} v J_v \rangle; 1 \rangle \\ = \frac{1}{\sqrt{5}} G_2 \left\{ \begin{matrix} L_c & J_v & I \\ J'_v & L'_c & 2 \end{matrix} \right\} \{ \langle (2N'_c, 0) L'_c \| d^+ \| (2N_c, 0) L_c \rangle \\ \cdot \langle j^{N'_c} v' J'_v \| \widetilde{[a_j a_j]^2} \| j^{N_c} v J_v \rangle + \langle (2N'_c, 0) L'_c \| \widetilde{d} \| (2N_c, 0) L_c \rangle \\ \cdot \langle j^{N'_c} v' J'_v \| [a_j^\dagger a_j^\dagger]^2 \| j^{N_c} v J_v \rangle \}.$$

利用先辈数机制, $[a_j^\dagger a_j^\dagger]^0$, $[a_j^\dagger a_j^\dagger]^2$ 的约化矩阵元容易计算, 为求得 s 玻色子和 d 玻色子的约化矩阵元, 我们需要 $U_6 \supset SU_3 \supset O_3$ 约化的 Wigner 系数^[7]. 我们有公式

$$\langle [N_c - 1] (2N_c - 2, 0) L_c \| s \| [N_c] (2N_c, 0) L_c \rangle \\ = \sqrt{2L_c + 1} \sqrt{\frac{(2N_c - L_c)(2N_c + L_c + 1)}{6(2N_c - 1)}},$$

$$\langle [N_c - 1] \cdot (2N_c - 2, 0) L'_c \| d \| [N_c] (2N_c, 0) L_c \rangle.$$

$$= \sqrt{2L'_c + 1} \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\frac{(2N_c + L_c - 1)(2N_c + L_c + 1)(L_c - 1)L_c}{2(2N_c - 1)(2L_c - 1)(2L_c + 1)}} \quad L'_c = L_c - 2 \\ \sqrt{\frac{(2N_c - L_c)(2N_c + L_c + 1)L_c(L_c + 1)}{3(2N_c - 1)(2L_c - 1)(2L_c + 3)}} \quad L'_c = L_c \\ \sqrt{\frac{(2N_c - L_c - 2)(2N_c - L_c)(L_c + 1)(L_c + 2)}{2(2N_c - 1)(2L_c + 2)(2L_c + 3)}} \quad L'_c = L_c + 2. \end{array} \right.$$

以上公式中的 $Q = j + \frac{1}{2}$ ($j = \frac{13}{2}$ 时, $Q = 7$).

三、参数的选取

因本文的目的不在于用调参数的方法去符合特定的某一原子核的性质,而在于讨论本文所提出的模型哈密顿量在描述高自旋态(特别是回弯现象)方面的功能,所以对于 SU_3 极限下的核心,我们取 $N_c = 15$, $\alpha = 13.5\text{keV}$, $\beta = 6\text{keV}$ 代表稀土区的原子核(对于典型的 SU_3 极限下的原子核 $^{170}\text{Er}^{[2]}$, $N_c = 17$, $\alpha = 12.49\text{keV}$, $\beta = 4.4\text{keV}$),计算表明,这些参数在合理范围内的变化不影响我们的主要结论.

在 H_V 内, ϵ_0 和 δ 力的强度是参数.由后面的计算可知, ϵ_0 与 $i_{13/2}$ 轨道上价核子团中的平均核子数有直接关系,即在某种程度上 ϵ_0 可代表 $i_{13/2}$ 轨道的填充程度而起费米表面能的作用.本文的计算中我们取了各种 ϵ_0 值而 δ 力的相互作用强度 $V_0 \int R^4(r)r^2 dr = -0.2$ (MeV).

四极相互作用强度 $k = -0.1(\text{MeV})$, 这近似地相应于价核子团在 $\beta = 0.23$ 的变形场中运动.

$G_0 = 0.15(\text{MeV})$, 这近似地相应于 SU_3 核心向价核子团提供的单极对力的平均场为 0.5 MeV . 价核子团中核子对所受的单极对力的平均场由两部分提供: 一部分是 SU_3 核心的贡献, 另一部分是价核子团中核子对之间的单极对相互作用的贡献. 在我们所用的参数下, 这种总的对平均场大于 1MeV .

对于常数 G_2 , 我们简单地取 $G_2 = G_0/2$. 计算结果表明, 适当地改变 G_2 , 对我们的结论没有本质的影响.

四、计算结果

为便于表述和理解我们的计算结果, 定义如下几个量:

对于确定的总角动量, 波函数为

$$\phi(I) = \sum_{\substack{2N_c + N_\nu = \text{常数} \\ L_c, \nu, j_\nu}} C_{N_c, \nu, j_\nu}^{N_c L_c} (I) |(2N_c, 0) L_c \otimes |j_\nu \nu j_\nu\rangle; I\rangle$$

则

$$\langle N_\nu \rangle_I = \sum_{\substack{L_c, \nu, j_\nu \\ 2N_c + N_\nu = N}} |C_{N_c, \nu, j_\nu}^{N_c L_c} (I)|^2 N_\nu$$

表示 $i_{13/2}$ 轨道上价核子团的平均核子数。

$$P_{J_V}(I) = \sum_{\substack{\nu, L \\ 2N_c + N_\nu = N}} |C_{N_c^\nu L_c}^{N_c L_c J_V}|^2$$

表示在角动量 I 下价核子团的排列角动量的几率分布。

而由

$$\langle J_V \rangle_I (\langle J_V \rangle_I + 1) = \sum_{\substack{\nu, J_\nu, L_c \\ 2N_c + N_\nu = N}} |C_{N_c^\nu L_c}^{N_c L_c J_V}(I)|^2 J_V (J_V + 1)$$

所定义的 $\langle J_V \rangle_I$ 是在总角动量为 I 时价核子团的排列角动量

利用 $\langle N_V \rangle_I, P_{J_V}(I), \langle J_V \rangle_I$, 则不难对我们的计算结果进行描述和理解。

图 2 给出 $I = 0$ 时 $i_{13/2}$ 轨道上价核子团的平均核子数与 ϵ_0 的关系。在很大范围内它近于一条直线, 这表明将 ϵ_0 取为费米表面能是合理的。

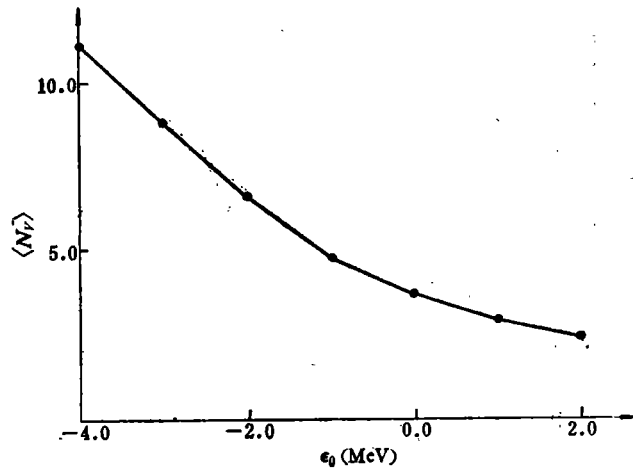


图 2 $i_{13/2}$ 轨道上的平均粒子数与 ϵ_0 的关系

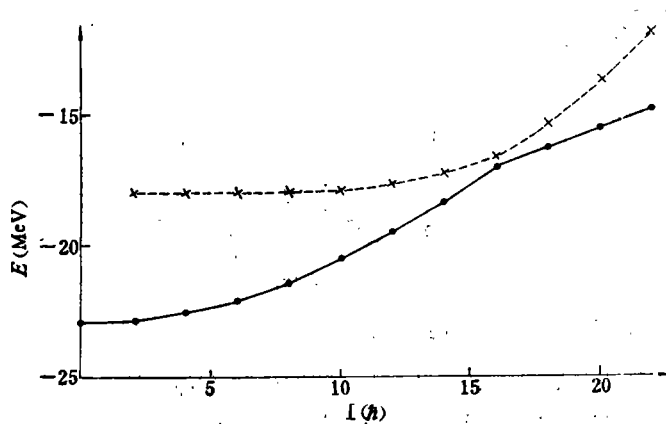


图 3 $\epsilon_0 = 0.5\text{MeV}$ 时的 Yrast 带和 Yrarc 带

在上面所给的参数下, 我们计算了不同的 ϵ_0 值时的转晕带和第一激发带。结果表明,

在各种 ϵ_0 值 (-4.5MeV — 3.5MeV) 都出现“回弯”现象, I_c (发生“回弯”的角动量) 随 ϵ_0 的减小(价核子团中平均核子数的增加) 而增大, 但给不出“回弯”的强弱(两带两相互作用矩阵元 $|V|$ 的大小) 随费米表面能的周期性变化^[5,8], 而都近似地给出 $2|V| \approx 400\text{--}500(\text{keV})$. (见图3). 图4给出 $\langle J_V \rangle_I$ 随 I 的变化规律, 可看出, 在 I_c 处, 对 Yrast 带 $\langle J_V \rangle$ 突然上升而对 Yrare 带 $\langle J_V \rangle$ 下降, 这与转动场中准粒子谱性质的计算所得结果是一致的, 即表明“回弯”现象是由价核子团的排列角动量的突然增加所造成的. 为什么价核子团的排列角动量在 I_c 处会突然增加? 这由图5可以说明, 这里给出了在不同的 I 下的 P_{J_V} 的分布, 在低角动量时 ($I < I_c$ 处), 价核子团主要处于排列角动量低的部分 ($J_V = 0, 2, 4$), 而在总角动量很高时, 则价核子团的几率分布集中在高角动量部分在能量上是有利的 ($J_V = 12, 10, 8$). 所以这给出了在 I_c 处价核子团的排列角动量的突然增加而导致了“回弯”.

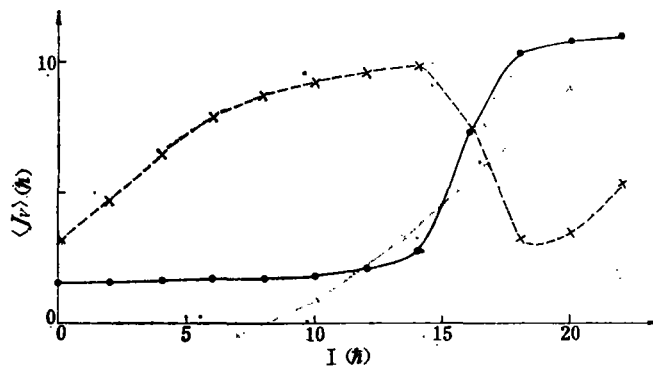


图4 对 Yrast 带和 Yrare 带 $i_{13/2}$ 轨道价核子团的排列角动量 ($\epsilon_0 = 0.5\text{MeV}$)

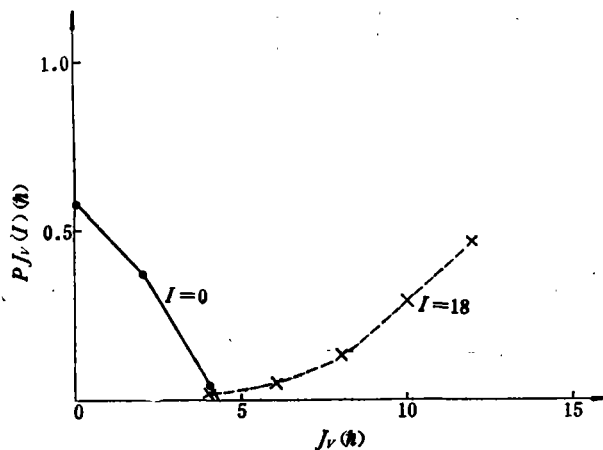


图5 对于 Yrast 带在不同的总角动量的价核子团的排列角动量的几率分布

另一有趣的结果是, 对于转晕带, “回弯”发生时 $\langle N_V \rangle$ 有突然下降, 或更一般的表述为 $\langle J_V \rangle$ 的增加与 $\langle N_V \rangle$ 的下降是相应的(见图6). 这由两带定义的图象可以理解, 由于对基带和激发带 $i_{13/2}$ 轨道上的平均核子数不同, 这两带经弱的相互作用后 Yrast 带的平均粒子数在 $I > I_c$ 有下降, 而相应的 Yrare 带的平均粒子数在 $I > I_c$ 则有上升. 这表明,

$i_{13/2}$ 轨道上价核子团的平均核子数不同的两带的相互作用引起“回弯”。(由转动场中准粒子谱的图象,二准粒子激发带与基带的定义引起“回弯”。)

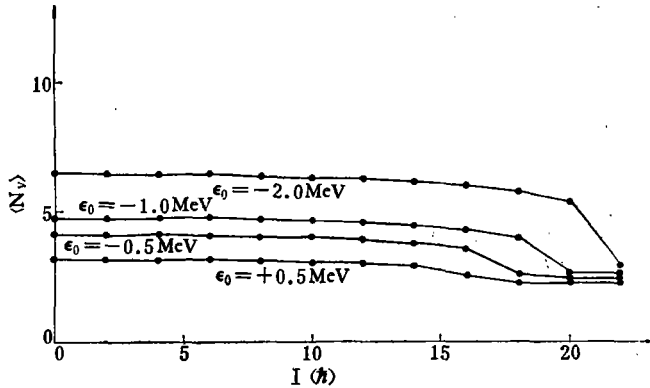


图 6. 各种 ϵ_0 时价核子团的平均核子数随 I 的变化

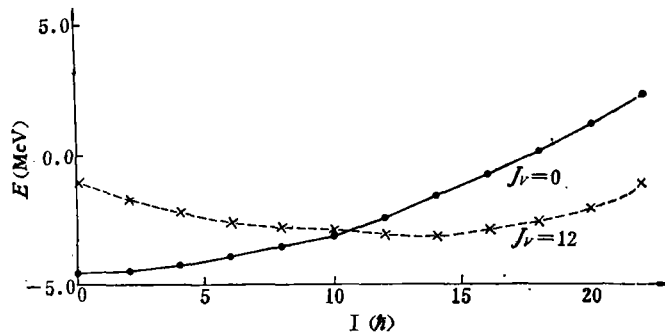


图 7 $\kappa = G_0 = G_2 = 0$; 且 $i_{13/2}$ 轨道只有一对费米子的简单模型

我们对 $G_2 = 0$ 也进行了计算, 结果表明, G_2 取不同的值对我们的结论没有重要影响。

其实, 以上所得到的“回弯”现象的图象可以在最简单的模型下给出, 即在 $\kappa = G_0 = G_2 = 0$, 而在 $i_{13/2}$ 轨道上有两个核子而通过单极对力相互作用的情况(见图 7), 这时基带与激发带交叉的图象看得很清楚。在低角动量情况下, $i_{13/2}$ 轨道上的一对核子处于低角动量 ($J_v = 0$) 有利, 而在高角动量情况下, $i_{13/2}$ 轨道上的一对核子处于高角动量 ($J_v = 12$) 有利。这与科里奥利力打破对的概念是一致的(在我们所取的基下, 不存在科里奥利力。).

五、结论和讨论

本文所引入的相互作用玻色子-费米子模型哈密顿量可以较好地描述大形变区(稀土区)原子核的回弯现象。这表明, 在高自旋态时将相互作用玻色子模型加以推广, 而包含玻色子打破为费米子对是重要的。由于本文只考虑了先辈数 $\nu \leq 2$ 的情况, 结果还未能得

到“回弯”的强弱和有无随核子填充数周期性变化的规律。关于先辈数 $\nu > 2$ 的影响及关于回弯强弱的振荡行为将在下一篇文章中讨论。

参 考 文 献

- [1] A. Arima and F. Iachello, *Phys. Rev. Lett.*, **35**(1975), 1069.
- [2] A. Arima and F. Iachello, *Ann. of Phys.*, **99**(1976), 253.
- [3] A. Arima and F. Iachello, *Ann. of Phys.*, **111**(1978), 201.
- [4] A. Bohr and B. R. Mottelson, Invited talk at the Inter. Conf. on Nuclear structure, (Tokyo, 1977).
- [5] 张锡珍, 陈永寿, 高能物理与核物理, **4**(1980), 103.
- [6] F. Grümmer, R. W. Schmid and A. Faessler, *Nucl. Phys.*, **A317**(1979), 287.
- [7] J. D. Vergados, *Nucl. Phys.*, **A111**(1968), 681.
- [8] R. Bengtsson, I. Hamamoto and B. R. Mottelson, *Phys. Lett.*, **73B**(1978), 259.

INTERACTING BOSON-FERMION MODEL AND “BACK-BENDING” PHENOMANA

A. ARIMA

(Tokyo University, Japan)

ZHANG XI-ZHEN LI CHU-HSIA

(Institute of Atomic Energy, Academia Sinica)

ABSTRACT

A model Hamiltonian of interacting Boson-Fermion system is given and this model Hamiltonian is solved with siority $\nu \leq 2$. The calculation shows that the back-bending phenomana can be well discribed.