第6卷 第5期 高能物理与核物理 Vol. 6, No. 5
1982年9月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS Sept., 1982

d-玻色子体系波函数的 $SU_2 \otimes SU_2$ 基、物理基与无迹玻色子算符（I）

杨泽森
（北京大学物理系）

摘　要

鉴于 $U_5 \supset O_5 \supset SU_2 \otimes SU_2$ 表象在表达 d 玻色子体系的物理基方面有明显优点，我们试图寻找比较简便的途径求出现有的几类物理基矢在这种 $SU_2 \otimes SU_2$ 表象的波函数的明显表达式，并建立若干有关的工具. 在本文中，我们分析了通常的玻色子算符和无迹玻色子算符的 $SU_2 \otimes SU_2$ 张量性质，利用这种无迹算符构成 $SU_2 \otimes SU_2$ 基矢的一种简单表达式，并借助它找到了根据物理基矢在 (n_μ) 表象的表示求出它在 $SU_2 \otimes SU_2$ 表象的表示的比较简单的方法，建立了相应的公式.

一、引　言

自旋宇称为 2^+ 的 d-玻色子在描述原子核的集体运动方面起着重要的作用（在 Bohr-Mottelson 的集体模型以及 Arima 等人的相互作用玻色子模型中都是如此）. 所以，为这种玻色子体系的波函数建立物理基的问题，已有许多作者讨论过. "物理"基指的是使角动量对角化的基，最普通的是按照群链 $U_5 \supset O_5 \supset O_3$ 构成的基，以下简称 O_3 基. 这个群链能够提供四个量子数，即总玻色子数 n，未配对玻色子数 P 以及角动量量子数 LM. 所缺的第五个量子数当作流动指标处理. 这种基矢中描述配对玻色子的部分比较简单，主要问题是构成 $p = n$ 的基本基矢 $|PPO_3\rangle$（无配对玻色子情形）. 在建立基本基矢时，需要选取适当的表达形式，而且流动指标的定义一般都受到所用的表达形式的影响，因此就存在种种不同的途径.

习惯上常用 $(\beta\gamma\theta_i)$ 表象或 (n_μ) 表象来表达 d 玻色子体系的波函数，其中 θ_i 代表尤拉角，n_μ 是自旋投影为 μ 的玻色子的数目. 在 $(\beta\gamma\theta_i)$ 表象中，O_3 基矢的尤拉角部分和 β 部分都容易确定，γ 部分由一个耦合微分方程组决定，而这个方程组是难于直接求解的[1,2]. (n_μ) 表象常被采用，只是由于它的基矢结构简单，即每种 d 玻色子的数目 n_μ 都取确定的值. 从物理应用上说，它却是一种很乏味的表象. Vilenkin 等人[3,4]引进的所谓

本文 1982 年 3 月 4 日收到.

无迹玻色子算符 (a_μ^+, a_ν)(见正文(2.31)及(2.32式)，在表达$|PPO_3\rangle$ 基矢方面表现出明显的优点. 用 a_μ^+ 表达的 $|PPO_3\rangle$ 基矢形式简洁，流动指标的含义也非常明确[2]，可是不便于直接使用. 要发挥这种基矢的作用，还有待于用适当的表象把它们表达出来. Moshinsky 等人为了用($\beta\gamma\theta_i$)表象求出 O_3 基矢的明显表达式，又在[5]中混用 a_μ^+ 以及原来的湮灭算符 $\tilde{d}_2$，构成基本基矢的一种所谓"粒子-空穴"表达式，然后把它改写到 ($\beta\gamma\theta_i$) 表象. 实际上，他们方法的要点在于把"粒子-空穴"表达式改写为只含由原来的 d_μ^+ 算符组成的 O_3 张量的形式，如果再把这些 O_3 张量展开为非耦合形式，当然就会得到"粒子-空穴"基矢在 (n_μ) 表象中的表达式. 因此也可以说，Moshinsky 等人在[5]中已经在上述两种表象求出 O_3 基矢的明显表达式.

不久前，S. Szpikowski 等人[6]曾用 $SU(1,1)\otimes O_5\supset O_3$ 链来代替 $U_5\supset O_5\supset O_3$ 链，讨论了建立"物理"基的问题. 这里的 $SU(1,1)$ 群是由配对算符和它的厄米共轭以及总玻色子数算符的一种线性式生成的，因此在这个群链中用以描述基矢的量子数与原来的链并无差别，而且[6]的主要结果也是用 (n_μ) 表象给出 O_3 基矢的一种明显表达式. 至于流动指标的归一化，总是可以按 Schmidt 方法进行.

另一方面，K. T. Hecht[7] 曾经研究了在 $U_5\supset O_5\supset SU_2\otimes SU_2$ 表象建立 O_3 基的问题. 孙洪洲在[8]中求出了这种 $SU_2\otimes SU_2$ 基矢的表达式，并用递推公式来确定 O_3 基矢.

这种 $SU_2\otimes SU_2$ 表象保存着 O_5 群提供的量子数 P，因此在表达一个 O_3 基矢时涉及的 $SU_2\otimes SU_2$ 基矢要比涉及的 (n_μ) 基矢少得多，而且 $SU_2\otimes SU_2$ 基矢也还是简单的，应当认为这是一种有明显优点的非连续表象. 但是到目前为止，在这种表象中构成物理基的方法还不及其他表象完善. 在本文以及随后的工作中，我们将针对上面提到的几类已有明显公式的 $|PPO_3\rangle$ 基矢(即[2]中用 a_μ^+ 算符定义的基矢，[5]中的"粒子-空穴"基矢以及[6]中所给出的基矢)，寻找比较满意的途径，求出它们在 $SU_2\otimes SU_2$ 表象的明显表达式. 此外，我们还将处理一些与应用有关的问题.

在本文中将建立一些以后需要的工具，同时处理上述问题的一个方面，即借助$|PPO_3\rangle$ 基矢在 (n_μ) 表象的表示求出在 $SU_2\otimes SU_2$ 表象的表示. 关于后一点，我们当然不是采用通常的表象变换方法，因为通常的表象变换公式

$$\langle PPSU_2\otimes SU_2|PPO_3\rangle=\sum_{(n_\mu)}\langle PPSU_2\otimes SU_2|n_\mu\rangle\langle n_\mu|PPO_3\rangle \tag{1.1}$$

意味着，在为两类无配对玻色子基矢的内积寻找明显表达式时，求助于允许配对的中间态，这会使表达式的结构变得复杂. 我们的办法是用 a_μ^+ 算符构成 $|PPSU_2\otimes SU_2\rangle$ 基矢的一种比较简单的公式，然后借助它求出比(1.1)简单的表达式.

二、$U_5\supset O_5\supset SU_2\otimes SU_2$ 表象与玻色子算符的张量性质

用 d_μ^+, d_ν 代表 d 玻色子的产生、湮灭算符，于是

$$[d_\mu, d_\nu^+]=\delta_{\mu\nu} \tag{2.1}$$

$$[d_\mu^+, d_\nu^+]=[d_\nu, d_\mu]=0 \tag{2.2}$$

$\{d_\mu^+d_\nu\}$ 构成一个 5 维幺正群 U_5 的无穷小算子，它的子群链 $U_5\supset O_5\supset SU_2\otimes SU_2$ 为 d 玻

色子体系的波函数提供一个完全的分类(提供5个量子数)，这即是[7]与[8]中所用的群链. 相应于 U_5 及 O_5 的不变量的两个量子数，是熟知的总玻色子数 n 以及未配对玻色子数 P:

$$\hat{n} = \sum_{\mu} d_\mu^+ d_\mu \to n \tag{2.3}$$

$$R_5 = \hat{n}(\hat{n}+3) - 5(d^+d^+)_0(\tilde{d}\tilde{d})_0 \to P(P+3) \tag{2.4}$$

其中

$$\tilde{d}_\mu = (-1)^\mu d_{-\mu} \tag{2.5}$$

$$(d^+d^+)_0 = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{\mu} (-1)^\mu d_\mu^+ d_{-\mu}^+ \tag{2.6}$$

$$(\tilde{d}\tilde{d})_0 = (d^+d^+)_0^+ \tag{2.7}$$

在一定 n 下, P 的许可值为

$$P = n, n-2, n-4, \cdots, 0 \text{ 或 } 1 \tag{2.8}$$

5个量子数中其余三个,来自两个 SU_2 群的“角动量” ϵ 及 κ, 也即这两个 SU_2 的无穷小算子:

$$SU_2^{(\epsilon)}: \epsilon_+ = d_2^+ d_{-1} + d_1^+ d_{-2} \tag{2.9}$$

$$\epsilon_- = (\epsilon_+)^+ \tag{2.10}$$

$$\epsilon_0 = \frac{1}{2}[\epsilon_+, \epsilon_-] \tag{2.11}$$

$$SU_2^{(\kappa)}: \kappa_+ = d_2^+ d_1 + d_{-1}^+ d_{-2} \tag{2.12}$$

$$\kappa_- = (\kappa_+)^+ \tag{2.13}$$

$$\kappa_0 = \frac{1}{2}[\kappa_+, \kappa_-] \tag{2.14}$$

除(2.11)及(2.14)外,其他的对易关系式是

$$[\epsilon_0, \epsilon_\pm] = \pm \epsilon_\pm \tag{2.15}$$

$$[\kappa_0, \kappa_\pm] = \pm \kappa_\pm \tag{2.16}$$

$$[\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\kappa}] = 0 \tag{2.17}$$

$\boldsymbol{\epsilon}^2$ 与 $\boldsymbol{\kappa}^2$ 是相同的,我们用 $\boldsymbol{\Lambda}^2$ 代表它们:

$$\boldsymbol{\Lambda}^2 = \boldsymbol{\epsilon}^2 = \boldsymbol{\kappa}^2 = \epsilon_+\epsilon_- + \epsilon_0(\epsilon_0 - 1) = \kappa_+\kappa_- + \kappa_0(\kappa_0 - 1) \tag{2.18}$$

因此,两个“角动量”提供三个量子数,即:

$$\boldsymbol{\Lambda}^2 \to \Lambda(\Lambda+1) \tag{2.19}$$

$$\epsilon_0 \to \epsilon$$

$$\kappa_0 \to \kappa \tag{2.20}$$

在一定的 Λ 下, ϵ 及 κ 的许可值为:

$$\epsilon, \kappa = -\Lambda, -\Lambda+1, \cdots \lambda \tag{2.21}$$

为了与物理基矢的记号相区别，我们用 $|np\overset{\Lambda}{\epsilon}\kappa\rangle$ 代表 $U_5 \supset O_5 \supset SU_2 \otimes SU_2$ 基矢，并简称 $SU_2 \otimes SU_2$ 基矢.

除了 ϵ、κ 之外, O_5 群还有另外四个无穷小算子,照[7]及[8]中的选法,它们组成一个

$\frac{1}{2}$ 秩的 $SU_2\otimes SU_2$ 张量,即对 $SU_2^{(\varepsilon)}$ 或对 $SU_2^{(\kappa)}$ 而言,都是 $\frac{1}{2}$ 秩张量. 按照本文的精神,我们不特别注重这个张量,倒是要着重使用 d_μ^+、d_ν 算符以及无迹玻色子算符的张量性质.

d_0^+ 及 d_0 不出现在 ε 或 κ 的分量中,显然是 $SU_2\otimes SU_2$ 标量:

$$[\varepsilon, d_0^+] = [\varepsilon, d_0] = 0 \tag{2.22}$$

$$[\kappa, d_0^+] = [\kappa, d_0] = 0 \tag{2.23}$$

至于 $\mu \neq 0$ 的四个 d_μ^+ 及四个 $\hat{d}_\mu$, 我们用双指标记号 D_{rs} 及 $\hat{D}_{rs}$ 表示如下

(r, s)	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$	$\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$
D_{rs}	d_2^+	d_1^+	d_{-1}^+	d_{-2}^+
$\hat{D}_{rs}$	$\hat{d}_2$	$\hat{d}_1$	$\hat{d}_{-1}$	$\hat{d}_{-2}$

由直接验证可知, D 及 $\hat{D}$ 都是 $\frac{1}{2}$ 秩 $SU_2\otimes SU_2$ 张量. 即

$$[\varepsilon_0, D_{rs}] = rD_{rs} \tag{2.24}$$

$$[\varepsilon_\pm, D_{rs}] = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\mp r\right)\left(\frac{1}{2}\pm r+1\right)}\,D_{r\pm1,s} \tag{2.25}$$

$$[\kappa_0, D_{rs}] = sD_{rs} \tag{2.26}$$

$$[\kappa_\pm, D_{rs}] = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\mp s\right)\left(\frac{1}{2}\pm s+1\right)}\,D_{r,s\pm1} \tag{2.27}$$

$\hat{D}$ 也满足这些对易关系. 在厄米共轭下有

$$D_{rs}^+ = (-1)^{r-s}\hat{D}_{-r,-s} \tag{2.28}$$

张量 D 或 $\hat{D}$ 的分量都不是 O_5 群的无穷小算子,前面说到的构成 $\frac{1}{2}$ 秩 $SU_2\times SU_2$ 张量的四个无穷小算子可写成(与[8]中的表达式有相因子上的差别):

$$U_{rs} = \frac{1}{\sqrt{2}}(D_{rs}d_0 - d_0^+\hat{D}_{rs}) \tag{2.29}$$

从 d_μ^+ 算符的张量性质可知, $\mu = 0$ 的 d 玻色子不携带 Λ 值,一个 $\mu \neq 0$ 的 d 玻色子则带有 $\frac{1}{2}$ 的 Λ 值. 注意配对算符 $(d^+d^+)_0$ 是 O_5 不变量,当然是 $SU_2\otimes SU_2$ 标量,可见当两个 d 玻色子把通常的角动量耦合成零时,它们的 Λ 值也耦合成零. 换句话说,只有未配对的 $\mu \neq 0$ 的玻色子才贡献 Λ 值. 另外, $(\hat{d}\hat{d})_0$ 以及 $\hat{n}$ 也是 O_5 不变量, 因此又是 $SU_2\otimes SU_2$ 标量.

综上所述可以看出,在一定的 P 值下, Λ 的最大可能值是 $\Lambda_m = \frac{P}{2}$, 因此它的许可值为:

$$\Lambda = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \cdots \frac{P}{2}. \tag{2.30}$$

公式(2.8)、(2.21)及(2.30)给出了 $U_5 \supset O_5 \supset SU_2 \otimes SU_2$ 基矢的量子数结构的完整表述.

下面转而讨论 Vilenkin 等人[3,4]的"无迹"玻色子算符,其定义如下:

$$a_\mu^+ = d_\mu^+ - \sqrt{5}\,(d^+d^+)_0 \frac{1}{2\hat{n}+5} \tilde{d}_\mu \tag{2.31}$$

$$a_\mu = (a_\mu^+)^+ \tag{2.32}$$

容易验证 a_μ^+ 算符的如下性质:

$$[a_\mu^+, a_\nu^+] = 0 \tag{2.33}$$

$$(a^+a^+)_0 = \frac{5}{(2\hat{n}+1)(2\hat{n}-1)} (d^+d^+)_0 (d^+d^+)_0 (\tilde{d}\tilde{d})_0 \tag{2.34}$$

借此可以说明这种算符的最为特殊之点:它们作用于无配对玻色子的态时,总是不引起配对.设 $|\Phi\rangle$ 满足条件 $(\tilde{d}\tilde{d})_0|\Phi\rangle = 0$,而 $|\Phi'\rangle = a_\mu^+|\Phi\rangle$,于是 $(a^+a^+)_0|\Phi'\rangle = a_\mu^+(a^+\cdot a^+)_0|\Phi\rangle = 0$.这表明 $|\Phi'\rangle$ 仍然满足条件 $(\tilde{d}\tilde{d})_0|\Phi\rangle = 0$.

最后说明一下无迹玻色子算符的张量性质.由于 $(d^+d^+)_0$ 及 $\hat{n}$ 是 $SU_2 \otimes SU_2$ 标量,所以 a_μ^+, $\tilde{a}_\mu$ 作为 $SU_2 \otimes SU_2$ 张量,与 d_μ^+、$\tilde{d}_\mu$ 是同型的.换句话说,a_0^+ 及 a_0 是 $SU_2 \otimes SU_2$ 标量,而下表所示的 A 及 $\hat{A}$ 是 $\frac{1}{2}$ 秩 $SU_2 \otimes SU_2$ 张量.

(r, s)	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$	$\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$
A_{rs}	a_2^+	a_1^+	a_{-1}^+	a_{-2}^+
$\hat{A}_{rs}$	$\hat{a}_2$	$\hat{a}_1$	$\hat{a}_{-1}$	$\hat{a}_{-2}$

在厄米共轭下,有类似于(2.28)的关系:

$$A_{rs}^+ = (-1)^{r-s} \hat{A}_{-r,-s} \tag{2.35}$$

三、$SU_2 \otimes SU_2$ 表象基本基矢的无迹算符表达式

基本基矢是指 $n = p$ 的基矢(没有配对玻色子).我们知道,配对数的改变可借助算符 $(d^+d^+)_0$ 及 $(\tilde{d}\tilde{d})_0$ 的作用来实现:

$$\sqrt{5}\,(d^+d^+)_0|nP_{\epsilon\kappa}^\Lambda\rangle = |n+2, P_{\epsilon\kappa}^\Lambda\rangle \sqrt{(n+2-P)(n+2+5)} \tag{3.1}$$

$$\sqrt{5}\,(\tilde{d}\tilde{d})_0|nP_{\epsilon\kappa}^\Lambda\rangle = |n-2, P_{\epsilon\kappa}^\Lambda\rangle \sqrt{(n-P)(n+P+3)} \tag{3.1'}$$

因此,$|nP_{\epsilon\kappa}^\Lambda\rangle$ 可借基本基矢 $|PP_{\epsilon\kappa}^\Lambda\rangle$ 表示为:

$$|nP_{\epsilon\kappa}^\Lambda\rangle = [\sqrt{5}\,(d^+d^+)_0]^{\frac{n-P}{2}} |PP_{\epsilon\kappa}^\Lambda\rangle \sqrt{\frac{\left(\frac{n+P}{2}+1\right)!\,(2P+3)!}{\left(\frac{n-P}{2}\right)!\,(n+P+3)!\,(P+1)!}} \tag{3.2}$$

其次,ϵ、κ 相当于角动量投影,它们的数值的改变可用 $\epsilon_\pm$ 及 $\kappa_\pm$ 来实现:

$$\epsilon_{\pm}|nP^{\Lambda}_{\epsilon\kappa}\rangle = |nP^{\Lambda}_{\epsilon\pm1,\kappa}\rangle\sqrt{(\Lambda\mp\epsilon)(\Lambda\pm\epsilon+1)} \tag{3.3}$$

$$\kappa_{\pm}|nP^{\Lambda}_{\epsilon\kappa}\rangle = |nP^{\Lambda}_{\epsilon\kappa\pm1}\rangle\sqrt{(\Lambda\mp\kappa)(\Lambda\pm\kappa+1)} \tag{3.3'}$$

例如,当 $|PP^{\Lambda}_{\Lambda\Lambda}\rangle$ 已知时, $|PP^{\Lambda}_{\epsilon\kappa}\rangle$ 可按下式得出:

$$|PP^{\Lambda}_{\epsilon\kappa}\rangle = (\epsilon_-)^{\Lambda-\epsilon}(\kappa_-)^{\Lambda-\kappa}|PP^{\Lambda}_{\Lambda\Lambda}\rangle\sqrt{\frac{(\Lambda+\epsilon)!(\Lambda+\kappa)!}{(2\Lambda)!(2\Lambda)!(\Lambda-\epsilon)!(\Lambda-\kappa)!}} \tag{3.4}$$

由于 a_0^+ 及 a_0 都是双 SU_2 标量,又是无迹算符,故作用于 $|PP^{\Lambda}_{\epsilon\kappa}\rangle$ 时有

$$a_0^+|PP^{\Lambda}_{\epsilon\kappa}\rangle = |P+1, P+1, {}^{\Lambda}_{\epsilon\kappa}\rangle\langle P+1, P+1, {}^{\Lambda}_{\Lambda\Lambda}|a_0^+|PP^{\Lambda}_{\Lambda\Lambda}\rangle$$

$$a_0|PP^{\Lambda}_{\epsilon\kappa}\rangle = |P-1, P-1, {}^{\Lambda}_{\epsilon\kappa}\rangle\langle P-1, P-1, {}^{\Lambda}_{\Lambda\Lambda}|a_0^+|PP^{\Lambda}_{\Lambda\Lambda}\rangle$$

这与(3.1)、(3.1′)具有相似的结构. 从基矢 $|2\Lambda, 2\Lambda, {}^{\Lambda}_{\epsilon\kappa}\rangle$ 出发对 P 值递推可得出结构上类似于(3.2)的公式:

$$|PP^{\Lambda}_{\epsilon\kappa}\rangle = (a_0^+)^{P-2\Lambda}|2\Lambda, 2\Lambda, {}^{\Lambda}_{\epsilon\kappa}\rangle C(P, \Lambda) \tag{3.5}$$

系数 $C(P, \Lambda)$ 将在下面求出. 基矢 $|2\Lambda, 2\Lambda, {}^{\Lambda}_{\epsilon\kappa}\rangle$ 可借助(3.4)式从极值基矢 $|2\Lambda, 2\Lambda, {}^{\Lambda}_{\Lambda\Lambda}\rangle$ 求得,而后者是已知的:

$$|2\Lambda, 2\Lambda, {}^{\Lambda}_{\Lambda\Lambda}\rangle = \frac{1}{\sqrt{(2\Lambda)!}}(d_2^+)^{2\Lambda}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{(2\Lambda)!}}(a_2^+)^{2\Lambda}|0\rangle \tag{3.6}$$

(由(2.31)看出,$(d_2^+)^k|0\rangle = a_2^+(d_2^+)^{k-1}|0\rangle = (a_2^+)^k|0\rangle$) 由此以及根据 d_μ^+、a_μ^+ 的张量性质知道,在基矢 $|2\Lambda, 2\Lambda, {}^{\Lambda}_{\epsilon\kappa}\rangle$ 中不含 d_0^+ 算符,而且当把 d_μ^+ 换成 a_μ^+ 时,这个基矢保持不变. 可见在求出系数 $C(P, \Lambda)$ 之后,(3.5) 就是基本基矢通过无迹玻色子算符的表达式.

现在来求 a_0^+ 算符的基本矩阵元以及 $C(P, \Lambda)$. 由 a_0^+ 的定义有

$$\langle P+1, P+1, {}^{\Lambda}_{\Lambda\Lambda}|a_0^+|PP^{\Lambda}_{\Lambda\Lambda}\rangle = \langle P+1, P+1, {}^{\Lambda}_{\Lambda\Lambda}|d_0^+|PP^{\Lambda}_{\Lambda\Lambda}\rangle \tag{3.7}$$

利用 $d_0d_0^+ - d_0^+d_0 = 1$ 可得:

$$\begin{aligned}\langle P+1, P+1, {}^{\Lambda}_{\Lambda\Lambda}|d_0^+|PP^{\Lambda}_{\Lambda\Lambda}\rangle^2 &+ \langle PP^{\Lambda}_{\Lambda\Lambda}|d_0|P+1, P-1, {}^{\Lambda}_{\Lambda\Lambda}\rangle^2 \\ &- \langle PP^{\Lambda}_{\Lambda\Lambda}|d_0^+|P-1, P-1, {}^{\Lambda}_{\Lambda\Lambda}\rangle^2 = 1\end{aligned} \tag{3.8}$$

由(3.2)有

$$\langle PP^{\Lambda}_{\Lambda\Lambda}|d_0|P+1, P-1, {}^{\Lambda}_{\Lambda\Lambda}\rangle = \langle PP^{\Lambda}_{\Lambda\Lambda}|d_0\sqrt{5}(d^+d^+)_0|P-1, P-1, {}^{\Lambda}_{\Lambda\Lambda}\rangle\frac{1}{\sqrt{2(2P+3)}}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{2P+3}}\langle PP^{\Lambda}_{\Lambda\Lambda}|d_0^+|P-1, P-1, {}^{\Lambda}_{\Lambda\Lambda}\rangle$$

因此,用 $f(P, \Lambda)$ 代表 $\langle P+1, P+1, {}^{\Lambda}_{\Lambda\Lambda}|d_0^+|PP^{\Lambda}_{\Lambda\Lambda}\rangle^2$, 则(3.8)式给出 $f(P, \Lambda)$ 关于 P 的递推关系:

$$f(P, \Lambda) - \frac{2P+1}{2P+3}f(P-1, \Lambda) = 1$$

引用初始条件 $f(2\Lambda, \Lambda) = 1$ 可求得

$$f(P, \Lambda) = (P-2\Lambda+1)(P+2\Lambda+3)/(2P+3)$$

适当规定不同 P 值的基本基矢的相角关系可使 $\langle P+1, P+1, {}^{\Lambda}_{\Lambda\Lambda}|d_0^+|PP^{\Lambda}_{\Lambda\Lambda}\rangle>0$, 这时有

$$\langle P+1, P+1, {}^{\Lambda}_{\Lambda\Lambda}|a_0^+|PP^{\Lambda}_{\Lambda\Lambda}\rangle = \sqrt{\frac{(P-2\Lambda+1)(P+2\Lambda+3)}{2P+3}} \tag{3.9}$$

因此

$$a_0^+|PP^{\Lambda}_{\epsilon\kappa}\rangle = |P+1, P+1, {}^{\Lambda}_{\epsilon\kappa}\rangle\sqrt{\frac{(P-2\Lambda+1)(P+2\Lambda+3)}{2P+3}} \tag{3.10}$$

$$a_0|PP^{\Lambda}_{\epsilon\kappa}\rangle = |P-1, P-1, {}^{\Lambda}_{\epsilon\kappa}\rangle\sqrt{\frac{(P-2\Lambda)(P+2\Lambda+2)}{2P+1}} \tag{3.10'}$$

这里再提一下基矢的相角规定问题．由于极值基矢 $|2\Lambda, 2\Lambda, {}^{\Lambda}_{\Lambda\Lambda}\rangle$ 的相角已经选定，按照(3.3)、(3.3′)或(3.4)，$|2\Lambda, 2\Lambda, {}^{\Lambda}_{\epsilon\kappa}\rangle$ 的相角也被规定了，于是按照(3.10)或(3.10′)，任何基本基矢的相角都被规定了．(3.2)式进一步表明，任何基矢也都如此．

从 P 的最小值 2Λ 开始，按(3.10)式递推 $(P-2\Lambda)$ 步，最后得到 $C(P, \Lambda)$ 的表达式如下：

$$C(P, \Lambda) = \sqrt{\frac{(2P+1)!(2\Lambda+1)!}{(2)^{P-2\Lambda-1}P!(P-2\Lambda)!(P+2+2\Lambda)!}} \tag{3.11}$$

这样就完全确定了基本基矢的无迹算符表达式．

利用(3.5)式可得出：

$$\langle P+k_0, P+k_0, {}^{\Lambda}_{\epsilon\kappa}|(a_0^+)^{k_0}|PP^{\Lambda}_{\epsilon\kappa}\rangle = \frac{C(P, \Lambda)}{C(P+k_0, \Lambda)} \tag{3.5'}$$

因此

$$(a_0^+)^{k_0}|PP^{\Lambda}_{\epsilon\kappa}\rangle = |P+k_0, P+k_0, {}^{\Lambda}_{\epsilon\kappa}\rangle\frac{C(P, \Lambda)}{C(P+k_0, \Lambda)} \tag{3.12}$$

$$(a_0)^{k_0}|P+k_0, P+k_0, {}^{\Lambda}_{\epsilon\kappa}\rangle = |PP^{\Lambda}_{\epsilon\kappa}\rangle\frac{C(P, \Lambda)}{C(P+k_0, \Lambda)} \tag{3.13}$$

应当注意，虽然一个 $n=p$ 的态矢量总是可以用 a_μ^+ 算符(及真空态 $|0\rangle$)表示出来，但方法不是唯一的，只有找到结构简单的表达式才能发挥重要作用．以基矢 $|PP^{\Lambda}_{\epsilon\kappa}\rangle$ 为例，按 (n_μ) 表象的基矢展开有

$$|PP^{\Lambda}_{\epsilon\kappa}\rangle = \sum_{(n_\mu)}\prod_\mu \frac{(d_\mu^+)^{n_\mu}|0\rangle}{\sqrt{n_\mu!}}\langle n_\mu|PP^{\Lambda}_{\epsilon\kappa}\rangle \tag{3.14}$$

由于它本来是没有配对玻色子的基矢，把其中的 d_μ^+ 换为 a_μ^+ 不会引起什么变化，因此

$$|PP^{\Lambda}_{\epsilon\kappa}\rangle = \sum_{(n_\mu)}\prod_\mu \frac{(a_\mu^+)^{n_\mu}|0\rangle}{\sqrt{n_\mu!}}\langle n_\mu|PP^{\Lambda}_{\epsilon\kappa}\rangle \tag{3.15}$$

另一方面，根据(3.5)以及 $|2\Lambda, 2\Lambda, {}^{\Lambda}_{\epsilon\kappa}\rangle$ 的如下表达式：

$$|2\Lambda, 2\Lambda, {}^{\Lambda}_{\epsilon\kappa}\rangle = \varphi(\Lambda, \epsilon, \kappa)\sum_s \frac{(d_{-2}^+)^s(d_{-1}^+)^{\Lambda-\epsilon-s}(d_1^+)^{\Lambda-\kappa-s}(d_2^+)^{\epsilon+\kappa+s}|0\rangle}{s!(\Lambda-\epsilon-s)!(\Lambda-\kappa-s)!(\epsilon+\kappa+s)!} \tag{3.16}$$

有

$$|PP^{\Lambda}_{\epsilon\kappa}\rangle = \varphi(\Lambda, \epsilon, \kappa)C(P, \Lambda) \cdot \sum_s \frac{(a_{-2}^+)^s(a_{-1}^+)^{\Lambda-\epsilon-s}(a_0^+)^{P-2\Lambda}(a_1^+)^{\Lambda-\kappa-s}(a_2^+)^{\epsilon+\kappa+s}|0\rangle}{s!(\Lambda-\epsilon-s)!(\Lambda-\kappa-s)!(\epsilon+\kappa+s)!} \tag{3.17}$$

其中

$$\varphi(\Lambda, \varepsilon, \kappa)=\sqrt{\frac{(\Lambda+\varepsilon)!(\Lambda-\varepsilon)!(\Lambda+\kappa)!(\Lambda-\kappa)!}{(2\Lambda)!}} \tag{3.18}$$

显然,(3.17)的结构与(3.15)是极不相同的. (3.15)允许把其中的 a_μ^+ 换成 d_μ^+, 而(3.17)除了 $P=2\Lambda$ 的情形是不允许这样做的. 实际上,如果把 $\langle n_\mu|PP^\Lambda_{\varepsilon\kappa}\rangle$ 的表达式写出来,就会看到(3.15)的结构比(3.17)复杂. 因此, 有必要声明一下, 在说到 $|PP^\Lambda_{\varepsilon\kappa}\rangle$ 的 a_μ^+ 形式时,我们指的是(3.5)式,也即(3.17)式.

四、基本矩阵元

在计算 d_μ^+ 或 d_μ 的矩阵元时,基矢中描写配对玻色子的部分比较容易处理,因此最终可归结为计算如下的基本矩阵元:

$$\langle P+1, P+1, {}^{\Lambda'}_{\varepsilon'\kappa'}|d_\mu^+|PP^\Lambda_{\varepsilon\kappa}\rangle$$

$\mu=0$ 的情形已在前节求出,即

$$\langle P+1, P+1, {}^{\Lambda'}_{\varepsilon'\kappa'}|d_0^+|PP^\Lambda_{\varepsilon\kappa}\rangle=\langle P+1, P+1, {}^{\Lambda'}_{\varepsilon'\kappa'}|a_0^+|PP^\Lambda_{\varepsilon\kappa}\rangle$$
$$=\sqrt{\frac{(P-2\Lambda+1)(P+2\Lambda+3)}{(2p+3)}}\,\delta_{\Lambda\Lambda'}\delta_{\varepsilon\varepsilon'}\delta_{\kappa\kappa'} \tag{4.1}$$

$\mu\neq 0$ 的 4 个 d_μ^+ 组成张量 $\{D_{rs}\}$, 在基本基矢间的矩阵元也是等于无迹算符 $\{A_{rs}\}$ 的相应矩阵元:

$$\langle P+1, P+1, {}^{\Lambda'}_{\varepsilon'\kappa'}|D_{rs}|PP^\Lambda_{\varepsilon\kappa}\rangle=\langle P+1, P+1, {}^{\Lambda'}_{\varepsilon'\kappa'}|A_{rs}|PP^\Lambda_{\varepsilon\kappa}\rangle \tag{4.2}$$

利用(3.5)及(3.13),注意 A_{rs} 与 a_0^+ 对易,得:

$$\langle P+1, P+1, {}^{\Lambda'}_{\varepsilon'\kappa'}|A_{rs}|PP^\Lambda_{\varepsilon\kappa}\rangle$$
$$=\frac{C(2\Lambda+1, \Lambda')C(P, \Lambda)}{C(P+1, \Lambda')}\langle 2\Lambda+1, 2\Lambda+1, {}^{\Lambda'}_{\varepsilon'\kappa'}|A_{rs}|2\Lambda, 2\Lambda, {}^{\Lambda}_{\varepsilon\kappa}\rangle$$
$$=\frac{C(2\Lambda+1, \Lambda')C(P, \Lambda)}{C(P+1, \Lambda')}\langle 2\Lambda+1, 2\Lambda+1, {}^{\Lambda'}_{\varepsilon'\kappa'}|D_{rs}|2\Lambda, 2\Lambda, {}^{\Lambda}_{\varepsilon\kappa}\rangle \tag{4.3}$$

Λ' 只取 $\Lambda\pm\frac{1}{2}$ 故

$$\langle 2\Lambda+1, 2\Lambda+1, {}^{\Lambda'}_{\varepsilon'\kappa'}|D_{rs}|2\Lambda, 2\Lambda, {}^{\Lambda}_{\varepsilon\kappa}\rangle$$
$$=\delta_{\Lambda+\frac{1}{2},\Lambda'}\langle 2\Lambda+1, 2\Lambda+1, {}^{\Lambda+\frac{1}{2}}_{\varepsilon'\kappa'}|D_{rs}|2\Lambda, 2\Lambda, {}^{\Lambda}_{\varepsilon\kappa}\rangle$$
$$+\delta_{\Lambda-\frac{1}{2},\Lambda'}\langle 2\Lambda+1, 2\Lambda+1, {}^{\Lambda-\frac{1}{2}}_{\varepsilon'\kappa'}|D_{rs}|2\Lambda, 2\Lambda, {}^{\Lambda}_{\varepsilon\kappa}\rangle$$

在上节已指出, Λ 达到最大值的基本基矢不含算符 d_0^+, 因此由(3.5)有

$$\langle 2\Lambda+1, 2\Lambda+1, {}^{\Lambda-\frac{1}{2}}_{\varepsilon'\kappa'}|D_{rs}|2\Lambda, 2\Lambda, {}^{\Lambda}_{\varepsilon\kappa}\rangle$$
$$=\sqrt{\frac{4\Lambda+3}{8\Lambda+4}}\langle 2\Lambda-1, 2\Lambda-1, {}^{\Lambda-\frac{1}{2}}_{\varepsilon'\kappa'}|a_0^2D_{rs}|2\Lambda, 2\Lambda, {}^{\Lambda}_{\varepsilon\kappa}\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{4\Lambda+3}{8\Lambda+4}} \left\langle 2\Lambda-1, 2\Lambda-1, {}^{\Lambda-\frac{1}{2}}_{\epsilon'\kappa'} \right| d_0 \left\{ -d_0^+ \frac{1}{2\hat{n}+5} (\hat{d}\hat{d})_0 \sqrt{5} \right\}$$

$$\cdot D_{rs} \left| 2\Lambda, 2\Lambda, {}^{\Lambda}_{\epsilon\kappa} \right\rangle$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{(2\Lambda+1)(4\Lambda+3)}} \langle 2\Lambda-1, 2\Lambda-1, {}^{\Lambda-\frac{1}{2}}_{\epsilon'\kappa'} | \hat{D}_{rs} | 2\Lambda, 2\Lambda, {}^{\Lambda}_{\epsilon\kappa} \rangle \tag{4.4}$$

按照 Wigner-Eckart 定理把矩阵元中包含 $\epsilon\kappa\epsilon'\kappa'$ 的因子分离出来有:

$$\langle P+1, P+1, {}^{\Lambda'}_{\epsilon'\kappa'} | A_{rs} | PP^{\Lambda}_{\epsilon\kappa} \rangle$$

$$= \frac{1}{2\Lambda'+1} (P+1, P+1, \Lambda' \| A \| PP\Lambda) \left\langle \Lambda\epsilon \frac{1}{2} r \middle| \Lambda'\epsilon' \right\rangle \left\langle \Lambda\kappa \frac{1}{2} s \middle| \Lambda'\kappa' \right\rangle \tag{4.5}$$

于是(4.3)及(4.4)表明

$$(P+1, P+1, \Lambda' \| A \| PP\Lambda)$$

$$= \delta_{\Lambda+\frac{1}{2},\Lambda'} \left(2\Lambda+1, 2\Lambda+1, \Lambda+\frac{1}{2} \| D \| 2\Lambda, 2\Lambda, \Lambda \right)$$

$$\cdot \frac{C\left(2\Lambda+1, \Lambda+\frac{1}{2}\right) C(P, \Lambda)}{C\left(P+1, \Lambda+\frac{1}{2}\right)}$$

$$- \delta_{\Lambda-\frac{1}{2},\Lambda'} \frac{1}{\sqrt{(2\Lambda+1)(4\Lambda+3)}} \left(2\Lambda-1, 2\Lambda-1, \Lambda-\frac{1}{2} \| \hat{D} \| 2\Lambda, 2\Lambda, \Lambda \right)$$

$$\cdot \frac{C\left(2\Lambda+1, \Lambda-\frac{1}{2}\right) C(P, \Lambda)}{C\left(P+1, \Lambda-\frac{1}{2}\right)} \tag{4.6}$$

这样就可以借助于极值基矢来达到目的. 最后得到:

$$(P+1, P+1, \Lambda' \| D \| PP\Lambda) = (P+1, P+1, \Lambda' \| A \| PP\Lambda)$$

$$= \delta_{\Lambda+\frac{1}{2},\Lambda'} \sqrt{\frac{(\Lambda+1)(2\Lambda+1)(P+2\Lambda+3)(P+2\Lambda+4)}{(2P+3)}}$$

$$- \delta_{\Lambda-\frac{1}{2},\Lambda'} \sqrt{\frac{\Lambda(2\Lambda+1)(P-2\Lambda+1)(P-2\Lambda+2)}{(2P+3)}} \tag{4.7}$$

五、物理基矢在 $SU_2 \otimes SU_2$ 表象的一种明显表达式

我们用 $|nP(\alpha)LM\rangle$ 代表物理基矢,其中 n、P 与前面一样分别为总玻色子数及未配对玻色子数,LM 代表角动量及投影,α 是未经正交化的流动指标. 在物理基矢中,角动量投影的改变是比较简单的事情,可以指定它等于 L 或 0,这里取 $M = L$. 另外,物理基矢中描写配对玻色子的部分与 $SU_2 \otimes SU_2$ 基矢是一样的,因此只需要确定基本基矢 $|PP(\alpha)LL\rangle$ 按 $|PP^{\Lambda}_{\epsilon\kappa}\rangle$ 的展开式:

$$|PP(\alpha)LL\rangle = \sum_{\Lambda\epsilon\kappa} |PP^{\Lambda}_{\epsilon\kappa}\rangle \langle PP^{\Lambda}_{\epsilon\kappa} | PP(\alpha)LL\rangle \tag{5.1}$$

角动量算符的第三分量 L_0 可用 e_0 与 κ_0 表示为

$$L_0 = 3e_0 + \kappa_0 \tag{5.2}$$

因此，L_0 在 $SU_2\otimes SU_2$ 表象中也是对角的，(5.1)中对 $e\kappa$ 的求和受到如下的限制：

$$3e + \kappa = L \tag{5.3}$$

如引言中指出的，这里将限于解决一个特殊问题，即借助 $\langle n_\mu|PP(\alpha)LL\rangle$ 的表达式和比较简单的方法求出 $\langle PP^{\Lambda}_{e\kappa}|PP(\alpha)LL\rangle$. 如果采用通常的表象变换公式(1.1)，那就有：

$$\langle PP^{\Lambda}_{e\kappa}|PP(\alpha)LL\rangle = \sum_{n_{-2}n_{-1}n_0n_1n_2}\langle PP^{\Lambda}_{e\kappa}|n_\mu\rangle\langle n_\mu|PP(\alpha)LL\rangle \tag{5.4}$$

其中 $|n_\mu\rangle$ 是 (n_μ) 表象的基矢：

$$|n_{-2}n_{-1}n_0n_1n_2\rangle = \frac{(d^+_{-2})^{n_{-2}}(d^+_{-1})^{n_{-1}}(d^+_0)^{n_0}(d^+_1)^{n_1}(d^+_2)^{n_2}|0\rangle}{\sqrt{n_{-2}!n_{-1}!n_0!n_1!n_2!}} \tag{5.5}$$

在引言中也说明了这种做法的缺点，即在求无配对玻色子态的内积的明显公式时，用了允许配对的中间态. 假定在 $\sum_\mu n_\mu = P$ 的条件下构成了未配对玻色子数小于 P 的非零态矢量 $\sum_{(n_\mu)}|n_\mu\rangle f(n_\mu)$，于是

$$\sum_{n_{-2}n_{-1}n_0n_1n_2} f(n_\mu)\langle n_\mu|ppO_3\rangle = 0 \tag{5.6}$$

$$\sum_{n_{-2}n_{-1}n_0n_1n_2}\langle PPSU_2\otimes SU_2|n_\mu\rangle f(n_\mu) = 0 \tag{5.7}$$

这说明可把 $f(n_\mu)$ 加到(5.4)式右方的 $\langle PP^{\Lambda}_{e\kappa}|n_\mu\rangle$ 中，或者加到 $\langle n_\mu|PP(\alpha)LL\rangle$ 中，从而改变这个公式的结构. 下面要做的就是利用第三节求出的 d^+_μ 形式的 $|PPSU_2\otimes SU_2\rangle$ 基矢，找出一个简单的量来代替(5.4)式中的 $\langle PP^{\Lambda}_{e\kappa}|n_\mu\rangle$.

根据(3.5)式有：

$$\langle PP^{\Lambda}_{e\kappa}|PP(\alpha)LL\rangle = C(P,\Lambda)\langle 0|2\Lambda, 2\Lambda, {}^{\Lambda}_{e\kappa}|(a_0)^{P-2\Lambda}|PP(\alpha)LL\rangle \tag{5.8}$$

用 a_μ 构成的算符 $F(a)$ 作用于无配对玻色子的态矢量时(刃矢)，显然等于以 $F(d)$ 作用，故(5.8)给出：

$$\langle PP^{\Lambda}_{e\kappa}|PP(\alpha)LL\rangle = C(P,\Lambda)\langle 2\Lambda, 2\Lambda, {}^{\Lambda}_{e\kappa}|(d_0)^{P-2\Lambda}|PP(\alpha)LL\rangle \tag{5.9}$$

由(3.16)有

$$C(P,\Lambda)(d^+_0)^{P-2\Lambda}|2\Lambda, 2\Lambda, {}^{\Lambda}_{e\kappa}\rangle = \varphi(\Lambda, e, \kappa)C(P,\Lambda)$$

$$\cdot\sum_s\frac{(d^+_{-2})^s(d^+_{-1})^{\Lambda-e-s}(d^+_0)^{P-2\Lambda}(d^+_1)^{\Lambda-\kappa-s}(d^+_2)^{e+\kappa+s}|0\rangle}{s!(\Lambda-e-s)!(\Lambda-\kappa-s)!(e+\kappa+s)!} \tag{5.10}$$

把(5.10)代到(5.9)中得到：

$$\langle PP^{\Lambda}_{e\kappa}|PP(\alpha)LL\rangle = \sqrt{\frac{2\Lambda+1}{(2)^{P-2\Lambda-1}}}$$

$$\cdot\sqrt{\frac{(2P+1)!(\Lambda+e)!(\Lambda-e)!(\Lambda+\kappa)!(\Lambda-\kappa)!}{p!(p+2\Lambda+2)!}}$$

$$\cdot \delta(3\epsilon + \kappa - L)$$

$$\cdot \sum_s \frac{\langle s, \Lambda - \epsilon - s, P - 2\Lambda, \Lambda - \kappa - s, \epsilon + \kappa + s | PP(\alpha)LL\rangle}{\sqrt{s!(\Lambda - \epsilon - s)!(\Lambda - \kappa - s)!(\epsilon + \kappa + s)!}} \tag{5.11}$$

这就是我们所需要的结果. 其中最右端分子上的量,是 n_μ 取如下值时的 $\langle n_\mu|PP(\alpha)LL\rangle$:

$$n_{-2} = s \tag{5.12}$$

$$n_{-1} = \Lambda - \epsilon - s \tag{5.13}$$

$$n_0 = P - 2\Lambda \tag{5.14}$$

$$n_1 = \Lambda - \kappa - s \tag{5.15}$$

$$n_2 = \epsilon + \kappa + s \tag{5.16}$$

关于 $\langle n_\mu|PP(\alpha)LL\rangle$, 可以直接采用[6]中已经给出的公式. 对于[5]中的"粒子-空穴"基矢,把它的 d_μ^+ 形式改写到 (n_μ) 表象,也可求得相应的 $\langle n_\mu|PP(\alpha)LL\rangle$.

(5.11)中代表条件 (5.3) 的因子 $\delta(3\epsilon + \kappa - L)$ 也可以不写, 因为它已经包含在 $\langle n_\mu|PP(\alpha)LL\rangle$ 的一个相应的因子 $\delta\left(\sum_\mu \mu n_\mu - L\right)$ 和(5.12)—(5.16)中.

最后把本节方法的要点小结一下. 借助于 $|PP^\Lambda_{\epsilon\kappa}\rangle$ 的特殊表达式(3.5), 我们把 $|PP^\Lambda_{\epsilon\kappa}\rangle$ 与 $|PP(\alpha)LL\rangle$ 的内积变成了(5.10)中比较简单的态矢量与 $|PP(\alpha)LL\rangle$ 的内积,最后得到的(5.11)相当于下式的化简:

$$\begin{aligned}&\langle PP^\Lambda_{\epsilon\kappa}|PP(\alpha)LL\rangle\\ &\quad = C(P, \Lambda) \sum_{(n_\mu)} \langle 2\Lambda, 2\Lambda, {}^{\Lambda}_{\epsilon\kappa}|(d_0)^{P-2\Lambda}|n_\mu\rangle\langle n_\mu|PP(\alpha)LL\rangle\end{aligned} \tag{5.17}$$

这正好等于在(5.4)中把 $\langle PP^\Lambda_{\epsilon\kappa}|n_\mu\rangle$ 换成比它简单的量 $C(P, \Lambda)\langle 2\Lambda, 2\Lambda, {}^{\Lambda}_{\epsilon\kappa}|(d_0)^{P-2\Lambda}|n_\mu\rangle$, 因此公式(5.11)的结构比(5.4)简单.

六、结 语

本文分析了 (d_μ^+, d_ν) 及 (a_μ^+, a_ν) 算符的 $SU_2\otimes SU_2$ 张量性质,然后用 a_μ^+ 构成了 $|PPSU_2\otimes SU_2\rangle$ 基矢的一种简单公式,阐明了用这种公式求基本矩阵元的方法, 并且借助它求出了 $|PPSU_2\otimes SU_2\rangle$ 基矢与 $|PPO_3\rangle$ 基矢之间的内积公式 (5.11). (5.11) 可以认为是在(1.1)中把 $\langle PPSU_2\otimes SU_2|n_\mu\rangle$ 换为一个较简单的量而得到的. 按照(5.11)及(5.1)确定 $|PP(\alpha)LL\rangle$ 之后,再利用配对算符改变配对粒子的数目,就可以表达出 $|nP(\alpha)LL\rangle$. 在实际应用中要注意进行正交归一化.

看来,公式(5.11)特别适用于求[6]中的 $|PPO_3\rangle$ 基矢在 $SU_2\otimes SU_2$ 表象的表示. 对于"粒子-空穴"基矢,根据[5]中的结果求出 $\langle n_\mu|PPO_3\rangle$ 后也可采用公式(5.11).

刘庸同志曾帮助核对本文的一部分公式,特此致谢.

参 考 文 献

[1] D. R. Bès, *Nucl. Phys.*, **10** (1959), 373.
[2] E. Chaon, M. Moshinsky and R. T. Sharp, *J. Math. Phys.*, **17** (1976), 668.

[3] N. Y. Vilenkin, Special Functions and Theory of Groups Representations (A. M. S. Tranl. Providence, R. I., 1968).
[4] M. A. Lohe, "The Development of the Boson Calculus for the Orthogonal and Symplectic Groups" Thesis, University of Adelaide (1974).
[5] E. Chaón and M. Moshinsky, *J. Math. Phys.*, 18(1977), 870.
[6] S. Szpikowski and A. Góźdź, *Nucl. Phys.*, **A340** (1980), 76.
[7] K. T. Hecht, Nucl. Phys., **63** (1965), 117.
[8] 孙洪洲, 高能物理与核物理, 4(1980), 478.

THE $SU_2\otimes SU_2$ BASIS AND THE PHYSICAL BASES FOR THE STATE VECTORS OF d-BOSON SYSTEMS AND THE TRACELESS BOSON OPERATORS (I)

YANG ZE-SEN (TSE-SEN YANG)
(*Department of Physics, Peking University*)

ABSTRACT

The group chain $U_5\supset O_5\supset SU_2\supset SU_2$ used by K. T. Hecht (1965) and by the others provides an important representation for expressing the physical basis of d-boson systems. However the methods which have been introduced for this $SU_2\otimes SU_2$ representation to construct a physical basis is poorer in comparison with those for the other representations. In view of this we try to find appropriate methods to obtain the $SU_2\otimes SU_2$-representation wave functions of the existing physical bases constructed by Chacón et al. and by Szpikowski et al.,

In the present paper we analyse the $SU_2\otimes SU_2$ tensor properties of the boson operators and Vilenkin's traceless boson operators and express succinctly the elementary vectors of the $SU_2\otimes SU_2$ basis, the $|PP\ SU_2\otimes SU_2\rangle$ vectors, in terms of the traceless operators. With the help of this form of the $|PP\ SU_2\ SU_2\rangle$ vectors we derive a simple formula for obtaining the $SU_2\otimes SU_2$ -representation wave functions of a physical basis from its (n_μ)-representation wave functions. Thus the problem mentioned above is partly solved. The other parts of the solution of the problem will be found in a coming paper.