

RFQ 加速器中束流横向运动研究

罗紫华 罗应雄 王林林
(中国科学院高能物理研究所)

摘 要

本文讨论 RFQ 加速器中的束流横向运动, 提出束流横向接受度参数计算的一种方法, 并对空间电荷效应及 RFQDYNA 程序作一简介。

一、引 言

RFQ 加速器是高频四极场加速器的简称, 它是一种新型低能加速结构, 具有注入能量低、束流性能好、发射度增长小、俘获效率高、聚焦作用强等特点。它是漂移管型直线加速器和重离子加速器的一种理想的注入器, 并将在低能核物理研究、中子源、等离子体加热和诊断、核聚变研究等方面得到应用, 目前国外许多实验室正着手研制, 是一种很有发展前途的加速器。本文拟从束流横向运动方面作些深入研究。

二、RFQ 腔内电场的表达式

如果在圆柱型高频腔内, 沿方位角均匀安放四个极尖随 z 轴变化的电极(见图 1), 并且相邻电极极尖的最大和最小半径交替排列。若在腔内激发起类 TE_{210} 振荡模式, 电场应同时具有横向和纵向分量。横向分量中的主要成分是四极场分量, 用于交变聚焦。纵

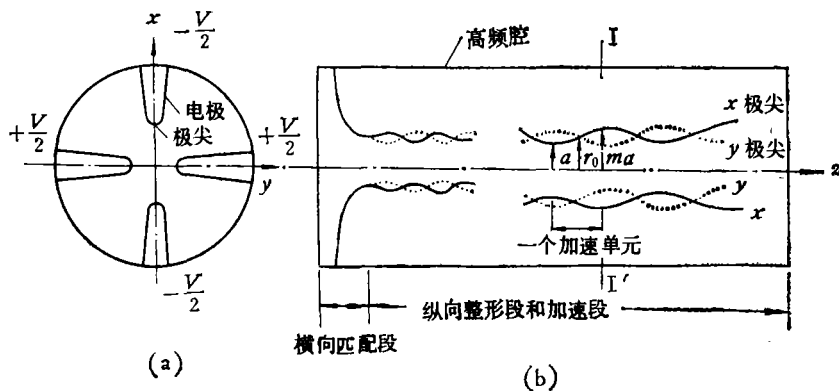


图 1 RFQ 加速器电极安排示意图
(a) 电极横向排列 (b) 极尖沿 z 向变化示意

向分量用于加速粒子。

在圆柱坐标系 (r, ϕ, z) 上 RFQ 腔内电场表达式^[1]为

$$E_r = - \left[\frac{UV}{a^2} r \cos 2\phi + \frac{KAV}{2} I_1(Kr) \cos Kz \right] \sin(\omega t + \varphi) \quad (1)$$

$$E_\phi = \frac{UV}{a^2} r \sin 2\phi \cdot \sin(\omega t + \varphi) \quad (2)$$

$$E_z = \frac{KAV}{2} I_0(Kr) \sin(Kz) \cdot \sin(\omega t + \varphi) \quad (3)$$

其中

$$A = (m^2 - 1) / [m^2 I_0(Ka) + I_0(mKa)] \quad (4)$$

$$U = 1 - AI_0(Ka) \quad (5)$$

$$K = 2\pi / \beta_s \lambda \quad (6)$$

V 为相邻电极的电位差; a 及 ma 分别为一个加速单元中极尖到轴线的最小和最大距离; m 为极尖调变参数; U 和 A 分别为横向聚焦作用和纵向加速作用的参数; I_0 和 I_1 分别为零阶和一阶虚宗量贝塞尔函数; $\beta_s = v_s/c$ 是粒子的相对速度; λ 为高频波长。

三、横向运动方程

假设略去轴上和非轴上粒子能量间的差别, 将电场驻波表达式 (1) 分解成两个行波, 并令 $Kz = \omega t$ (其中 t 为时刻, 在粒子注入时刻对应 $t = 0$; z 为粒子离注入点的纵向距离; ω 为高频圆频率; φ 为注入时刻的高频相位), 略去二级小项后得到粒子横向运动方程为

$$\frac{1}{\beta_s \gamma_s} \frac{d}{dz} \left(\beta_s \gamma_s \frac{dx}{dz} \right) + h(z)x = 0 \quad (7)$$

记

$$h(z) = \frac{B}{4L_c^2} \sin(Kz + \varphi) + \frac{\Delta}{4L_c^2} \quad (8)$$

$$B = \frac{qUV\lambda^2}{m_0 c^2 a^2 \gamma_s} \quad (9)$$

$$\Delta = \frac{q\pi^2 AV \sin \varphi}{2m_0 c^2 \beta_s^2 \gamma_s} \quad (10)$$

$h(z)$ 包含两项: 第一项为交变聚焦作用; 第二项为恒定的散焦或聚焦作用, 它与 φ 及加速单元参数有关。 B 和 Δ 分别为无量纲交变聚焦参数和恒定散焦或聚焦作用参数。

$L_c \simeq \frac{1}{2} \beta_s \lambda$ 为加速单元长度, $m_0 c^2$ 为粒子静止能量, q 为粒子电荷数, $\gamma_s = (1 - \beta_s^2)^{-\frac{1}{2}}$, 脚标“ s ”代表同步粒子的值。

(7) 式属含有阻尼项 $\frac{dx}{dz}$ 的二阶微分方程, 在 $(x, \frac{dx}{dz})$ 相平面上粒子所占相面积不守恒。为了消去阻尼项, 需作如下变换。令

$$X = (\beta, \gamma, z)^{1/2} x \tag{11}$$

将其代入(7)式,考虑到 β, γ, z 随 x 的变化较小,故可略去含有 $\left[\frac{d}{dz}(\beta, \gamma, z)\right]^2$ 及 $\left[\frac{d^2}{dz^2}(\beta, \gamma, z)\right]$ 的高阶项,得到

$$\frac{d^2 X}{dz^2} + h(z)X = 0 \tag{12}$$

$h(z)$ 与 φ 有关,图2(a)代表两种不同注入相位时的 $h(z)$ 分布,其中①②分别对应的注入相位 $\varphi = \varphi_s$ 和 $\varphi = \varphi_s + 45^\circ$ 。曲线①和②的差别是: 交变聚焦作用部分只错开某一相位; 恒定散焦或聚焦作用部分的差别取决于 $\sin \varphi$ 值。

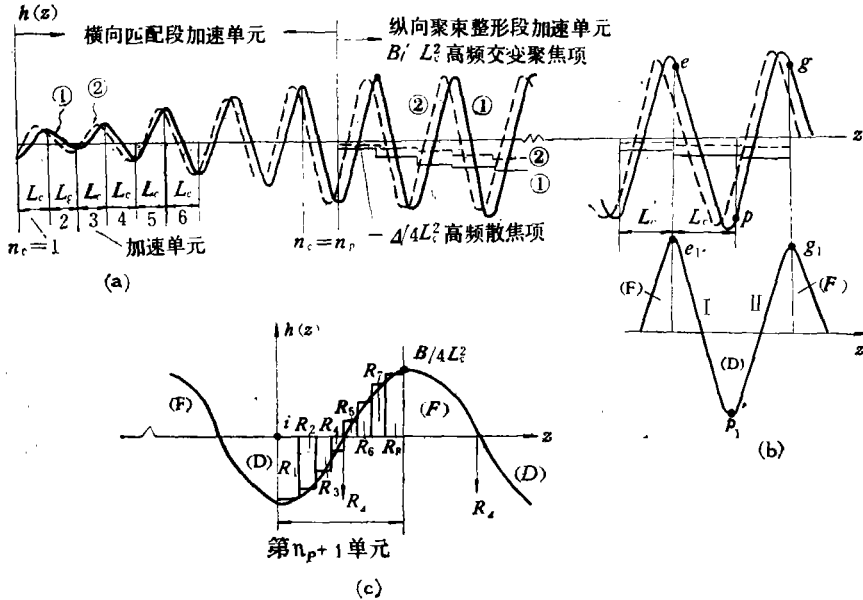


图2 RFQ加速器高频场横向作用 $h(z)$ 分布示意图和加速单元分段图

- (a) 高频场横向作用系数 $h(z)$ 分布示意图
- (b) 高频交变聚焦项的等效分布
- (c) 加速单元分段图

先讨论同步相位注入情况。记此时的 $h(z)$ 为 $h_{\varphi_s}(z)$ 。为便于计算,对 $h_{\varphi_s}(z)$ 作如下简化: 第一,因RFQ加速器的 $|\varphi_s|$ 随加速单元从 90° 慢慢变小,故一个加速单元对应的交变聚焦作用波形应稍大于半个余弦波,现近似取作半个余弦波。第二,取所有单元对应的 $h_{\varphi_s}(z)$ 分布形态都具有图2(b)中的I($e_1 p_1$ 段)或II($p_1 g_1$ 段)的形状。显然,从一个加速单元看,这似乎不大合理,特别是对越往后面的加速单元。它将导致实际的 $h(z)$ 与等效的 $h(z)$ (它们分别见图2(a)的 $e_1 p_1$ 段和图2(b)的 $e_1 p_1 g_1$ 段)有较大的差别。但从一个聚焦周期(包含二个加速单元)看,那样作是合理的,因为等效前后具有相同的聚焦作用,从而维持相同的横向运动相移量。第三,将每个单元的交变聚焦作用的半个余弦波用等距的八区段阶梯方波来代替,取每段阶梯方波面积与余弦曲线下对应的面积相等。从而,得到八区段上的转换矩阵 R_1, R_2, \dots, R_8 ,其普遍形式为

$$R_F = \begin{bmatrix} \cos(kl) & k \sin(kl) \\ -\frac{1}{k} \sin(kl) & \cos(kl) \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$R_D = \begin{bmatrix} \text{ch}(kl) & k \text{sh}(kl) \\ \frac{1}{k} \text{sh}(kl) & \text{ch}(kl) \end{bmatrix},$$

其中

$$\left. \begin{aligned} l &= L_c/8, \quad k = k_1, k_2, \dots, k_8 \\ k_1 &= k_8 = \sqrt{0.9745B/2L_c} \\ k_2 &= k_7 = \sqrt{0.8261B/2L_c} \\ k_3 &= k_6 = \sqrt{0.5520B/2L_c} \\ k_4 &= k_5 = \sqrt{0.1938B/2L_c} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

聚焦段与散焦段的矩阵分别用脚标“F”“D”来区别。在图 2(c) 情况下, R_1, R_2, R_3, R_4 对应 R_F ; R_5, R_6, R_7, R_8 对应 R_D 。第四, $h_{\varphi_i}(z)$ 中的恒定高频散焦作用取薄透镜近似, 其转换矩阵为

$$R_{\Delta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\Delta/4L_c & 1 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

一旦 B, Δ, L_c 参数被确定, 每个加速单元上对应的九个转换矩阵便是已知的。

四、横向接受度椭圆参数及束流包络

确定横向接受度椭圆参数的目的, 是对束流横向接受度 (特别是在 RFQ 加速器的入口处) 提出要求, 以便实现束流匹配。

从束流运动特性看, RFQ 可分成三段, 即开头的横向匹配段, 中间的纵向整形聚束段, 最后的加速段。除中间那段可看成准周期系统外, 其余两段都属非周期系统。这种由准周期和非周期所组成的特殊系统里, 其接受度椭圆参数可以这样求出, 即先求出准周期系统某一特定点“i”处的接受度椭圆参数 $\alpha_{xi}, \beta_{xi}, \gamma_{xi}$, 将其写成矩阵形式

$$\sigma_{xi} = e \begin{pmatrix} \beta_{xi} & -\alpha_{xi} \\ -\alpha_{xi} & \gamma_{xi} \end{pmatrix} \quad (16)$$

其中 e 为束流, 在 $(X, \frac{dx}{dz})$ 相平面上的发射度面积除以 π , 然后, 求出在系统任意“f”处 (它既可在周期系统内, 也可在非周期系统内) 和“i”处之间的转换矩阵 R_{if} , 则“f”处

上的接受度椭圆参数 $\sigma_{xf} = e \begin{pmatrix} \beta_{xf} & -\alpha_{xf} \\ -\alpha_{xf} & \gamma_{xf} \end{pmatrix}$ 应满足下列关系^[2]。

$$\sigma_{xf} = R_{if} \sigma_{xi} R_{if}^T \quad (17)$$

其中 R_{if} 为自“i”至“f”之间的转换矩阵。在 $h_{\varphi_i}(z)$ 已知情况下, 它就是上面提到的矩阵 R_F, R_D, R_{Δ} 按照一定规律的连乘。 R_{if}^T 为 R_{if} 的转置。

准周期系统中任意特定点“i”处接受度椭圆参数 $\alpha_{xi}, \beta_{xi}, \gamma_{xi}$ 为^[3]

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{X_i} &= (R_{X_{\pm 11}} - R_{X_{\pm 12}}) / 2 \sin \mu_X \\ \beta_{X_i} &= R_{X_{\pm 12}} / \sin \mu_X \\ \gamma_{X_i} &= (1 + \alpha_{X_i}^2) / \beta_{X_i} \\ \sin \mu_X &= \sqrt{1 - \left(\frac{R_{X_{\pm 11}} + R_{X_{\pm 22}}}{2} \right)^2} \\ R_{X_{\pm}} &= \begin{pmatrix} R_{X_{\pm 11}} & R_{X_{\pm 12}} \\ R_{X_{\pm 21}} & R_{X_{\pm 22}} \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

其中

μ_X 为在一个聚焦周期里横向振荡相移量, $R_{X_{\pm}}$ 为自“ i ”处算起的一个聚焦结构周期的转换矩阵. 当 $\varphi_i = -90^\circ$, 而且“ i ”选在第 $n_p + 1$ 单元起始点(见图 2(c))的特殊情况下

$$\begin{aligned} R_{X_{\pm}} &= \bar{R}_{X_{\mp}} R_{X_{\mp}} \\ R_{X_{\mp}} &= R_8 R_7 R_6 R_5 R_4 R_3 R_2 R_1, \\ \bar{R}_{X_{\mp}} &= R_1 R_2 R_3 R_4 R_5 R_6 R_7 R_8; \end{aligned}$$

其中

在匹配情况下, 任意“ f ”处的 x 方向束流包络值为

$$x_f = \sqrt{a \beta_{Xf} / (\beta_X \gamma_X)}_f \quad (19)$$

脚标“ f ”表示在“ f ”处的值; 在非匹配情况下的束流包络值也具有与 (19) 式相同形式. 不过, 这时应将 β_{Xf} 用束流发射度椭圆的对应一个参数代替.

对于任意注入相位 φ 的情况, $h_\varphi(z)$ 与 $h_{\varphi_0}(z)$ 不同, 意味着同一处在不同时刻的接受

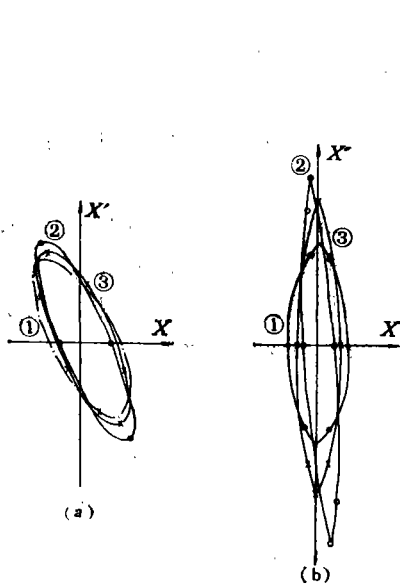


图3 同一处三种不同高频相位时横向接受度椭圆形状
 (a) 在 RFQ 加速器入口处
 (b) 在纵向聚束段入口处
 ① $\varphi = \varphi_0$
 ② $\varphi = \varphi_0 - 90^\circ$
 ③ $\varphi = \varphi_0 - 180^\circ$

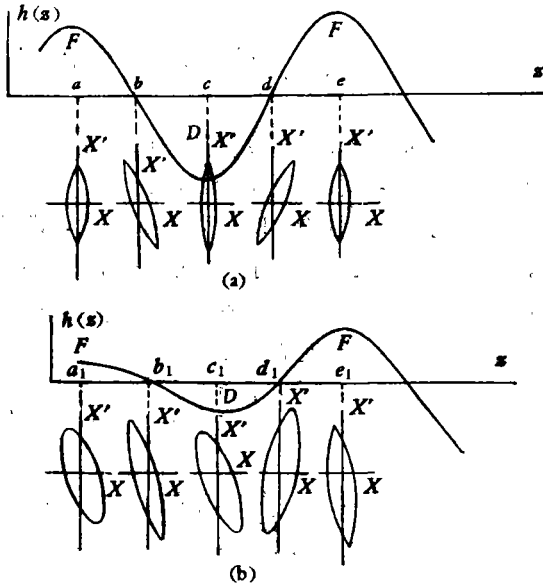


图4 不同位置上接受度椭圆变化
 (a) 周期聚焦系统接受度椭圆变化(同一时刻里)
 (b) 非周期聚焦系统接受度椭圆变化(同一时刻里)

度椭圆参数不同。任意 $h_{\varphi}(z)$ 所对应的接受度椭圆参数,原则上均可按上面提到的方法求得。但给定一种注入相位 φ 就得求一次,显得十分繁复,计算量也大。一种较简便的确定方法,是利用 $h_{\varphi_z}(z)$ 求得每一个加速单元不同位置 z 上的接受度椭圆参数,它们近似地代表了同一处不同时刻(因而也代表不同注入相位)的接受度椭圆参数。这样只需一次计算 $h_{\varphi_z}(z)$ 所对应的接受度椭圆参数就够了。计算量将大为减少。

y 方向的情况也可类似讨论,就不重复了。

表 1 是在两个加速单元上同步相位注入时的接受度椭圆参数。其中 $z_{始,中,末}$ 分别表示该加速单元始点、中点、末点位置上的值。

表 1 同步相位注入下的接受度椭圆参数

单元序号		α_x	β_x (米)	r_x (1/米)	α_y	β_y (米)	r_y (1/米)
$n_c = 1$	$z_{始}$	1.0796	0.08776	24.6767	0.8921	0.06868	26.145
	$z_{中}$	1.3902	0.07777	37.710	-0.043149	0.06631	15.1067
	$z_{末}$	0.89208	0.06868	26.145	0.74077	0.06444	24.032
$n_c = 11$	$z_{始}$	-0.022643	0.027758	36.0429	-0.03624	0.013193	75.893
	$z_{中}$	1.5093	0.019437	1.5093	-1.6162	0.020133	179.41
	$z_{末}$	-0.03624	0.013193	75.893	-0.037969	0.029364	34.1035

图 3 表示某一 RFQ 加速器入口处 ($n_c = 1$ 的 $z_{始}$) 及纵向整形聚束段入口处 ($n_c = 11$ 的 $z_{始}$) 三个不同时刻(即不同注入相位)的接受度椭圆形状。由图可见:在 RFQ 加速器入口处,横向接受度椭圆的形状和方位都与注入时刻几乎无关,有较大覆盖区。但在纵向整形聚束段入口处,其接受度椭圆的形状与注入时刻有较密切关系,覆盖区较小。这表明横向匹配段的存在可以保证不同时刻注入的束流都能达到较好的横向匹配。

横向接受度随时间变化的那种特性,可作如下初步分析:由于纵向整形聚束段内可看成聚焦强度较大的横向交变聚焦准周期系统,其不同位置上的接受度椭圆形状和方位作周期性变化(见图 4(a)),在聚焦段 F 和散焦段 D 的中心处为正椭圆,在别处为斜椭圆。将图 4(a) 中 a, b, c 三处同一时刻的接受度椭圆等效到 a 处不同时刻下的椭圆,就得到如图 3(b) 的图形;在横向匹配段内可看成聚焦强度较小而变化较快的非周期系统,其接受度椭圆形状和方位都呈非周期性变化,这时在 F 和 D 段的中心处的接受度就不一定是正椭圆。将图 4(b) 中 a_1, b_1, c_1 三处同一时刻的接受度椭圆等效到 a_1 处不同时刻下的椭圆,就得到如图 3(a) 的图形。

图 5 的 (a)、(b) 分别代表在同步相位注入下束流在匹配和非匹配状态下的部分横向包络。显然,匹配时的包络变化很有规律;非匹配时的包络变化则毫无规律。而且,非



图 5 束流横向包络随单元序号 n_c 变化

匹配的包络最大值总是大于匹配时的最大值。

五、空间电荷效应

RFQ加速器的束流横向尺寸较小,流强较高,空间电荷作用较强。假定束团是旋转椭球体,其横向半轴取每个单元所对应的匹配束包络平均值;纵向半轴由束流纵向运动决定。纵向运动计算表明,在整形聚束段入口至第一次聚相,束流从连续分布逐渐过渡到椭球体束团,这时束团的纵向半轴取每个加速单元上稳相区相宽 Φ 所对应的半长度,即为 $(\Phi/4\pi)\beta_s\lambda$;自第一次聚相后,因大部分粒子都集中在相宽为 $\pm|\varphi_s|$ 的区域内,这时束团纵向半轴取 $(|\varphi_s|/4\pi)\beta_s\lambda$ 。

已知束团几何尺寸,便求得空间电荷力在实验室坐标系上的表达式为

$$\left. \begin{aligned} F_{r,sc} &= \frac{q\rho M_r}{\epsilon_0} (1 - \beta_s^2) r_c \\ F_{z,sc} &= \frac{q\rho M_z}{\epsilon_0} z_c \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

这里

$$\rho = 3IT_r(1 - \beta_s^2)^{1/2}/4\pi a_0^2 c_0 \quad (21)$$

$$M_z = \begin{cases} \frac{1-d^2}{d^3} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1+d}{1-d} - d \right), & a_0 < c_0 \\ \frac{1+d_0^2}{d_0^3} (d_0 - \text{arc tg } d_0) & a_0 > c_0 \end{cases} \quad (22)$$

$$M_r = \frac{1}{2} (1 - M_z) \quad (23)$$

$$\left. \begin{aligned} d_0 &= \sqrt{\left(\frac{a_0}{c_0}\right)^2 - 1} \\ d &= \sqrt{1 - \left(\frac{a_0}{c_0}\right)^2} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

ρ 为实验室坐标系上的束团电荷密度; a_0 和 c_0 分别为质心坐标系上的束团横半轴和纵半轴(米); M_z 和 M_r 分别为质心系上的纵向和横向椭球体形状因子; I 为束流强度(安培); T_r 为高频周期(秒);真空介电常数 $\epsilon_0 = 8.86 \times 10^{-12}$ 库/伏·米; r_c 和 z_c 分别为离椭球束团中心的横向和纵向距离(米)。

把空间电荷力分别代入相应的运动方程便可研究空间电荷效应。空间电荷对横向运动的影响可采用薄透镜近似,那时横向方程形式与(7)式相同。不过,应将 $h(z)$ 中的 Δ 用 Δ_* 代替。即

$$\Delta_* = \Delta - [3L_s^2 T_r q I M_r / \pi \epsilon_0 a_0^2 c_0 m_0 c^2 \beta_s^2 \gamma_s^2] \quad (25)$$

当高频电场的横向聚焦力与空间电荷横向散焦力完全抵消时,将对应于横向极限束流。

由空间电荷下的纵向运动方程可得到空间电荷纵向作用因子为

$$\mu_{l,sc} = 90qI\beta_s^2\lambda^3 M_z \gamma_s / AV\pi^2 a_0^2 c_0 \sin|\varphi_s| \quad (26)$$

当 $\mu_{l,sc} = 1$ 时对应的流强即为纵向极限束流。

六、“RFQDYNA”程序简介及一台 RFQ 加速器主要参数举例

“RFQDYNA”程序是为 RFQ 加速器设计编写的。其主要功能包括: 横向稳定图计算、加速单元链参数计算、电极几何尺寸计算, 计入和不计入空间电荷作用下的束流横向及纵向动力学计算。通常, 它是在给定加速粒子种类、注入能量 W_i 、输出能量 W_f 、工作频率、极间工作电压, 选定工作点及 m 和 φ , 随加速单元的变化规律之后进行以上各项计算的。

利用“RFQDYNA”程序, 我们计算了注入能量为 0.05MeV 的质子 RFQ 加速器, 其主要参数列于表 2 中。

表 2 一台质子 RFQ 加速器主要参数

注入能量 W_i (MeV)	极间电压 V (kV)	工作频率 f (MHz)	输出能量 W_f (MeV)	横向匹配单元数 N_p	总单元数 N_T	特征半径 r_0 (cm)	
0.05	75	201.25	1.089	10	106	0.5	
同步相位 φ_s (度)	每加速单元上 最小极尖半径 a (cm)	加速单元长度 L_c (cm)	电极总长度 L_T (cm)	调变参数 m	U	A	
$-90^\circ \rightarrow -35^\circ$	1.884 \rightarrow 0.309	0.7689 \rightarrow 3.5743	172.4	1 \rightarrow 2.01	1 \rightarrow 0.390	0 \rightarrow 0.599	
B	俘获效率 $\eta(I=0)$	$I=0$ RFQ 入口接受度椭圆参数					
		α_x	β_x (米)	r_x (1/米)	α_y	β_y (米)	r_y (1/米)
0.5 \rightarrow 7.24	90.3%	1.0796	0.08776	24.6767	0.8921	0.06868	26.145

七、结 束 语

本文在分析 RFQ 的束流横向特性的基础上, 提出 RFQ 横向参数计算的一种方法。这一工作曾得到本研究室同志的关心和支持, 展开过有益的讨论, 作者对此表示万分感谢。

参 考 文 献

- [1] K. R. Canadall, R. H. Stokes and T. P. Wargler, proc. of the 1979 proton linear accelerator conference, p. 205.
- [2] 罗紫华、罗应雄、张亦勤、王书鸿, 1979 年全国加速器技术会议论文集第 430 页。

STUDY OF THE BEAM TRANSVERSE MOTION IN THE RFQ STRUCTURE

LUO ZI-HUA LUO YING-XIONG WANG LIN-LIN
(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

In this paper the beam transverse motion of the RFQ structure are discussed. A method for the calculation of the transverse acceptance ellipse parameters is proposed. Finally, the space charge effects and the RFQDYNA program are introduced briefly.