

ION

## 带电粒子束的束腰与物、象间的关系

郁庆长

(中国科学院高能物理研究所)

## 摘 要

在本文中,通过研究带电粒子束的束腰与物、象间的关系,对几何电子光学和束传输理论间的关系进行了探讨。

## 一、引 言

在现代科学技术中,带电粒子束有着广泛的应用。其中应用得最早而又最广泛的是电子束。根据电子在电磁场中的运动和光线在介质中的传播的相似性,人们把一系列几何光学中的概念如“基点”、“成象”等用于电子束,得到了几何电子光学的理论<sup>[1,2]</sup>。它同样也适用于其它带电粒子束。因为这一理论所讨论的主要是粒子束运动过程中物与象的关系,有时也称它为成象理论。

但是,对于加速器和其它一些带电粒子束装置的束流传输系统来说,研究粒子束的整体性质例如束的形状和发射度图形的变化往往是更重要的,因此人们又建立起带电粒子束的传输理论<sup>[3]</sup>。

上述两种理论的关系是一个颇有兴趣的问题。这两种理论都不企图完全描述粒子束中粒子的运动,而只是描述人们所感兴趣的一部分运动特性。物、象和束腰之间的关系集中地反映了这两种理论间的关系。本文试图探讨这一关系。在讨论中我们不考虑束的空间电荷效应和束流传输系统的象差。我们采用直角坐标系,以束轴为 $z$ 轴,并且只讨论 $xz$ 平面上的运动。

## 二、Newton 成象公式与腰-腰传输公式

Newton 成象公式描述束通过传输系统时物与象的关系:

$$(m_{11} + m_{21}L_i)(m_{22} + m_{21}L_o) = \nu. \quad (1)$$

象的放大率 $\mu$ 为

$$\mu = m_{11} + m_{21}L_i. \quad (2)$$

式中 $m_{11}, m_{21}$ 等为系统 $S$ 的传输矩阵元, $L_o$ 为物距, $L_i$ 为象距, $\nu$ 为粒子通过系统前后的速度比(图1)。

ar accele  
adjusting  
The ene  
ton linac  
ics, as an  
adjusting  
power to

值得注意的是式(1)、(2)中并不包含描述束特性的量,这就是说物与象的位置和象的放大率与束特性无关。对于一定的 $\nu, \mu, L_o, L_i$ ,存在着一系列的传输系统,它们的传输矩阵不同但都满足式(1)、(2)。

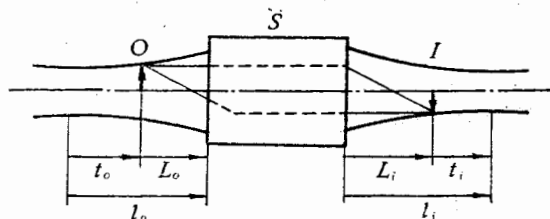


图1 粒子束运动过程中的物、象和束腰

对于成象过程来说它们都是等价的,但它们对束的形状的影响却可能不同。为此我们可以看一下 $X'_o$ 与 $X'_i$ 的关系, $X'_o$ 与 $X'_i$ 是束在 $x$ 方向的半径 $X$ 沿束轴的变化率 $\frac{dX}{dz}$ 在物与象处的值。容易求出

$$X'_i = \frac{\nu X_o}{X_i} X'_o + m_{21} X_o. \quad (3)$$

显然,当形状相同的束入射到那些 $m_{21}$ 不同但都满足式(1)、(2)的系统上时,出射束的形状将各不相同。由上述分析可知,我们不能根据成象理论来确定束的形状或发射度图形的变化。

下面讨论腰-腰传输公式。设物方束腰到系统 $S$ 入口距离为 $l_o$ , $S$ 出口到象方束腰距离为 $l_i$ ,物方束腰和象方束腰特征长度为 $\lambda_o$ 与 $\lambda_i$ ,则腰-腰传输公式可写为

$$\frac{\nu}{\rho m_{21}^2} = \lambda_o^2 + \left( l_o + \frac{m_{22}}{m_{21}} \right)^2, \quad (4)$$

$$\rho = \frac{\lambda_i}{\lambda_o} = \frac{m_{11} + m_{21} l_i}{m_{22} + m_{21} l_o}, \quad (5)$$

$\rho$ 为匹配比。

显然,当 $\lambda_o, \lambda_i, L_o, L_i$ 给定时存在着一系列传输系统都满足上述公式,它们的传输矩阵可写为

$$M = \sqrt{\frac{\nu}{\lambda_o \lambda_i}} \begin{pmatrix} \lambda_i \cos \theta + l_i \sin \theta & (\lambda_o \lambda_i - l_o l_i) \sin \theta - (\lambda_o l_i + \lambda_i l_o) \cos \theta \\ -\sin \theta & \lambda_o \cos \theta + l_o \sin \theta \end{pmatrix}, \quad (6)$$

其中 $0 \leq \theta < 2\pi$ 。 $\theta$ 可称为两束腰间的相移。将式(6)中的矩阵元代入式(4)、(5)可知,对于任何在此区间中的 $\theta$ ,这些矩阵元均满足腰-腰传输公式。

在 $\lambda_o, \lambda_i, l_o, l_i$ 给定的情况下,一个粒子通过 $\theta$ 不同的系统后的运动轨迹是不同的,但是整个束的形状和发射度图形的变化则是相同的。然而传输理论所关心的正是后者。从这个角度来看,这些 $\theta$ 不同的系统是等价的。

### 三、物、象与束腰间的关系

令<sup>1)</sup>

$$t_o = l_o - L_o, \quad t_i = l_i - L_i. \quad (7)$$

1)  $t_o, t_i, l_o, l_i, L_o, L_i$ 均以图1所示方向为正。

代入式(

令  $\lg \psi_o$

或

$k$ 为适当  
还可

其中 $a_o,$

由上  
可由物的  
 $\theta$ 可

或

计算, $\theta$ 并

位置和象  
它们的传  
(2)。对  
价的,但  
能不同。  
 $X_i$  的关  
的半径  $X$   
与象处的

代入式 (1) 得

$$\left(l_i - t_i + \frac{m_{11}}{m_{21}}\right)\left(l_o - t_o + \frac{m_{22}}{m_{21}}\right) = \frac{v}{m_{21}^2},$$

$$(\lambda_i \operatorname{ctg} \theta + t_i)(\lambda_o \operatorname{ctg} \theta + t_o) = \frac{\lambda_o \lambda_i}{\sin^2 \theta},$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\frac{t_i}{\lambda_i} + \frac{t_o}{\lambda_o}}{1 - \frac{t_o t_i}{\lambda_o \lambda_i}}. \quad (8)$$

令  $\operatorname{tg} \phi_o = \frac{t_o}{\lambda_o}$ ,  $\operatorname{tg} \phi_i = \frac{t_i}{\lambda_i}$ ,  $\phi_o, \phi_i$  都在区间  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  内。由式 (8) 得

$$\theta = \phi_o + \phi_i + k\pi, \quad (9)$$

或

$$\phi_i = \theta - \phi_o + k\pi. \quad (10)$$

$k$  为适当整数, 选择  $k$  可使  $\theta, \phi_o, \phi_i$  都在其定义域内, 以下同。

还可求出物和象的大小:

$$X_o = a_o \left[1 + \left(\frac{t_o}{\lambda_o}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = a_o |\sec \phi_o|,$$

$$X_i = a_i \left[1 + \left(\frac{t_i}{\lambda_i}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = a_i |\sec \phi_i|. \quad (11)$$

其中  $a_o, a_i$  为物方与象方束腰半径。象的放大率为

$$\mu = \frac{a_i}{a_o} \left| \frac{\cos \phi_o}{\cos \phi_i} \right|. \quad (12)$$

由上可知, 当束的发射度及束腰的大小与位置给定时, 只要我们知道束腰间的相移便可由物的位置确定象的位置以及物、象的大小。

$\theta$  可由公式

$$\theta = \arcsin \left( -m_{21} \sqrt{\frac{\lambda_o \lambda_i}{v}} \right), \quad (13)$$

或

$$\theta = \arcsin \left( -\frac{\lambda_o}{l_o + \frac{m_{22}}{m_{21}}} \right) = \arcsin \left( -\frac{\lambda_i}{l_i + \frac{m_{11}}{m_{21}}} \right). \quad (14)$$

计算,  $\theta$  所在象限可这样确定:

$$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}, \text{ 若 } m_{21} \leq 0, m_{22} + l_o m_{21} > 0;$$

$$\frac{\pi}{2} \leq \theta < \pi, \text{ 若 } m_{21} < 0, m_{22} + l_o m_{21} \leq 0;$$

$$\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}, \text{ 若 } m_{21} \geq 0, m_{22} + l_o m_{21} < 0;$$

$$\frac{3\pi}{2} \leq \theta < 2\pi, \text{ 若 } m_{21} > 0, m_{22} + l_o m_{21} \geq 0.$$

如果粒子束有几个束腰,可以证明首尾两束腰间的相移为各相邻束腰间相移之和(加上  $2k\pi$ ).

下面讨论两种特殊的束流传输系统.

### 1. $\theta = 0, \pi$ 的系统

其特点是运动方向平行于束轴的粒子通过系统后运动方向仍平行于束轴. 对于这种系统

$$\phi_i = -\phi_o, \quad (15)$$

$$\frac{t_i}{\lambda_i} = -\frac{t_o}{\lambda_o}, \quad (16)$$

$$\mu = \frac{a_i}{a_o}, \quad (17)$$

物与象分别位于两个束腰的同一侧(图 2(a)),束腰的象也是束腰.

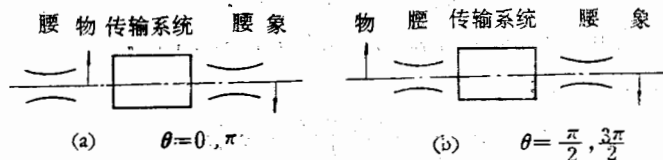


图2 粒子束通过  $\theta = 0, \pi$  和  $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$  的束流传输系统时物、象和束腰的相对位置

### 2. $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ 的系统

这种系统

$$t_i t_o = \lambda_i \lambda_o, \quad (18)$$

$$\mu = \frac{a_i \lambda_o}{a_o |t_o|} = \frac{a_i |t_i|}{a_o \lambda_i}, \quad (19)$$

物与象分别位于两个束腰的异侧(图 2(b)). 束腰的象在无穷远处.

## 四、物与束腰重合的情况

当物与束腰重合时,  $\phi_o = 0, \phi_i = \theta$ .

$$t_i = \lambda_i \tan \theta = -\frac{\lambda_i \lambda_o}{l_o + \frac{m_{22}}{m_{21}}}, \quad (20)$$

$$\mu = \frac{a_i}{a_o} |\sec \phi_i| = \frac{a_i}{a_o} |\sec \theta| = \frac{a_i}{a_o} \left[ 1 + \left( \frac{\lambda_o}{l_o + \frac{m_{22}}{m_{21}}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (21)$$

当  $\lambda_o, \lambda_i$  给定时,由式(4)可知  $l_o$  一般存在两个解,其中一个大于  $-\frac{m_{22}}{m_{21}}$ , 另一个小于  $-\frac{m_{22}}{m_{21}}$ . 这里  $f_1, f_2$  为

$l_o >$

$l_o <$

显然

薄透

其中  $f$  为

对于

而

由式(10),

由式( )  
可能是束腰  
阵为

这里  $f_1, f_2$  为

移之和(加

$l_o > -\frac{m_{22}}{m_{21}}$  时,  $l_i > -\frac{m_{11}}{m_{21}}$ ,  $t_i < 0$ ,  $L_i > l_i$ , 象在象方束腰前方.

$l_o < -\frac{m_{22}}{m_{21}}$  时,  $l_i < -\frac{m_{11}}{m_{21}}$ ,  $t_i > 0$ ,  $L_i < l_i$ , 象在象方束腰后方.

显然在一般情况下象和束腰不重合, 除非  $\lambda_o = 0$  或  $m_{21} = 0$  (亦即  $\theta = 0, \pi$ ).

对于这种

## 五、薄 透 镜

(15)

(16)

薄透镜的传输矩阵为

(17)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix},$$

其中  $f$  为薄透镜的焦距. 对于会聚的薄透镜  $f > 0$ , 对于发散的薄透镜  $f < 0$ .

对于薄透镜, 式 (1)、(2)、(4)、(5) 成为

$$(L_i - f)(L_o - f) = f^2, \quad (22)$$

$$\mu = 1 - \frac{L_i}{f}, \quad (23)$$

$$\frac{f}{\rho} = \lambda_o^2 + (l_o - f)^2, \quad (24)$$

$$\rho = \frac{l_i - f}{l_o - f}. \quad (25)$$

而

$$\theta = \arcsin\left(\frac{1}{f} \sqrt{\lambda_o \lambda_i}\right) = \arctg\left(-\frac{\lambda_o}{f - l_o}\right) = \arctg\left(\frac{\lambda_i}{f - l_i}\right). \quad (26)$$

(18)

由式 (10),

(19)

$$\frac{t_i}{\lambda_i} = \frac{\frac{\lambda_o}{l_o - f} + \frac{t_o}{\lambda_o}}{\frac{t_o}{l_o - f} - 1} = \frac{t_o l_o - t_o f + \lambda_o^2}{\lambda_o (f + t_o - l_o)},$$

$$t_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_o} \frac{t_o (l_o - f) + \lambda_o^2}{f + t_o - l_o}. \quad (27)$$

由式 (26) 可看出, 除非  $f = \infty$  或  $\lambda_o = 0$ ,  $\theta$  不能等于 0 或  $\pi$ , 也就是说束腰的象不可能是束腰. 但是由两个薄透镜组成的系统  $\theta$  却有可能等于 0 或  $\pi$ . 这种系统的传输矩阵为

(20)

(21)

$$\begin{pmatrix} \frac{f_1 - d}{f_1} & d \\ \frac{d - f_1 - f_2}{f_1 f_2} & \frac{f_2 - d}{f_2} \end{pmatrix}.$$

另一个小

这里  $f_1, f_2$  为两薄透镜的焦距,  $d$  为薄透镜间的距离. 显然,

$$\theta = \arcsin\left(\frac{f_1 + f_2 - d}{f_1 f_2} \sqrt{\lambda_o \lambda_i}\right). \quad (28)$$

当  $d = f_1 + f_2$  时  $\theta$  将等于 0 或  $\pi$ 。如果  $f_1, f_2$  中有一个为负, 则  $\theta = 0$ ; 如果  $f_1, f_2$  均为正, 则  $\theta = \pi$ 。

## 六、结 语

虽然带电粒子束在电磁场中的运动可以由电动力学的规律完全确定, 但是计算大量粒子的运动状况毕竟是很复杂的。在多数情况下我们感兴趣的只是束的运动状况的某一方面, 这时利用几何电子光学或传输理论就方便得多。

在本文中我们研究了粒子运动过程中物、象和束腰间的关系, 并由此对几何电子光学与传输理论间的关系进行了探讨。这一研究也是有实际意义的。例如, 如果我们要利用光阑来限制某一束腰的尺寸, 就应当把光阑放在这样的位置, 使它的象与该束腰重合。一般说来, 这一位置常常不是束腰, 仅在特殊情况下它才与束腰重合。

本文承徐建铭先生审阅, 特此致谢。

## 参 考 文 献

- [1] O. Klemperer and M. E. Barnett, *Electron Optics*, 3rd ed., Cambridge Univ., London, 1971.
- [2] P. Grivet and A. Septier, *Electron Optics*, 2nd ed., Pergamon Press, Oxford, 1972.
- [3] A. P. Banford, *The Transport of Charged Particle Beams*, Spon, London, 1966.

# ON RELATIONS AMONG OBJECTS, IMAGES AND BEAM WAISTS FOR CHARGED PARTICLE BEAMS

YU QING-CHANG

(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica*)

## ABSTRACT

In this paper, the relations among objects, images and beam waists for charged particle beams are studied. On this basis, the relations between geometrical electron optics and beam transport theory are discussed.

系统  
与 W

近些  
物理也越  
也能通过  
和  $\Sigma$  超核  
与原子核  
众所  
么正对称  
组成的重  
为如果重  
方面,  $L_{ij}$   
核实验尚  
 $\Sigma$  超核和  
对  $\Lambda$  超核  
子系统。  
系统是由  
本文  
子系统的  
旋 1/2 的  
只通过强  
用是  $SU($   
之间的“ $\Gamma$