第7卷 第4期　　　　高能物理与核物理　　　　Vol. 7, No. 4
1983年7月　　PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS　　July, 1983

O(N)超对称手征模型中的非定域无穷多守恒流与Kac-Moody代数结构

吴 詠 时　　　　葛 墨 林
（中国科学院理论物理研究所）　（兰 州 大 学）

摘　　要

从 Curtright-Zachos 的 O(N) 超对称手征模型理论出发，引入扩展的局域变换，通过 Noether 分析得到了相应的非定域无穷多守恒流．同时又证明了在这个理论中二维旋量场 ψ 的变分满足 Kac-Moody 类型代数关系．

1. 引　　言

近年来超对称手征模型（以下简称 SSM）的讨论有相当的进展，尤其是与反散射方法结合起来，更有了新的发展[1-4]，如果从具体表述上看可以粗略地分为超场表述与具体模型表述．作为前者比较简洁的形式是 Z. Popowicz 与乔玲丽的讨论[5]，作为 O(N)-SSM 的漂亮的阐述属于 Curtright 与 Zachos[6]（以下文献[5]简称 CZ）．当然，对于手征模型的守恒流的讨论几乎已经有比较标准的格式：定义势，并从运动方程出发，用逐级叠代的程序获得各阶守恒流．然后对各阶守恒流分别乘以参数 l 的幂次，再相加即得到 Lax-pair 的表达式．在线性方程组比较复杂时，可以将它们用 l 展开，获得各阶 Brézin 类型的守恒流[2]，CZ 中已作了相应的讨论．

另一方面，最近对于两维的手征模型及相连带的问题以及自对偶杨-Mills（SDYM）场这方面的研究有了新的进展．例如引入一种局域变换，它在文献[7]中称为"H-变换"，可以证明非定域无穷多守恒流是与该变换相联系的参数化 Noether 流[8]．从该变换出发同时发现有 Kac-Moody 代数结构存在[9,10,11]，对于超场表述的 SSM 与 SDYM 还可以同 Bäcklund 变换联系起来[10,11]．这些事实说明文献[7-9]中的方法是正确的，类似于通常 Brézin 类型守恒流的步骤，我们也可以总结出一个比较简明的格式，以后会看到这种格式比起通常的格式具有比较大的威力．

本文的目的在于将我们过去的讨论应用于文献[6]中的 CZ 形式的 SSM 理论，并讨论其守恒流与 Kac-Moody 代数结构．

CZ 形式的 SSM 实际上是 Gross-Neveu 模型[4]加上实标量场的一种 O(N) 模型，其中的二维 Majorana 旋量 ψ 可以视为反对易数．其作用量为

本文 1982 年 3 月 26 日收到．

$$S=\int d^2x\mathscr{L}=\int d^2x\left\{\frac{1}{2}\partial_\mu n^a\partial^\mu n^a+\frac{1}{2}i\bar{\Phi}^a\partial\!\!\!/\phi^a+\frac{1}{8}(\bar{\Phi}^a\phi^a)^2\right\}, \tag{1.1}$$

及限制条件

$$n^a n^a=0,\ n^a\phi^a=0. \tag{1.2}$$

当引入势

$$A_\mu^{ab}=2n^a\overleftrightarrow{\partial}_\mu n^b, \tag{1.3}$$

及

$$B_\mu^{ab}=-i\bar{\Phi}^a\gamma_\mu\phi^b \tag{1.4}$$

后，CZ 证明了在满足运动方程时（on-shell）有一系列关系式成立

$$\partial_\mu A^\mu=[A^\mu,\ B_\mu], \tag{1.5}$$

$$\partial_\mu B^\mu=-\frac{1}{2}[A^\mu,\ B_\mu] \tag{1.6}$$

$$\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu=-\epsilon^{\mu\nu}A_\mu A_\nu \tag{1.7}$$

$$\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu B_\nu=-\epsilon^{\mu\nu}B_\mu B_\nu-\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu}[A_\mu,\ B_\nu], \tag{1.8}$$

其中 $\mu,\nu=0,1$，且令 A_μ 与 B_μ 表示与(1.3)(1.4)相应的矩阵，其运动方程为

$$\partial_\mu J^\mu=\partial_\mu(A^\mu+2B^\mu)=0. \tag{1.9}$$

CZ 给出了 on-shell 情况下的 Lax-pair

$$\partial_\mu U=\frac{l}{1-l^2}\left[lA_\mu+\epsilon_{\mu\nu}A^\nu+\frac{4l}{1-l^2}B_\mu+\frac{2(1+l^2)}{1-l^2}\epsilon_{\mu\nu}B^\nu\right]U, \tag{1.10}$$

其中 l 为任意实参数．引入光锥坐标

$$\partial_\eta=\partial_0-\partial_1,\ \partial_\xi=\partial_0+\partial_1, \tag{1.11}$$

与

$$A_\eta=A_0-A_1, A_\xi=A_0+A_1, \tag{1.12}$$

则(1.10)变为

$$\partial_\xi U=-\frac{l}{1+l}\left[A_\xi+\frac{2}{1+l}B_\xi\right]U, \tag{1.13}$$

$$\partial_\eta U=\frac{l}{1-l}\left[A_\xi+\frac{2}{1-l}B_\xi\right]U. \tag{1.14}$$

以下我们在这些结果的基础上，从另一个角度来讨论问题．

2. 无穷多守恒流的 Noether 分析

首先让我们以主手征场为例，回忆一下我们的“标准格式”，注意这里的提法比文献[8]有了某些新的理解．

(1) 首先将势 A_μ 作某个整体变换 T，其中 $T=T_a\alpha^a$．属于某个群 G，α^a 为无穷小变换参数，即 T 为常数矩阵，使得运动方程保持不变．这时相应的 $\delta\mathscr{L}=0$．

(2) 将上述常数矩阵 T 换成 $\Lambda(x)=UTU^{-1}$．(H-变换)，其中 U 为满足 Lax-pair 或其中之一的矩阵函数，它依赖于坐标 ξ 和 η 以及任意参数 l．

(3) 一般说当 $T \to \Lambda$ 后，$\delta\mathscr{L} \neq 0$. 但我们考虑一类变换，它能使得具有 $\delta\mathscr{L} \sim T_r(A_\mu\partial^\mu\Lambda)$ 的形式，亦即 On-shell 时，$\delta\mathscr{L} \sim \partial_\mu T_r(A^\mu\Lambda)$ 为一两维散度形式. 注意这种形式在 $U=1$ 时与运动方程相一致.

(4) 将上述 $\delta\mathscr{L}$ 变形，使它出现形如 $\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu(l\partial_\nu\chi^{(1)} + l^2\partial_\nu\chi^{(2)} + \cdots) = I$ 的项，其中诸 $\chi^{(n)}$ 可由 Lax-pair 决定. 将变形后的 $\delta\mathscr{L}$ 用 l 展开，I 的部分贡献恒为 0. 抛掉这些项，然后与 $T_r(U^{-1}A_\mu UT)$ 相减，即决定出各阶守恒流. 这个流也正就是类似 Brézin 类型的流，于是将 Brézin 类型的流同保证 $\delta\mathscr{L}$ 为 2-散度形式的变换联系起来.

(5) 将满足上述要求的 δA_μ 与对 U 取变分的方程以及 Lax-pair 结合起来，证明存在 Kac-Moody 代数结构.

我们还要指出，从 H-变换角度得到守恒流的要求很宽，在只有一种场存在时，它完全由某个群的变换性质决定. 在有两种场存在时，如已知其中一种场的变换性质由群 G 决定，那么另一种独立的场的变换性质应以保证 $\delta\mathscr{L}$ 具有上述 2-散度形式为原则，这时就形成了“扩展了的 H-变换”.

现在将上述思想具体用于 CZ 形式的 SSM 理论. 首先求 δS. 将改写为

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{16}T_r(A_\mu A^\mu) + \frac{1}{2}i\bar{\phi}^a\partial\!\!\!/\phi^a + \frac{1}{8}(\bar{\phi}^a\phi^a)^2, \tag{2.1}$$

其中 A_μ 可视为独立场量，而不必再引入 n^a，(参阅文献 [3] 中的角脚注 7 所述)，在 on-shell 时满足关系式(1.5)—(1.8). 对 ϕ 引入变换

$$\begin{aligned} \partial\phi^a &= \Lambda^{ab}\phi^b \\ \delta\bar{\phi}^a &= -\bar{\phi}^b\Lambda^{ba}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

其中 $\Lambda = UTU^{-1} = UT_aU^{-1}\alpha^a$，$U$ 满足(1.13)与(1.14). 由(2.2)和(1.4)得

$$\delta\mathscr{L} = -\frac{1}{8}T_r(A^\mu\delta A_\mu) + \frac{1}{2}T_r(B^\mu\partial_\mu\Lambda). \tag{2.3}$$

我们由以下原则确定 δA_μ:

(1) 要求 δA_μ 代入(2.3)后，使 $\delta\mathscr{L}$ 具有形式

$$\delta S = \int d^2x\delta\mathscr{L} = \frac{1}{4}\int d^2xT_r[(A_\mu + 2B_\mu)\partial^\mu\Lambda], \tag{2.4}$$

$J_\mu = A_\mu + 2B_\mu$，即保证 $\delta\mathscr{L}$ 具有 2-散度形式 (on-shell)，且最低阶的守恒流为 J_μ.

(2) 要求 $B_\mu = 0$ 时，其变换形式与主手征场相同[7]，即当 $B_\mu = 0$ 时有 $\delta A_\xi = -\dfrac{1}{1+l}[A_\xi, \Lambda]$.

结合(1)与(2)，使用(1.13)可证明此时有

$$\delta_\alpha A_\xi = -\frac{1}{1+l}[A_\xi, \Lambda_\alpha] + \frac{4l}{(1+l)^2}[B_\xi, \Lambda_\alpha], \tag{2.5}$$

得到上式时用到了从(1.13)可证明的式子

$$\partial_\xi\Lambda_\alpha = -\frac{l}{1+l}[A_\xi, \Lambda_\alpha] - \frac{2l}{(1+l)^2}[B_\xi, \Lambda_\alpha]. \tag{2.6}$$

对变量 η 亦可进行类似的讨论. 将(2.5)代入(2.3)并注意到(2.6)得到 $\delta\mathscr{L}$ 的变化式

$$\delta \mathscr{L} = -\frac{1}{8} T_r[A_\mu(-2\partial^\mu \Lambda)] + \frac{1}{2} T_r(B_\mu \partial^\mu \Lambda) \tag{2.7}$$

或

$$\delta \mathscr{L} = \frac{1}{4} T_r(J^\mu \partial_\mu \Lambda), \tag{2.8}$$

它正是我们要求的形式．在 on-shell 时有

$$\delta \mathscr{L} = \frac{1}{4} \partial_\mu T_r(U^{-1} J^\mu U), \tag{2.9}$$

即具有 2-散度形式．(2.2)与(2.5)组成立了“扩展的 H-变换”,亦即能保证 $\delta\mathscr{L}$ 的形式为二维散度,而且在 $U=I$ 时回复到运动方程．一般说，在有两个独立场情况，决定同一 $\delta\mathscr{L}$ 时对 A_μ 场存在由于 $T_r([A,\ T]A)=0$ 的不定性,亦即有更大的变换余地．但(2.5)中所包含的 δB_ξ 则由 O(N) 群完全决定,没有任何变更的余地．从(1.3)设

$$\delta n^a = -n^b \Lambda^{ba} \tag{2.10}$$

则在矩阵迹内亦得到(2.9)．

对(2.9)进行变形才能分出 Brézin 流,因此以下讨论如何从(2.9)中分出 $\epsilon^{\mu\nu}$ 因子来．这种变形已在侯伯宇的工作(Yale 预印本 YTP80-29)中给出了结果，但由于该文只有简要的最后结果而又未发表,所以扼要地在此叙述一下．

首先将 δS 改写为

$$\delta S = \int d^2x \frac{1}{4} T_r\{[U^{-1}j^\mu U,\ U^{-1}\partial_\mu U]\}T. \tag{2.11}$$

则利用(1.10)可证

$$U^{-1}J_0U = -\left\{U^{-1}\partial_0 U + \frac{1}{l} U^{-1}\partial_1 U + \frac{2l}{1-l^2}(lU^{-1}B_0U - U^{-1}B_1U)\right\}, \tag{2.12}$$

$$U^{-1}J_1U = -\left\{U^{-1}\partial_1 U + \frac{1}{l} U^{-1}\partial_0 U + \frac{2l}{1-l^2}(lU^{-1}B_1U - U^{-1}B_0U)\right\}. \tag{2.13}$$

结合(1.6)有

$$\begin{aligned} U^{-1}\partial_\mu B^\mu U = -\frac{1}{2}\Big\{ & [U^{-1}B^\mu U,\ U^{-1}\partial_\mu U] \\ & + \frac{1}{l}\epsilon^{\mu\nu}[U^{-1}B_\mu U,\ U^{-1}\partial_\nu U] - \frac{2l}{1-l^2}\epsilon^{\mu\nu}U^{-1}B_\mu B_\nu U\Big\}, \end{aligned} \tag{2.14}$$

结合(1.8)有

$$\begin{aligned} \epsilon^{\mu\nu}U^{-1}\partial_\mu B_\nu U = & \frac{1+l^2}{1-l^2}\epsilon^{\mu\nu}U^{-1}B_\mu B_\nu U + \frac{1}{2}\Big\{\epsilon^{\mu\nu}[U^{-1}B_\mu U,\ U^{-1}\partial_\nu U] \\ & + \frac{1}{l}[U^{-1}B^\mu U,\ U^{-1}\partial_\mu U]\Big\}, \end{aligned} \tag{2.15}$$

又可证明

$$\begin{aligned} & \frac{1+l^2}{1-l^2}\partial_\mu(U^{-1}B^\mu U) - \frac{2l}{1-l^2}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu(U^{-1}B_\nu U) \\ & = \frac{1+l^2}{1-l^2}[U^{-1}B^\mu U,\ U^{-1}\partial_\mu U] + \frac{2l}{1-l^2}\epsilon^{\mu\nu}[U^{-1}\partial_\mu U,\ U^{-1}B_\nu U] \end{aligned}$$

$$+\frac{1+l^2}{1-l^2}U^{-1}\partial_\mu B^\mu U-\frac{2l}{1-l^2}\epsilon^{\mu\nu}U^{-1}\partial_\mu B_\nu U. \tag{2.16}$$

将所有结果结合起来，最后得

$$\delta S=\int d^2x\,\frac{1}{4}\,T_r\left\{-\frac{2}{l}\,\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu(U^{-1}\partial_\nu U)\right.$$
$$\left.+\frac{4l^2}{1-l^2}\left[\frac{1+l^2}{1-l^2}\partial_\mu(U^{-1}B^\mu U)-\frac{2l}{1-l^2}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu(U^{-1}B_\nu U)\right]\right\}T. \tag{2.17}$$

我们看到上式已包括了反对称能量 $\epsilon^{\mu\nu}$，它可以使我们从这种恒等变换中去掉恒为 0 的项，以获得非平凡的无穷多守恒流.

按以前标准的作法[7,8,10]将 U 用参数 l 展开，即令

$$U=I+l\chi^{(1)}+l^2\left(\chi^{(2)}+\frac{1}{2}\chi^{(1)^2}\right)+l^3\left[\chi^{(3)}+\frac{1}{2}(\chi^{(1)}\chi^{(2)}+\chi^{(2)}\chi^{(1)})\right]$$
$$+l^4\left\{\chi^{(4)}+\frac{1}{2}\left(\chi^{(2)^2}+\chi^{(2)}\chi^{(1)^2}-\frac{1}{4}\chi^{(1)^4}\right)+\frac{1}{2}(\chi^{(1)}\chi^{(3)}+\chi^{(3)}\chi^{(1)})\right\}$$
$$+\cdots. \tag{2.18}$$

如将 U 的展开式代入 Lax-pair (1.10)，则可得到诸 $\chi^{(n)}$ 由 A_ξ，$B_\xi\cdots$ 决定的无穷多方程组，这在 CZ 中已有讨论不再赘述.

我们现在来计算 l 幂次的前几阶守恒流的具体形式. 将(2.18)代入(2.17)，经过一些计算可以得到展至 l^3 项的 δS 的表达式：

$$\delta S=\int d^2x\,\frac{1}{4}\,T_r\left\{-\frac{2}{l}\,\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu(l\partial_\nu\chi^{(1)}+l^2\partial_\nu\chi^{(2)}+l^3\partial_\nu\chi^{(3)}+l^4\partial_\nu\chi^{(4)}+\cdots)\right.$$
$$+2\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu\left[\frac{1}{2}l[\chi^{(1)},\partial_\nu\chi^{(1)}]+\frac{1}{2}l^2\Big([\chi^{(1)},\partial_\nu\chi^{(2)}]+[\chi^{(2)},\partial_\nu\chi^{(1)}]\right.$$
$$-\frac{1}{3}[\chi^{(1)},[\chi^{(1)},\partial_\nu\chi^{(1)}]]\Big)+l^3\Big(\frac{1}{8}[\partial_\nu\chi^{(1)^2},\chi^{(1)^2}]+\frac{1}{2}[\chi^{(1)},\partial_\nu\chi^{(3)}]$$
$$+\frac{1}{2}[\chi^{(3)},\partial_\nu\chi^{(1)}]+\frac{1}{2}[\chi^{(2)},\partial_\nu\chi^{(2)}]-[[\partial_\nu\chi^{(1)},\chi^{(1)}],\chi^{(2)}]$$
$$\left.-[[\partial_\nu\chi^{(2)},\chi^{(1)}],\chi^{(1)}]\Big)\right]+4l^2\partial_\mu B^\mu-4l^3(\partial_\mu[\chi^{(1)},A^\mu]+2\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu B_\nu)$$
$$\left.+\cdots\right\}T. \tag{2.19}$$

另一方面将 $U^{-1}J_\mu U$ 展开，由(2.9)可有

$$\delta S=\partial_\mu\int d^2x\,\frac{1}{4}\,T_r\left\{J^\mu-l[\chi^{(1)},J^\mu]-l^2\left([\chi^{(1)},J^\mu]-\frac{1}{2}[[J^\mu,\chi^{(1)}],\chi^{(1)}]\right)\right.$$
$$-l^3\Big([\chi^{(3)},J^\mu]-\frac{1}{2}[[J^\mu,\chi^{(1)}],\chi^{(2)}]-\frac{1}{2}[[J^\mu,\chi^{(2)}],\chi^{(1)}]$$
$$\left.+\frac{1}{2}[\chi^{(1)}J^\mu\chi^{(1)},\chi^{(1)}]\Big)+\cdots\right\}T. \tag{2.20}$$

将(2.19)与(2.20)相减，由于 $\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\cdots=0$，故移项后得到一系列守恒流：

$$\partial_\mu J^{(n)\mu}=0, \tag{2.21}$$

其中前四阶为

$$J^{(0)\mu} = A^\mu + 2B^\mu \text{（运动方程）} \tag{2.22}$$

$$J^{(1)\mu} = \epsilon^{\mu\nu}[\chi^{(1)}, \partial_\nu\chi^{(1)}] + [\chi^{(1)}, J^\mu] \tag{2.23}$$

$$J^{(2)\mu} = \epsilon^{\mu\nu}\left([\chi^{(1)}, \partial_\nu\chi^{(2)}] + [\chi^{(2)}, \partial_\nu\chi^{(1)}] - \frac{1}{3}[\chi^{(1)}, [\chi^{(1)}, \partial_\nu\chi^{(1)}]]\right)$$
$$+ [\chi^{(1)}, J^\mu] - \frac{1}{2}[[J^\mu, \chi^{(1)}], \chi^{(1)}] + 4\partial_\mu B^\mu. \tag{2.24}$$

$$J^{(3)\mu} = \epsilon^{\mu\nu}\Big(\frac{1}{4}[\partial_\nu\chi^{(1)^2}, \chi^{(1)^2}] + [\chi^{(1)}, \partial_\nu\chi^{(3)}] + [\chi^{(3)}, \partial_\nu\chi^{(1)}]$$
$$+ [\chi^{(2)}, \partial_\nu\chi^{(2)}] + 2[\chi^{(2)}, [\partial_\nu\chi^{(1)}, \chi^{(1)}]] + 2[\chi^{(1)}, [\partial_\nu\chi^{(2)}, \chi^{(1)}]]\Big)$$
$$+ [\chi^{(3)}, J^\mu] - \frac{1}{2}[[J^\mu, \chi^{(1)}], \chi^{(2)}] - \frac{1}{2}[[J^\mu, \chi^{(2)}], \chi^{(1)}]$$
$$+ \frac{1}{2}[\chi^{(1)}J^\mu\chi^{(1)}, \chi^{(1)}] - 4([\chi^{(1)}, A^\mu] + 2\epsilon^{\mu\nu}\partial_\mu B_\nu),$$
$$\cdots. \tag{2.25}$$

从以上讨论很明显地看到这些流正是 Brézin 类型的流，但现在是对应使 $\delta\mathscr{L}$ 为 2-散度的 Noether 流，其最低阶流守恒为运动方程.

3. Kac-Moody 代数结构

首先将比较抽象的 Kac-Moody 代数[13]用物理语言引入二维手征模型的是 L. Dolan，在文献[14]中用归纳法证明了这种代数结构的具体形式. 稍后我们从局域变换出发直接证明了这点，由于所提出的方法具有更大的普适性，所以迅速推广到超场表示的 SSM 理论及 SDYM 情况[7,9-11]. 现在我们用这些来讨论 CZ 形式.

在主手征模型中的 Kac-Moody 代数关系等价于

$$[\delta_a^{(m)}, \delta_b^{(n)}]g = C_{ab}^c\delta_c^{(m+n)}g, \tag{3.1}$$

其中C_{ab}^c为某有限阶群的结构常数. 在原始的讨论中是通过定义算子

$$Q_a^{(n)} = -T_r\int d^2x\ \delta_a^{(n)}g\frac{\partial}{\partial g}$$

来实现的，实际上，形式(3.1)是最本质的关系式.

以下我们将证明ϕ场（或$\bar{\Phi}$）存在同样的关系：

$$[\delta_a^{(m)}, \delta_b^{(n)}]\bar{\Phi} = C_{ab}^c\delta_c^{(m+n)}\phi. \tag{3.2}$$

其中 $\delta_a^{(m+n)}$ 表示对应无穷小变换参数 α^a 的分量的对参数 l 展开式中的 $(m+n)$ 幂次的变分，C_{ab}^c 为群 O(N) 的结构常数.

我们仍从 Lax-pair 当中的任何一个出发，例如(1.13)，当然如换成(1.14)，结果是一样的. 首先列出所用的记号. 注意在宗量中只明显写出我们用到的场量与变量.

定义 $$\Lambda_\alpha = \Lambda_\alpha(l, \bar{\Phi}, \phi) = U(l, \bar{\Phi}, \phi)T_\alpha U^{-1}(l, \bar{\Phi}, \phi) = UT_\alpha U^{-1} \tag{3.3}$$
$$\Lambda'_\alpha = \Lambda_\alpha(l', \bar{\Phi}, \phi) = U(l', \bar{\Phi}, \phi)T_\alpha U'^{-1}(l', \bar{\Phi}, \phi) = U'T_\alpha U'^{-1},$$

其中
$$T_\alpha = T_a\alpha^a,\ \text{注意}\ \alpha\ \text{不表示分量}. \tag{3.4}$$
$$\delta_\alpha\bar{\Phi} = -\bar{\Phi}\Lambda_\alpha = -\bar{\Phi}\Lambda_\alpha(l, \bar{\Phi}, \phi) \tag{3.5}$$
$$\delta'_\beta\bar{\Phi} = -\bar{\Phi}\Lambda'_\beta = -\bar{\Phi}\Lambda_\beta(l', \bar{\Phi}, \phi), \tag{3.6}$$
我们需要求对易子[9]
$$[\delta_\alpha, \delta'_\beta]\bar{\Phi} = \{\delta_\alpha(\bar{\Phi} + \delta'_\beta\bar{\Phi}) - \delta_\alpha\bar{\Phi}\} - \{\delta'_\beta(\bar{\Phi} + \delta_\alpha\bar{\Phi}) - \delta'_\beta\bar{\Phi}\}. \tag{3.7}$$
由(2.2)式,(3.7)式可化为
$$[\delta_\alpha, \delta'_\beta]\bar{\Phi} = \bar{\Phi}\{[\Lambda'_\beta, \Lambda_\alpha] + [\delta_\alpha U'U'^{-1}, \Lambda'_\beta] - [\delta'_\beta UU^{-1}, \Lambda_\alpha]\}, \tag{3.8}$$
其中
$$\delta_\alpha U' = U(l', \bar{\Phi} + \delta_\alpha\bar{\Phi}) - U(l', \bar{\Phi})$$
$$\delta'_\beta U = U(l, \bar{\Phi} + \delta'_\beta\bar{\Phi}) - U(l, \bar{\Phi}).$$
同以前一样,如果我们能证明
$$\delta_\alpha U'U'^{-1} = \frac{l'}{l'-l}(\Lambda_\alpha - \Lambda'_\alpha), \tag{3.9}$$
$$\delta'_\beta UU^{-1} = \frac{l}{l'-l}(\Lambda_\beta - \Lambda'_\beta). \tag{3.10}$$
将它们代入(3.8)后,考虑到(3.3)与(3.5)式,即得
$$[\delta_\alpha, \delta'_\beta]\bar{\Phi} = \alpha^a\beta^b C^c_{ab}\frac{l'\delta'_c\bar{\Phi} - l\delta_c\bar{\Phi}}{l'-l}. \tag{3.11}$$
用展开式
$$\begin{aligned}\delta_\alpha\bar{\Phi} &= \sum_m l^m\delta^{(m)}_\alpha\phi\\ \delta'_\beta\bar{\Phi} &= \sum_n l'^n\delta^{(n)}_\beta\phi,\end{aligned} \tag{3.12}$$
则有
$$[\delta_\alpha, \delta'_\beta]\bar{\Phi} = \alpha^a\beta^b\sum_m\sum_n l^m l'^n[\delta^{(m)}_a, \delta^{(n)}_b]\bar{\Phi}. \tag{3.13}$$
由于
$$\begin{aligned}\frac{l'\delta'_c\bar{\Phi} - l\delta_c\bar{\Phi}}{l'-l} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{l'^{k+1} - l^{k+1}}{l'-l}\delta^{(k)}_c\bar{\Phi}\\ &= \sum_{k=0}\sum_{j=0}^{k} l'^{k-j}\,l^j\,\delta^{(k)}_c\bar{\Phi} = \sum_m\sum_n l^m l'^n\,\delta^{(m+n)}\bar{\Phi},\end{aligned} \tag{3.14}$$
则由(3.11)式即成立
$$[\delta^{(m)}_a, \delta^{(n)}_b]\bar{\Phi} = C^c_{ab}\delta^{(m+n)}_c\bar{\Phi}. \tag{3.15}$$
实际上由于 l 与 l' 的任意性，我们只要证明 l 与 l' 相差为无穷小量时(3.10)与(3.11)式成立即可.(3.15)式就正是 Kac-Moody 代数.

以下我们先证明(3.10)式.

在光锥坐标中,先计算 $\partial_\xi(\delta'_\alpha UU^{-1})$:
$$\partial_\xi(\delta'_\alpha UU^{-1}) = (\partial_\xi\delta'_\alpha U)U^{-1} + \delta'_\alpha U\partial_\xi U^{-1}. \tag{3.16}$$
由(1.13)对 U 取变分

$$\partial_\xi \delta'_\alpha U = -\frac{l}{1+l}\left\{\delta'_\alpha A_\xi U + A_\xi \delta'_\alpha U + \frac{2}{1+l}\delta'_\alpha B_\xi U + \frac{2}{1+l}B_\xi \delta'_\alpha U\right\} \tag{3.17}$$

以及

$$\partial_\xi U^{-1} = \frac{l}{1+l}\left(U^{-1}A_\xi + \frac{2}{1+l}U^{-1}B_\xi\right) \tag{3.18}$$

可将(3.16)式化为

$$\partial_\xi(\delta'_\alpha UU^{-1}) = -\frac{l}{1+l}\left\{[A_\xi,\ \delta'_\alpha UU^{-1}] + \frac{2}{1+l}[B_\xi,\ \delta'_\alpha UU^{-1}] + \delta'_\alpha A_\xi + \frac{2}{1+l}\delta'_\alpha B_\xi\right\}. \tag{3.19}$$

另一方面,由于(1.13)式易证对任意参数 α 成立

$$\partial_\xi A'_\alpha = -\frac{l'}{1+l'}[A_\xi,\ A'_\alpha] - \frac{2l'}{(1+l')^2}[B_\xi,\ A'_\alpha],$$

以及

$$\partial_\xi A_\alpha = -\frac{l}{1+l}[A_\xi,\ A_\alpha] - \frac{2l}{(1+l)^2}[B_\xi,\ A_\alpha]. \tag{3.20}$$

取以上两式之差,得: $$\partial_\xi(A'_\alpha - A_\alpha) = \left[A_\xi,\ \frac{l}{1+l}A_\alpha - \frac{l'}{1+l'}A'_\alpha\right] + 2\left[B_\xi,\ \frac{l}{(1+l)^2}A_\alpha - \frac{l'}{(1+l')^2}A'_\alpha\right]. \tag{3.21}$$

将上式变形为

$$\partial_\xi(A'_\alpha - A_\alpha) = \left[A_\xi,\ \frac{l}{1+l}(A_\alpha - A'_\alpha) + \frac{l-l'}{(1+l)(1+l')}A'_\alpha\right] + 2\left[B_\xi,\ \frac{l}{(1+l)^2}(A_\alpha - A'_\alpha) + \frac{(l-l')(1-ll')}{(1+l)^2(1+l')^2}A'_\alpha\right], \tag{3.22}$$

定义

$$X_\alpha = \frac{l}{l-l'}(A'_\alpha - A_\alpha), \tag{3.23}$$

则(3.22)式变为

$$\partial_\xi X_\alpha = -\frac{l}{1+l}\left\{[A_\xi,\ X_\alpha] + \frac{2}{1+l}[B_\xi,\ X_\alpha] - \frac{1}{1+l'}[A_\xi,\ A'_\alpha] - \frac{2(1-ll')}{(1+l)(1+l')^2}[B_\xi,\ A'_\alpha]\right\}. \tag{3.24}$$

由于(2.5)与(3.3)两式,可得

$$\delta'_\alpha A_\xi = -\frac{1}{1+l'}[A_\xi,\ A'_\alpha] + \frac{4l'}{(1+l')^2}[B_\xi,\ A'_\alpha]. \tag{3.25}$$

命 $l \to l'$, 并考虑到: $$\delta'_\alpha B_\xi = -[B_\xi,\ A'_\alpha], \tag{3.26}$$

成立

$$\delta'_\alpha A_\xi + \frac{2}{1+l}\delta'_\alpha B_\xi \to -\frac{1}{1+l'}[A_\xi,\ A'] - \frac{2(1-ll')}{(1+l)(1+l')^2}[B_\xi,\ A'_\alpha]. \tag{3.27}$$

将(3.27)式代入(3.19)式,再与(3.24)式相比较,在 $l \to l'$ 时,我们证明了

$$\partial_\xi(X_\alpha - \delta'_\alpha UU^{-1}) = 0, \tag{3.28}$$

同理可证明对变量 η 也成立同样的式子．现在选择边界条件

$$U(l,\ \xi\to\infty)=U(l',\ \xi\to\infty)=I, \tag{3.29}$$

可知 X_α 与 $\delta'_\alpha UU^{-1}$ 在边界上有相同行为．于是我们有

$$\delta'_\alpha UU^{-1}=\frac{l}{l-l'}(\Lambda'_\alpha-\Lambda_\alpha). \tag{3.30}$$

证明(3.9)的步骤几乎与以上全同．由于

$$\begin{aligned}\partial_\xi U'&=-\frac{l'}{1+l'}\left(A_\xi U'+\frac{2}{1+l'}B_\xi U'\right)\\ \partial_\xi U'^{-1}&=\frac{l'}{1+l'}\left(U'^{-1}A_\xi+\frac{2}{1+l'}U'^{-1}B_\xi\right).\end{aligned} \tag{3.31}$$

仿以前的讨论可以算出

$$\begin{aligned}\partial_\xi(\delta_\alpha U'U'^{-1})=&-\frac{l'}{1+l'}\left\{[A_\xi,\ \delta_\alpha U'U'^{-1}]+\frac{2}{1+l'}[B_\xi,\ \delta U'U'^{-1}]\right.\\ &\left.+\delta_\alpha A_\xi+\frac{2}{1+l'}\delta_\alpha B_\xi\right\}.\end{aligned} \tag{3.32}$$

(3.21)式可以用另一种方式变形为

$$\begin{aligned}\partial_\xi(\Lambda_\alpha-\Lambda'_\alpha)=&\left[A_\xi,\ \frac{l'}{1+l'}(\Lambda'_\alpha-\Lambda_\alpha)+\frac{l'-l}{(1+l)(1+l')}\Lambda_\alpha\right]\\ &+\left[B_\xi,\ \frac{l'}{1+l'}(\Lambda'_\alpha-\Lambda_\alpha)+\frac{(l'-l)(1-ll')}{(1+l)^2(1+l')^2}\Lambda_\alpha\right],\end{aligned} \tag{3.33}$$

遂得

$$\begin{aligned}\partial_\xi\left[\frac{l'}{l'-l}(\Lambda_\alpha-\Lambda'_\alpha)\right]=&-\frac{l'}{1+l'}\left\{\left[A_\xi,\ \frac{l'}{l'-l}(\Lambda_\alpha-\Lambda'_\alpha)\right]\right.\\ &+\frac{2}{1+l'}\left[B_\xi,\ \frac{l'}{l'-l}(\Lambda_\alpha-\Lambda'_\alpha)\right]\\ &\left.-\frac{1}{1+l}[A_\xi,\ \Lambda_\alpha]-\frac{2(1-ll')}{(1+l)^2(1+l')}[B_\xi,\ \Lambda_\alpha]\right\}\end{aligned} \tag{3.34}$$

将(3.34)式与(3.32)式比较，并考虑到(2.5)式与　$\delta_\alpha B_\xi=-[B_\xi,\ \Lambda_\alpha]$，　(3.35)

在 $l\to l'$ 时，遂有(3.9)式．同理对变量 η 也有同样式子．

完全同于以上计算可得：　$[\delta_a^{(m)},\ \delta_b^{(n)}]\psi=C_{ab}^c\delta_c^{(m+n)}\psi.$　(3.36)

我们看到，在 CZ 形式的 SSM 理论中，对于二维 Majorana 旋量场的变分间存在 Kac-Moody 的“场代数”，这值得注意．

4．讨　　论

对于任何一种能写出拉氏函数(或等效的产生函数)的二维手征模型，可以考虑由某个群 G 引起的导致 $\delta\mathscr{L}$ 等于某 2 维散度的场变量的变换．这种变换必须在对某参数 l 展式的零次幂式中给出运动方程的形式，同时这个变换又必须与 Lax-pair 相联系．经过适当变形之后就可以求得作为 Noether 流的各阶 Brézin 类型的流．在 SSM 理论中，用 CZ 形式也同样导致了 Kac-Moody 代数关系．值得注意的是这种代数结构现在是由共同

存在的标量场 A_μ 诱导出来的，不能在 ψ 自己的范围内单独存在，因而这种 Kac-Moody 类型的旋量场代数是超对称的结论.

我们可以回忆一下规范场的情况. 首先作第一类规范变换，然后令常数 $\alpha \rightarrow \alpha(x)$，导致了补偿场——规范场的存在，进而建立了规范场的统一理论. 现在情况是，首先使场变量作常数矩阵 T 的变换，然后令常数矩阵 $T \rightarrow \Lambda(x) = UTU^{-1}$，而 U 满足 Lax-pair，这时为了保证 $\delta\mathscr{L}$ 由 2-维散度表达，出现了无穷多守恒流和 Kac-Moody 代数结构. 我们现在不知道能否建立更一般的理论作超模型的讨论. 另外，2 维旋量场 ψ 的变分存在 Kac-Moody 代数的物理含义也还是不清楚的.

作者深深感谢侯伯宇的帮助和启发性的讨论.

参 考 文 献

[1] M. Lüscher & K. Polmeyer, *Nucl. Phys.*, **B137**(1978), 46.
有关手征模型方面的总结见乔玲丽：1980年广州基本粒子理论会议文集.
[2] E. Brézin et al., *Phys. Lett.*, **82B**(1979), 442.
Chou K. C. & Song X. C., *Scientia Sinica*, **A25**(1982), 716.
[3] C. Zachos, *Phys. Rev.*, **D21**(1980), 3462.
[4] D. Gross & A. Neveu, *Phys. Rev.*, **D10**(1974), 3235.
[5] P. di Vecchia & S. Ferrara, *Nucl. Phys.*, **B130**(1977), 93.
E. Witten, *Phys. Rev.*, **D16**(1977), 2991.
Z. Popowicz & L.-L. Chau Wang, *Phys. Lett.*, **B98**(1981), 253.
[6] L. Curtright & C. K. Zachos, *Phys. Rev.*, **D21**(1980), 411.
[7] 乔玲丽，吴咏时，侯伯宇，葛墨林，中国科学，**A10**(1982), 907.
[8] Hou B. Y., Ge M. L. & Wu Y. S., *Phys. Rev.*, **D24**(1981), 2238.
[9] Ge M. L. & Wu Y. S, *Phys. Lett.*, **B108**(1982), 411.
[10] L.-L. Chau, Ge M. L. & Wu Y. S., *Phys. Rev.*, **D25**(1982), 1080.
[11] L.-L. Chau, Ge M. L. & Wu Y. S., *Phys. Rev.*, **D25**(1982), 1086.
[12] L. Dolan & A. Roos, *Phys. Rev.*, **D22**(1980), 2018.
[13] V. G. Kac, *Math USSR*, **2**(1968), 127.
R. Moody, *J. Algebra*, **10**(1968), 211.
[14] L. Dolan, *Rockefeller preprint*, **RU81/B5**(1981).

NONLOCAL INFINITELY CONSERVED CURRENTS AND KAC-MOODY ALGEBRAIC STRUCTURE OF O(N) SUPER-CHIRAL MODEL

WU YONG-SHI
(*Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica*)

GE MO-LIN
(*Lanzhou University*)

ABSTRACT

Based on the Curtright-Zachos's formulation of O(N) Super-chiral model we derive a set of infinitely conserved currents via Noether analysis by introducing an extended local transformation. We show that there appears Kac-Moody-type algebraic structure for the variation 2-dimensional spinor ψ in the theory.