第 8 卷 第 1 期 高 能 物 理 与 核 物 理 Vol. 8, No. 1
1984 年 1 月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS Jan., 1984

原子核的玻色子描述与修正的 Jancovici-Schiff 代换

杨 泽 森
(北京大学物理系)

摘 要

本文按照原来的 Jancovici-Schiff 代换的形式改造了 Janssen 等人的变换中的第二个步骤，构成一种修正的 Jancovici-Schiff 代换，借此可摆脱"物理"子空间及准高斯近似的限制，建立一种利用玻色子描述求原子核的费米子波函数的方法.

一、引 言

由于原子核的低集体激发谱表现出玻色谱的特征，已经发展了若干种玻色描述方法．在严格的玻色子展开理论中，为了与泡利原理一致，通常是用理想玻色子建立起玻色子态空间，再把其中的"物理"子空间与原子核的态空间相对应，不过到目前为止，只能说是在理论形式上做到了这一点．假设已经求得玻色子哈密顿量，如何求它的"物理"本征态? Janssen 等人曾提出一种变换[1]，把问题分成两个方面，即按两个步骤来处理．第一步求 $\mathscr{H}^+$ 的本征态，这里 $\mathscr{H}$ 是玻色子哈密顿量，它是用理想玻色子算符表达的，$\mathscr{H}^+$ 是 $\mathscr{H}$ 的厄米共轭．在这个步骤中可以偏离物理子空间的限制，但要用理想玻色子的真空态和产生算符表示出 $\mathscr{H}^+$ 的本征态．第二步是把 $\mathscr{H}^+$ 的本征态变换为 $\mathscr{H}$ 的本征态．在第一个步骤中不要求 $\mathscr{H}^+$ 的本征态局限于物理子空间，这点是重要的，至于实际上感兴趣的玻色子态，是否便于用理想玻色子的真空态及产生算符表达，在很大程度上依赖于所研究的问题．现在假定第一个步骤已经完成，于是可以形式地表达出 $\mathscr{H}$ 的物理本征态，但从实际运用的观点看来，这样表达的态矢量仍然是难于处理的.

Jancovici 和 Schiff (1964) 讨论无规相近似法 (RPA) 时曾经证明[2]，在一种准高斯近似下，可借助玻色子波函数构成原来的费米子哈密顿量 H 的本征态．我们将把这一结果称为 Jancovici-Schiff 代换．据此，可按两个步骤求 H 的本征态，第一步求 $\mathscr{H}$ 的本征态，这时也允许偏离物理子空间，因此和采用上述 Janssen 等人的变换时的第一个步骤是相似的．可是第二步是返回到费米子态空间，而且比 Janssen 等人的变换到物理子空间的方法变得容易实现了．不过为了利用这种优点，必须摆脱准高斯近似的限制.

本文 1982 年 3 月 18 日收到.

下面我们将按照 Jancovici-Schiff 代换的形式改造 Janssen 等人的变换中的第二个步骤，构成一种修正的 Jancovici-Schiff (MJS) 代换. 借助这种代换，能够摆脱物理子空间的限制和准高斯条件的限制，建立一种利用玻色子描述求费米子波函数的方法.

二、Janssen 等人的变换与修正的 Jancovici-Schiff 代换

本节的目的是在 Dyson 表示下建立 MJS 代换的公式. 设 ξ_μ^+ 是产生一个处在状态 (μ) 的费米子的产生算符，$b_{\mu\nu}^+$ 是理想玻色子的产生算符，而 $|0\rangle$ 及 $|0)$ 分别为费米子及理想玻色子真空态，于是

$$\xi_\mu|0\rangle = 0 \tag{2.1}$$

$$\xi_\mu^+\xi_\nu + \xi_\nu\xi_\mu^+ = \delta_{\mu\nu} \tag{2.2}$$

$$\xi_\mu^+\xi_\nu^+ + \xi_\nu^+\xi_\mu^+ = 0 \tag{2.3}$$

$$b_{\mu\nu}|0) = 0 \tag{2.4}$$

$$b_{\mu\nu}^+ = -b_{\nu\mu}^+ \tag{2.5}$$

$$b_{\mu\nu}b_{\alpha\beta}^+ - b_{\alpha\beta}^+b_{\mu\nu} = \delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta} - \delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\alpha} \tag{2.6}$$

$$b_{\mu\nu}^+b_{\alpha\beta}^+ - b_{\alpha\beta}^+b_{\mu\nu}^+ = 0 \tag{2.7}$$

在 Dyson 玻色子展开中[1]，费米子态矢量 $|\Psi\rangle$ 与玻色子态矢量 $§\Psi)$ 之间的对应如下式所示：

$$§\Psi) = U|\Psi\rangle \tag{2.8}$$

其中 U 是 Usui 的变换算符[1,3]：

$$U = \langle 0|e^{\frac{1}{2}\sum\limits_{\mu\nu} b_{\mu\nu}^+\xi_\nu\xi_\mu}|0) \tag{2.9}$$

相应地，哈密顿量 H 的玻色子表示 $\mathscr{H}_D$ 定义如下：

$$UH = \mathscr{H}_D U \tag{2.10}$$

其他算符的玻色子表示也可同样定义. 对于 $\xi_\mu\xi_\nu$ 等基本算符，有

$$U\xi_\mu\xi_\nu = b_{\nu\mu}U \tag{2.11}$$

$$U\xi_\mu^+\xi_\nu = \left(\sum_\lambda b_{\mu\lambda}^+b_{\nu\lambda}\right)U \tag{2.12}$$

$$U\xi_\mu^+\xi_\nu^+ = B_{\mu\nu}^+U \tag{2.13}$$

其中

$$B_{\mu\nu}^+ = b_{\mu\nu}^+ - \sum_{\lambda\lambda'} b_{\mu\lambda}^+b_{\nu\lambda'}^+b_{\lambda\lambda'} \tag{2.14}$$

按照(2.8)，只有物理的玻色子态矢量才能看作费米子态的玻色子像. 设玻色子哈密顿量 $\mathscr{H}_D$ 已经求出(给定 H 后，直接利用 (2.10)—(2.13) 即可求出 $\mathscr{H}_D$)，为了构成它的物理本征态，Janssen 等人在文献 [1] 中提出利用 $\mathscr{H}_D^+$ 的本征态实行变换的办法. 设 $R(b^+)|0)$ 是 $\mathscr{H}_D^+$ 的本征态：

$$\mathscr{H}_D^+R(b^+)|0) = \varepsilon R(b^+)|0) \tag{2.15}$$

他们由此得到

$$\mathscr{H}_DR(B^+)|0) = \varepsilon R(B^+)|0) \tag{2.16}$$

其中

$$R(B^+) \equiv R(b^+)|_{b^+_{\mu\nu} \to B^+_{\mu\nu}} \tag{2.17}$$

就是说，只要 $R(b^+)|0)$ 满足(2.15)，而 $R(B^+)|0)$ 不是零，则后者是 $\mathscr{H}_D$ 的本征态，本征值仍为 ε. 这就是 Janssen 等人的变换的内容．采用这种办法时，第一步是解方程(2.15)求 $R(b^+)|0)$，这时允许 $R(b^+)|0)$ 偏离物理子空间．第二步是把 $R(b^+)$ 中的 $b^+_{\mu\nu}$ 换成 $B^+_{\mu\nu}$，构成 $R(B^+)|0)$，这是 $\mathscr{H}_D$ 的本征态，而且是物理态矢量．可是由于 B^+ 的结构比较复杂，即使有了 $R(b^+)|0)$，也还是难于处理 $R(B^+)|0)$. 我们要做的是按照 Jancovici-Schiff 代换的形式来改造 Janssen 等人的变换中的第二个步骤，就是说，不去把 $R(b^+)|0)$ 变换到物理子空间，而是利用它找出原来的哈密顿量 H 的本征态．为了建立相应的公式，以 U^+ 作用于(2.15)两端，注意

$$U^+\mathscr{H}^+_D = HU^+ \tag{2.18}$$

有

$$HU^+R(b^+)|0) = \varepsilon U^+R(b^+)|0) \tag{2.19}$$

由(2.11)及(2.9)可得

$$U^+b^+_{\mu\nu} = \xi^+_\mu\xi^+_\nu U^+ \tag{2.20}$$

$$U^+|0) = |0\rangle \tag{2.21}$$

故

$$U^+R(b^+)|0) = R(\xi^+_\mu\xi^+_\nu)U^+|0) = R(\xi^+_\mu\xi^+_\nu)|0\rangle \tag{2.22}$$

其中

$$R(\xi^+_\mu\xi^+_\nu) \equiv R(b^+)|_{b^+_{\mu\nu} \to \xi^+_\mu\xi^+_\nu} \tag{2.23}$$

把(2.22)代回(2.19)得到：

$$HR(\xi^+_\mu\xi^+_\nu)|0\rangle = \varepsilon R(\xi^+_\mu\xi^+_\nu)|0\rangle \tag{2.24}$$

由此可见，只要 $R(b^+)|0)$ 满足(2.15)，而 $R(\xi^+_\mu\xi^+_\nu)$ 不是零，则 $R(\xi^+_\mu\xi^+_\nu)|0\rangle$ 是费米子哈密顿量 H 的本征态，能量本征值仍为 ε. 我们把这个结果称为修正的 Jancovici-Schiff (MJS) 代换．在求方程 (2.15) 的解时，也允许偏离物理子空间，而对于费米子态矢量 $R(\xi^+_\mu\xi^+_\nu)|0\rangle$ 来说，当然不存在违反泡利原理的问题．这个 MJS 代换与原来的 Jancovici-Schiff 代换十分相似，不同之处是：它不受准高斯近似的限制，而且 $R(b^+)|0)$ 是 $\mathscr{H}^+_D$ 的本征态，而不是 $\mathscr{H}_D$ 的本征态．另外，当 $\mathscr{H}^+_D$ 的本征态已经求出，并且写成了 $R(b^+)|0)$ 的形式，那么 $R(\xi^+_\mu\xi^+_\nu)|0\rangle$ 当然比 $R(B^+)|0)$ 易于处理．

三、在 Holstein-primakoff 表示下的 MJS 代换

在 Holstein-primakoff 展开中，费米子态矢量 $|\Psi\rangle$ 与玻色子态矢量 $|\Psi)$ 之间的对应如下式所示[1]：

$$|\Psi) = U_M|\Psi\rangle \tag{3.1}$$

其中 U_M 为 Marumori 等人的变换算符[4,1]：

$$U_M = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!!\sqrt{(2m-1)!!}} \langle 0|\Big(\sum_{\mu\nu} b^+_{\mu\nu}\xi_\nu\xi_\mu\Big)^m|0) \tag{3.2}$$

相应地，哈密顿量的玻色子表示 $\mathscr{H}_M$ 由下式定义：

$$U_MH = \mathscr{H}_MU_M \tag{3.3}$$

把(3.2)与上节的(2.9)式比较看出：

$$U_M = \frac{1}{\sqrt{(\hat{n}_B - 1)!!}}\,U \tag{3.4}$$

其中

$$\hat{n}_B = \sum_{\mu\nu} b^+_{\mu\nu}\, b_{\mu\nu} = 2\sum_{\mu<\nu} b^+_{\mu\nu}\, b_{\mu\nu} \tag{3.5}$$

由(3.3)及(3.4)有

$$\left\{\sqrt{(\hat{n}_B - 1)!!}\;\mathscr{H}_M \frac{1}{\sqrt{(\hat{n}_B - 1)!!}}\right\} U = UH \tag{3.6}$$

就是说,

$$\left\{\sqrt{(\hat{n}_B - 1)!!}\;\mathscr{H}_M \frac{1}{\sqrt{(\hat{n}_B - 1)!!}}\right\}$$

符合 $\mathscr{H}_D$ 的定义,所以用 $\mathscr{H}^+_M$ 构成的与(2.15)相当的方程是:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{(\hat{n}_B - 1)!!}}\;\mathscr{H}^+_M \sqrt{(\hat{n}_B - 1)!!}\right\} R(b^+)|0) = \varepsilon R(b^+)|0) \tag{3.7}$$

可见,当我们用哈密顿量的 Holstein-primakoff 表示建立玻色子描述时,MJS 代换的内容如下:如果 $R(b^+)|0)$ 满足方程(3.7)而 $R(\xi^+_\mu\xi^+_\nu)$ 不为零,则 $R(\xi^+_\mu\xi^+_\nu)|0\rangle$ 是H的本征态,能量本征值为 ε.

四、在生成坐标方法中的 MJS 代换

按照 Jancovici 和 Schiff 在文献[2]中采用的生成坐标方法,费米子态矢量 $|\Psi\rangle$ 表示为

$$|\Psi\rangle = \int |\Phi_0(Z)\rangle f(Z)\,dZ \tag{4.1}$$

其中

$$|\Phi_0(Z)\rangle = e^{\frac{1}{2}\sum_{\mu\nu} Z^*_{\mu\nu}\xi^+_\mu\xi^+_\nu}|0\rangle \tag{4.2}$$

生成坐标 $Z_{\mu\nu}$ 关于 (μ, ν) 的交换为反对称的:

$$Z_{\mu\nu} = -Z_{\nu\mu} \tag{4.3}$$

在文献[2]及[1]中用如下的 $G(Z)$ 作为 (Z)-表象的波函数:

$$G(Z) = \int \langle\Phi_0(Z)|\Phi_0(Z')\rangle f(Z')\,dZ' = \langle\Phi_0(Z)|\Psi\rangle \tag{4.4}$$

其次,这些作者把 Hill-wheeler 方程变换为如下的微分方程:

$$\mathscr{H}\left(Z, \frac{\partial}{\partial Z}\right)\cdot G(Z) = \varepsilon G(Z) \tag{4.5}$$

其中 $\mathscr{H}\left(Z, \frac{\partial}{\partial Z}\right)$ 是哈密顿量的微分算子,符号"·"代表微分算子对于 Z 的函数的作用. $\mathscr{H}\left(Z, \frac{\partial}{\partial Z}\right)$ 的定义可表示如下:

$$\mathscr{H}\left(Z, \frac{\partial}{\partial Z}\right) \cdot \langle \Phi_0(Z) | \Psi \rangle = \langle \Phi_0(Z) | H | \Psi \rangle \tag{4.6}$$

现在我们需要利用(2.15)在 (Z)-表象中的微分方程形式叙述 MJS 代换．按照文献[1]，可把这样的微分方程写成：

$$\mathscr{H}^{(+)}\left(Z, \frac{\partial}{\partial Z}\right) \cdot R(Z) = \varepsilon R(Z) \tag{4.7}$$

其中的记号“$(+)$”代表 (Z)-表象中的一种厄米共轭运算，其主要特点是

$$Z_{\mu\nu}^{(+)} = \frac{\partial}{\partial Z_{\mu\nu}} \tag{4.8}$$

$$\frac{\partial^{(+)}}{\partial Z_{\mu\nu}} = Z_{\mu\nu} \tag{4.9}$$

其他方面则和通常一样． 例如对于算子 A_1 及 A_2 之积以及作为特殊算子看待的复常数 C，有

$$(A_1 A_2)^{(+)} = A_2^{(+)} A_1^{(+)} \tag{4.10}$$

$$C^{(+)} = C^* \tag{4.11}$$

因此有了 $\mathscr{H}\left(Z, \frac{\partial}{\partial Z}\right)$ 之后，即可根据(4.8)—(4.11)求出 $\mathscr{H}^{(+)}\left(Z, \frac{\partial}{\partial Z}\right)$.

这样，MJS 代换就意味着，由方程(4.7)的解构成的费米子态矢量 $R(\xi_\mu^+ \xi_\nu^+)|0\rangle$ 是哈密顿量 H 的本征态，能量本征值为 ε. 为了根据 (4.7) 式证明这一结论，可以从基本算符 $\xi_\mu \xi_\nu$, $\xi_\mu^+ \xi_\nu$ 及 $\xi_\mu^+ \xi_\nu^+$ 与相应微分算子之间如下的关系出发：

$$\left\langle \Phi_0(Z) \right| \xi_\mu \xi_\nu = \frac{\partial}{\partial Z_{\nu\mu}} \cdot \left\langle \Phi_0(Z) \right| \tag{4.12}$$

$$\left\langle \Phi_0(Z) \right| \xi_\mu^+ \xi_\nu^+ = \left(\sum_\lambda Z_{\mu\lambda} \frac{\partial}{\partial Z_{\nu\lambda}} \right) \cdot \left\langle \Phi_0(Z) \right| \tag{4.13}$$

$$\left\langle \Phi_0(Z) \right| \xi_\mu^+ \xi_\nu^+ = \left(Z_{\mu\nu} - \sum_{\lambda\lambda'} Z_{\mu\lambda} Z_{\nu\lambda'} \frac{\partial}{\partial Z_{\lambda'\lambda}} \right) \cdot \left\langle \Phi_0(Z) \right| \tag{4.14}$$

这导致与(4.6)相应的关系：

$$\left\langle \Phi_0(Z) \right| H = \mathscr{H}\left(Z, \frac{\partial}{\partial Z}\right) \cdot \left\langle \Phi_0(Z) \right| \tag{4.15}$$

现在把“·”所代表的微分运算表示为算符对态矢量作用的形式．为此，用 $|0))$ 代表在 Z-表象中波函数为常数(与 Z 无关)的状态，即

$$\boldsymbol{Z}_{\mu\nu}^{(+)} |0)) = 0 \tag{4.16}$$

$$((0| \boldsymbol{Z}_{\mu\nu} = 0 \tag{4.17}$$

其中 $\boldsymbol{Z}_{\mu\nu}$ 及 $\boldsymbol{Z}_{\mu\nu}^{(+)}$ 在 Z-表象的微分算子分别为 $Z_{\mu\nu}$ 及 $\frac{\partial}{\partial Z_{\mu\nu}}$，$((0|$ 代表 $|0))^{(+)}$. 于是(4.15)可写成

$$\langle \Phi_0(\boldsymbol{Z}) |0)) H = \mathscr{H}(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Z}^{(+)}) \langle \Phi_0(\boldsymbol{Z}) |0)) \tag{4.18}$$

这里要引用一种广义的共轭运算，对于 $\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Z}^{(+)}$ 组成的算符以及 $|0))$，它意味着$(+)$运算，对于费米子算符及$|0\rangle$，则是通常的厄米共厄，因此由(4.18)式得出：

$$H((0| \Phi_0(\boldsymbol{Z}^{(+)}) \rangle = ((0| \Phi_0(\boldsymbol{Z}^{(+)}) \rangle (\mathscr{H}(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Z}^{(+)}))^{(+)} \tag{4.19}$$

其中: $$((0|\Phi_0(\boldsymbol{Z}^{(+)})\rangle = ((0|e^{\frac{1}{2}\sum\limits_{\mu\nu}\xi_\mu^+\xi_\nu^+\boldsymbol{Z}_{\mu\nu}^{(+)}}|0\rangle \tag{4.20}$$

把(4.7)也写成算符作用于态矢量的形式,则

$$(\mathscr{H}(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Z}^{(+)}))^{(+)}R(\boldsymbol{Z})|0)) = \varepsilon R(\boldsymbol{Z})|0)) \tag{4.21}$$

以 $((0|\Phi_0(\boldsymbol{Z}^{(+)})\rangle$ 作用于此式两端,利用(4.19),得出:

$$H((0|\Phi_0(\boldsymbol{Z}^{(+)})\rangle R(\boldsymbol{Z})|0)) = \varepsilon((0|\Phi_0(\boldsymbol{Z}^{(+)})\rangle R(\boldsymbol{Z})|0)) \tag{4.22}$$

由(4.16)、(4.17)及(4.20)有

$$((0|\Phi_0(\boldsymbol{Z}^{(+)})\rangle R(\boldsymbol{Z})|0)) = R(\xi_\mu^+\xi_\nu^+)|0\rangle \tag{4.23}$$

其中: $$R(\xi_\mu^+\xi_\nu^+) \equiv [R(\boldsymbol{Z})]_{\boldsymbol{Z}_{\mu\nu}\to\xi_\mu^+\xi_\nu^+} \tag{4.24}$$

因此(4.22)变为: $$HR(\xi_\mu^+\xi_\nu^+)|0\rangle = \varepsilon R(\xi_\mu^+\xi_\nu^+)|0\rangle \tag{4.25}$$

这就是我们要证明的结果.

我们看到,如果把 $(\boldsymbol{Z}_{\mu\nu}, \boldsymbol{Z}_{\alpha\beta}^{(+)})$ 表示为 $(b_{\mu\nu}^+, b_{\alpha\beta})$,则上述证明过程正是前面从(2.15)证明(2.24)的过程. 这是因为,在这种表示下,Jancovici-Schiff 的生成坐标方法直接导致 Dyson 展开.

以上建立了 MJS 代换. 它避免了求玻色子哈密顿量的物理本征态的问题,又摆脱了原来的 Jancovici-Schiff 代换中的准高斯近似,只要 $R(b^+)|0)$ 或 $R(Z)$ 不是完全非物理的,不等于零的 $R(\xi_\mu^+\xi_\nu^+)|0\rangle$ 就是原来的费米子哈密顿量的本征态. 在 Dyson 表示或者在 Jancovici 等人的生成坐标方法中,玻色子哈密顿量一般是非厄米的(但是只有 $\mathscr{H}_D^+$ 或 $\mathscr{H}^{(+)}$ 的实本征值才能看作H的本征值),在某些特殊情形也可以选出厄米形式. 在 Holstein-Primakoff 表示中,总是可以选出厄米的 $\mathscr{H}_M$.

参 考 文 献

[1] D. Janssen, F. Donau, S. Franendorf and R. V. Jolos, *Nucl. Phys.*, **A172**(1971), 145.
[2] B. Jancovici and D. H. Schiff, *Nucl. Phys.*, 58(1964), 678.
[3] T. Usui, *Progr. Theor. Phys.*, **23**(1960), 787.
[4] T. Marumori et al., *Progr. Theor. Phys.*, **31**(1964), 1009.

A MODIFIED JANCOVICI-SCHIFF SUBSTITUTION FOR BOSON DESCRIPTIONS OF NUCLEI

YANG ZE-SEN (YANG TSE-SEN)
(*Peking University*)

ABSTRACT

A modified Jancovici-Schiff substitution is constructed by reforming the second step used in the transformation of Janssen et al. according to the form of the original Jancovici-Schiff substitution. Based on this MJS substitution the boson descriptions can be used to find fermion state vectors of nuclei without the use of the physical subspace and of the quasi-gaussian approximation.