第9卷 第2期 高能物理与核物理 Vol. 9, No. 2
1985年3月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS Mar., 1985

$U(15)$ 模型下大形变核 $E2$ 算符之研究*

吴华川
(苏州大学)

摘　要

本文用调整算符内系数的办法,对 $U(15)$ 模型的 $E2$ 算符进行了研究. 结果表明: 由于引进了 g 玻色子, $SU(3)$ 限下的 $E2$ 跃迁在不同能带间跃迁几率比值的可变性、$B(E2)$ 在高角动量处的行为及高带首能带的跃迁方面,比 $U(6)$ 模型有改进.

一、引　言

用相互作用玻色子模型对大形变核的 $E2$ 跃迁问题的研究，首先由 Arima 和 Iachello[1] 在严格的 $SU(3)$ 限下进行. 他们取 $SU(3)$ 群生成元 $Q_M^{(2)}$ 作为 $E2$ 算符，给出了基带和 β 带带内 $B(E2)$ 的解析表达式. 并指出,在 $SU(3)$ 限附近,应存在 $\gamma\to\beta$ 跃迁对 $\gamma\to g$ 和 $\beta\to g$ 跃迁的优势.

然而,大多数大形变核并非处于严格的 $SU(3)$ 限. Warner 和 Casten[2] 对这类核的 $E2$ 跃迁进行了深入的研究. 他们工作的一个显著特点就是,不但考虑了组态混合，而且考虑了 $E2$ 算符本身的变化. 他们使用的 $E2$ 算符的一般形式为

$$T(E2)=\alpha\left[(d^+\tilde{s}+s^+\tilde{d})^{(2)}+\frac{R}{\sqrt{5}}(d^+\tilde{d})^{(2)}\right], \tag{1}$$

式中, R 可在 0——2.958 范围内变化. 通过数值计算得出,在 $SU(3)$ 限附近,存在 $\beta\to\gamma$ 和 $\gamma\to g$ 跃迁对 $\beta\to g$ 跃迁的优势,而且比率 $\beta\to g/\gamma\to g$ 为定值(≈ 0.15),与系数 R 无关. 他们还给出适用于整个稀土区大形变核的 R 的范围: $-1.2<R<-0.5$. Bijker 和 Dieperink[3] 利用内禀态进行解析计算,也得到类似的结果.

但是,实验事实和 IBA 的微观计算表明,在大形变区 g 玻色子的作用不可忽略,因而模型也可由 $U(6)$ 扩展为 $U(15)$[4-7]. 文献[5]对 $U(15)$ 模型严格的 $SU(3)$ 限下的 $E2$ 跃迁进行了讨论,指出 g 玻色子的引进对基带带内跃迁几率在高角动量处的行为比 $U(6)$ 模型有显著改进. 本文则拟对 $SU(3)$ 限附近一般情形下的 $E2$ 跃迁进行研究，特别是要弄清 g 玻色子对 $E2$ 跃迁的影响. 文中所涉及到的计算，均在 $SU(15)\supset SU(3)\supset SO(3)$ 基[8]上进行.

本文 1983 年 11 月 29 日收到.
* 中国科学院科学基金资助的课题.

二、E2 算符的一般形式

$U(15)$ 模型 $SU(3)$ 限下 $E2$ 算符为[5]:

$$T(E2)=q_1(d^+\tilde{s}+s^+\tilde{d})^{(2)}+q_2(d^+\tilde{d})^{(2)}+q_3(d^+\tilde{g}+g^+\tilde{d})^{(2)}+q_4(g^+\tilde{g})^{(2)}, \tag{2}$$

其中 $q_1=4\sqrt{\frac{7}{15}}$, $q_2=-11\sqrt{\frac{2}{21}}$, $q_3=36\sqrt{\frac{1}{105}}$, $q_4=-2\sqrt{\frac{33}{7}}$. 一般地说，当偏离 $SU(3)$ 限时，$q_1\sim q_4$ 均应发生变化. 但是,我们注意到 $q_2/q_1=-1.242$ 接近于 (1) 式中 $R/\sqrt{5}$ 在 $SU(3)$ 限下的值 -1.323,而且 q_3、q_4 所对应的两项均与 g 玻色子有关. 因而,我们可将 3、4 两项视为 $U(15)$ 模型与 $U(6)$ 模型中 $E2$ 算符之差，并用一个统一的参数 R_2 来表示这种差别的程度. 于是(2)式可整理为:

$$T(E2)=\alpha\left\{(d^+\tilde{s}+s^+d)^{(2)}+R_0\frac{(d^+\tilde{d})^{(2)}}{\sqrt{5}}+R_2[(g^+\tilde{d}+d^+\tilde{g})^{(2)}-1.236\,(g^+\tilde{g})^{(2)}]\right\}. \tag{3}$$

在 $SU(3)$ 限下，$R_0=-2.778$，$R_2=1.286$. 与文献[2]类似,我们有

$$B(E2;L_i\to L_f)=(M_1+R_0M_0+R_2M_2)^2, \tag{4}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}M_1&=(2L_i+1)^{-\frac{1}{2}}\langle f\|(s^+\tilde{d}+d^+\tilde{s})^{(2)}\|i\rangle,\\ M_0&=(2L_i+1)^{-\frac{1}{2}}\left\langle f\left\|\frac{(d^+\tilde{d})^{(2)}}{\sqrt{5}}\right\|i\right\rangle,\\ M_2&=(2L_i+1)^{-\frac{1}{2}}\langle f\|[(g^+\tilde{d}+d^+\tilde{g})^{(2)}-1.236(g^+\tilde{g})^{(2)}]\|i\rangle.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

上式中 f 和 i 分别表示跃迁的末态与初态.

由于我们对 $U(15)$ 模型其他极限的数学结构及物理背景尚不十分清楚，所以不能确定 $R_0=0$ 与 $R_2=0$ 时 $T(E2)$ 的物理内容. 但是我们感兴趣的仅仅是 $SU(3)$ 限附近的 $E2$ 跃迁规律,在这样一个区域内,我们可以认为: R_2 的减小，反映 g 玻色子分量的下降;而(与文献[2]类似地)减小 R_0 的绝对值，则在某种程度上与 $SU(3)$ 限到其他极限的过渡有关.

三、计算结果及讨论

本节中,我们首先在纯 $SU(15)\supset SU(3)$ 态上进行计算,以观察参数 R_0、R_2 的变化对 $B(E_2)$ 的影响，并与 $U(6)$ 模型下的结果进行比较. 不考虑 Hamiltonian 中微扰的影响，会引起结果的一些偏差,但是用纯 $SU(3)$ 态，更能突出 $U(15)$ 模型 $E2$ 算符的主要特点. 微扰的影响,在本节最后(4)讨论.

1. $\gamma\to\beta$ 和 $\gamma\to g$ 跃迁对 $\beta\to g$ 跃迁的优势

表 1.左半部给出 $N=16$ 情形下几种跃迁的 $E2$ 矩阵元值. (右半部为考虑微扰后的相应值,详见本节 4 的讨论)

我们利用(4)式,在参数平面 R_0-R_2 (图1)上讨论 $B(E2)$ 的行为.

表 1　几种典型的 $E2$ 跃迁矩阵元

跃迁类型*	M_1	M_0	M_2	M_1	M_0	M_2
$g\to g$	5.149	−1.015	3.427	5.186	−0.925	3.543
$\beta\to g$	0.944	−0.073	−0.892	0.933	−0.101	−0.865
$\gamma\to g$	0.439	0.194	0.079	0.480	0.192	0.012
$\gamma\to\beta$	0.125	0.013	0.289	−0.017	−0.027	0.305
	纯 $SU(3)$ 态			考虑微扰后		

* 所有跃迁均为 $2^+\to 0^+$.

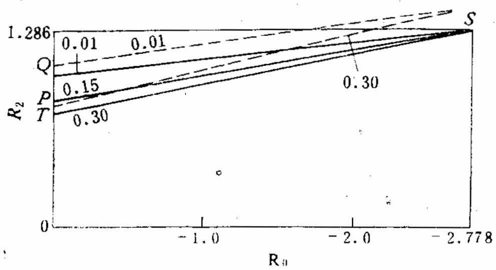
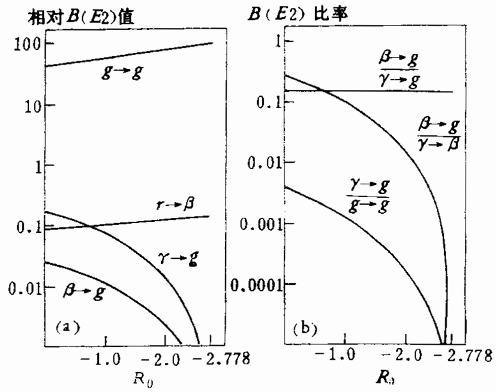


图 1　R_0–R_2 参数平面(每根直线上部标注的数字为相应的 $K_{\beta\gamma}$ 值)

图 1 中 S 点(坐标为 $-2.778, 1.286$)与 $SU(3)$ 限对应．该点上，显然有 $B(E2;\gamma\to g)\equiv B(E2;\beta\to g)\equiv 0$．当偏离 S 点时，情形比 $U(6)$ 复杂．但若让 R_0 与 R_2 成比例地变化，即沿以 S 为起点的直线变化，则文献[2]中所得出的关于 $E2$ 跃迁的主要特点，可以很好地再现．由 (3) 式关于 R_0 和 R_2 的线性性质可知，当参数沿上述某一确定直线变化时，不同 $SU(3)$ 表示间的跃迁几率成比例．若令

$$K_{\beta\gamma}=\frac{B(E2;2_\beta^+\to 0_g^+)}{B(E2;2_\gamma^+\to 0_g^+)},$$

则沿 SP 线有 $K_{\beta\gamma}\equiv 0.15$ (与 $U(6)$ 中相应比值同)． 图 2 中给出 SP 线上几种 $E2$ 跃迁的相对 $B(E2)$ 值 (a) 及其比率 (b) 随参数 R_0 之变化．



(a) 相对 $B(E2)$ 值　　(b) $B(E2)$ 值间的比率

图 2　相对 $B(E2)$值及其比率

($N=16$；所有跃迁均为 $2^+\to 0^+$)

将图 2 与文献[2]中 Fig. 2 对照，可以看出，$B(E2)$ 相对值及其比率随参数变化规律是极其相似的．在 $U(15)$ 模型中，$\gamma\to g$ 和 $\gamma\to\beta$ 对 $\beta\to g$ 的优势依然存在，且有 $K_{\beta\gamma}=0.15$；在 $R_0=-2.778$ 处，$\gamma\to g$ 及 $\beta\to g$ 的 $B(E2)$ 值均为 0．

值得注意的是，在 $U(15)$ 模型中，$K_{\beta\gamma}$ 是可以随参数平面中直线的斜率而改变的．例如，图 1 中 SQ 线与 ST 线分别与 $K_{\beta\gamma}=0.01$ 和 0.30 对应．文献[2]中所引用的稀土区大形变核的 $E2$ 跃迁中 $K_{\beta\gamma}$ 的实验值，均可由 $U(15)$ 模型在 ST 与 SQ 所夹区域内得到．显然，$K_{\beta\gamma}$ 对 R_2 的变化更为敏感，这表明，g 玻色子的分量大小在决定 $K_{\beta\gamma}$ 值中起关键作用．

$K_{\beta\gamma}$ 的这种可变性，也可以从几何模型的角度定性地说明．Warner 和 Casten[2] 指出，通过 $U(6)$ 模型与几何模型的类比可求得 $K_{\beta\gamma}=\frac{B_\gamma}{2B_\beta}=\frac{C_\gamma}{2C_\beta}$，其中 B_β、B_γ、C_β 和 C_γ 为各能带的内禀等效质量和刚性参数．对每一确定的能带，这些参数均为定值，因而 $K_{\beta\gamma}$ 亦为定值．引进 g 玻色子后，即考虑了 16 极运动．对于这种系统若要应用 Bohr 和 Mottelson 的几何模型，则要通过某种‘重整化’的手续，将 16 极运动吸收到内禀参数（B、C）中去．随着 g 玻色子分量的变化，形变核的内禀参数亦产生变化，因此 $K_{\beta\gamma}$ 也随之而变．

由于稀土区大形变核的 $K_{\beta\gamma}$ 在一个相当大的范围内变化，所以 $U(15)$ 模型在拟合 $K_{\beta\gamma}$ 数据时要比 $U(6)$ 好．但是，必须指出，$U(15)$ 模型的 $\gamma\to g/g\to g(2^+\to 0^+$ 跃迁) 比率则比 $U(6)$ 模型给出的低，与实验值的符合也不如 $U(6)$ 好．

以上计算中取 $N=16$，但由于 $SU(15)\supset SU(3)\supset SO(3)$ 的 cfp 在 $N\geqslant 10$ 区域内表现出缓慢变化的规律[8]，故上面的讨论对整个大形变区均适用．

2. 高角动量处的 E2 跃迁

在 $U(6)$ 模型中，由于截断效应，在高角动量处 $B(E2)$ 值急剧下降，低于实验值．引进 g 玻色子后，下降变慢[5],[7]．下面我们以基带带内 $L+2\to L$ 跃迁为例，具体分析 g 玻色子的效应．计算中，取 R_0 为定值 -1.0，让 R_2 变化，以观察它对 $B(E2)$ 值的影响．

图 3 中，三条实线分别表示与几何模型、$U(15)$ 模型与 $U(6)$ 模型相对的 $B(E2)$ 值；

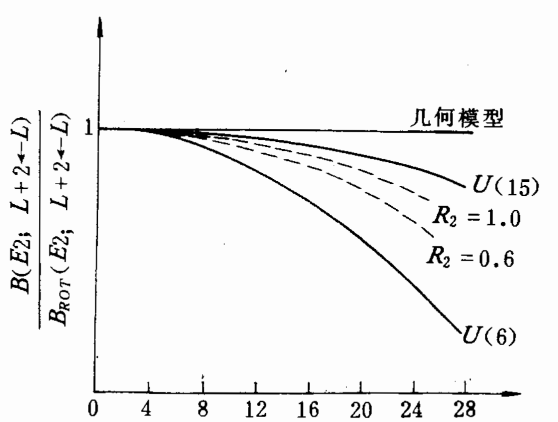


图 3 $g\to g$ 跃迁的相对 $B(E2)$ 值 ($N=16$)

两条虚线分别与 $R_2=1.0$ 和 0.6 对应($U(15)$模型的实线对应 $R_2=1.286, R_0=-2.778$)．有关常数选择，要使 $L=0$ 时 $\frac{B(E2)}{B_{ROT}(E2)}=1$．显然，当 R_2 值减小时，高角动量处$B(E2)$值下降加快，即由 $U(15)$ 的规律向 $U(6)$ 的规律靠近．这种情形是不难理解的．因为，当 L 增大时，$SU(3)$ 态的 g 玻色子分量也增加[10]，因而 M_2 的贡献所占比重也增加；所以 R_2 越小，$B(E2)$ 在大角动量处的下降就越快．在上述意义上，我们可以将 R_2 视为某种实现由 $U(15)$ 到 $U(6)$ 模型过渡的参量．

当唯象地定出 R_0、R_2 参数后，可以得到介于 $U(15)$ 与 $U(6)$ 实线间的某根 $B(E2)$ 曲线．但是，由于目前高角动量处 $B(E2)$ 的实验误差很大，而且某些核存在回弯现象，现在还难以用实验数据精确检验 R_0、R_2 参数定得是否好．但是，可以认为，由于能够调节 R_2，使系统(在某种意义上)处于 $U(15)$ 模型到 $U(6)$ 模型之间的中间状态，从而使理论更加合理．

3. 不同 $SU(3)$ 表示之间的跃迁

$U(15)$ 模型的典型能谱如图 4 所示，图中W为能带编号．

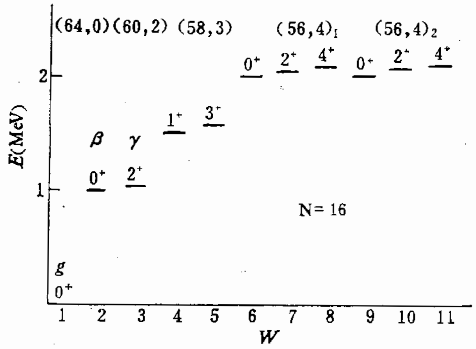


图 4　$U(15)$ 能谱 ($N=16$)

(只画出每个能带的带首；能级上符号为 K^π)

图 4 中 $SU(3)$ 表示(58,3)和 $(56,4)_2$ 对应的能带在 $U(6)$ 模型中是不存在的．$U(6)$ 模型中，由 $SU(3)$ 表示 $(\lambda,\mu\geqslant 3)$ 中任一能带到基带的 $E2$ 跃迁矩阵元恒为 0 (与参数 R 无关)．因此，这类跃迁(实验上是存在的)就无法用调节 R 参数来解释．然而，在 $U(15)$ 模型中，只要参数 R_0、R_2 偏离图 1 中 S 点 (严格的 $SU(3)$ 限)，则这种跃迁矩阵元可以不为零；而且，当参数沿以 S 为起点的直线变化时，各不同 $SU(3)$ 表示间的跃迁几率成比例．

典型的大形变核 ^{168}Er 有丰富的能带[9](图 4 所示的能带，除 $W=4,6$ 的带外，其余的均在实验上发现了)，且已测量了多种方式的跃迁．下面，我们在不考虑 Hamiltonian 微扰项的前提下，仅通过选择参数 R_0、R_2，计算出 $B(E2)$ 值，并与实验作一定性比较．计算中我们仍取参数在 SP 线上变化．各能带到 g、β 和 γ 带的相对 $B(E2)$ 值列于表 2 中．

统观上表所列跃迁，凡理论予言的相对 $B(E2)$值较大的跃迁，无一例外地被测到．注意到本文中所用能带排列与文献[10]中的排列完全相同，说明这种排列既最有利于能谱

表 2　^{168}Er 各能带到 g、β 和 γ 带的 $E2$ 跃迁几率 ($K_{\beta\gamma}=0.15$)

K^π	初态带首能量(keV)	$W_i\to W_f$	$L_i\to L_f$	理论 $\frac{B(E2)}{B(E2;2^+_\gamma\to 0^+_g)}$	实验*
0+	1217	2−1	2−0	0.15	V
2+	821	3−1	2−0	1.00	V
3+	1653	5−1	3−2	≈0	
		5−2		≈0	
		5−3		≈0	V
2+	1930	7−1	2−2	≈0	V
		7−2		0.27	V
		7−3		0.04	
4+	2055	8−1	4−2	≈0	
		8−2		≈0	
		8−3		0.52	V
0+	1422	9−1	2−2	0.32	V
		9−2		≈0	
		9−3		≈0	V
2+	1848	10−1	2−2	1.52	V
		10−2		0.04	
		10−3		0.01	V
4+	2030	11−1	4−2	≈0	
		11−2		≈0	
		11−3		≈0	

* "√"表示实验[9]上已测到这种跃迁.

拟合，又最有利于 $E2$ 跃迁的拟合．这种'自洽性'若被证明普遍存在的话，则它是 $U(15)$ 模型的内在合理性的表现.

4. 能量微扰对 $E2$ 跃迁的影响

上面的讨论均未考虑能量微扰项的影响．由于迄今只有极少数大形变核被测定具有 $SU(3)$ 表示 $(4N-6,3)$ 和 $(4N-8,4)_2$ 所包含的能带，所以利用微扰项在 $U(15)$ 模型下对能谱的拟合工作尚不能系统地进行．但文献[10]对 ^{168}Er 的微扰计算表明，虽然 β 带与 γ 带的劈裂过小，但对 $W\geqslant 5$ 的所有高带首能带理论与实验的符合是很好的．计算中 Hamiltonian取为

$$H=-kQ\cdot Q-k'L\cdot L+\xi(P_1^+P_1)+\eta(P_2^+P_2),\tag{6}$$

其中 P_1^+、P_2^+ 分别为 $s-d$ 玻色子和 g 玻色子的对算符；$\xi\doteq-6\mathrm{keV}$，$\eta\doteq 17\mathrm{keV}$．作为一个例子，我们用(6)式的微扰及其参数，计算了 $N=16$ 情形下的 M_1、M_0 和 M_2 值，列于表 1 右半部．按照这些矩阵元，图 1 参数平面上 $0.3>K_{\beta\gamma}>0.01$ 的区域变为两条虚线所夹区域．这表明，在考虑能量微扰后，仍可适当选取 R_0，R_2 值，使 $K_{\beta\gamma}$ 与实验有较好的符合．但是，即使考虑了上述微扰，$\gamma\to g/g\to g$ 的 $(2^+\to 0^+)$比率自小于实验值．这或许是因为，$U(15)$ 模型的优越性主要在较高角动量和较高能量处，而在低态上的某些方面却不如 $U(6)$ 好.

四、结　　语

综上所述，在 $U(15)$ 模型中，只要适当选择 $E2$ 算符表示式内的参数，$U(6)$ 模型中

$E2$ 跃迁的主要特点可以很好地再现．由于 g 玻色子的效应，$U(15)$ 模型在下述方面具有优越性：i) $K_{\beta\gamma}$ 的可变性；ii) 高角动量处 $B(E2)$ 的行为可处于 $U(15)$ 与 $U(6)$ 的中间状态，以适应 g 玻色子分量可变的事实；iii) 可用调节 R_0、R_2 的方式解释高能带的跃迁，使得理论方法有一致性． 在一定的、局限的意义上，我们可将 R_2 视为决定 $U(15)$ 模型到 $U(6)$ 模型过渡的参量．但是，在解释 $\gamma\rightarrow g/g\rightarrow g$ 跃迁几率比值上，$U(15)$ 模型却不如 $U(6)$ 模型．这或许表明，在低能态的某些问题上 $U(6)$ 模型比 $U(15)$ 模型更好些．

周孝谦教授建议作此工作，与作者进行过多次有益的讨论，并转达了 Dr. D. D. Warner 的有益建议．作者谨对他们表示谢意．

参　考　文　献

[1] A. Arima and F. Iachello, *Ann. Phys. (N. Y.)*, **111** (1978), 201.
[2] D. D. Warner and R. F. Casten, *Phys. Rev.*, C**25**(1982), 2019.
[3] R. Bijker and A. E. L. Dieperink, *Phys. Rev.*, C**26**(1982), 2688.
[4] R. D. Ratna Raju, *Phys. Rev.*, C**23**(1981), 518.
[5] H. C. Wu, *Phys. Lett.*, **110**B(1982), 1.
[6] 凌寅生，高能物理与核物理，**6**(1982)，77.
[7] R. D. Ratna Raju, *J. Phys. G*, **8**(1982), 1663.
[8] H. C. Wu and J. Q. Chen, Preprint.
[9] W. F. Davidson et al., *J. Phys.*, 7(1981), 455.
[10] H. C. Wu and X. Q. Zhou, *Nucl. Phys.*, to be published.

A STUDY OF *E*2 OPERATOR IN *U*(15) MODEL FOR DEFORMED NUCLEI

Wu Hua-chuan
(Suzhou University)

Abstract

In this paper, the $E2$ operator in the scheme of $U(15)$ model is studied by means of varying the parameters in the $E2$ operator itself. If is shown that, compared with the $U(6)$ model, the $U(15)$ model has some advantages in explaining the flexibility of the ratio of the $E2$ transition probabilitys between different bands, the behavior of $B(\mathrm{E2})$ at high-spin states and transitions between high bands.