

(0—1/2) 电磁束缚系统的电磁形状因子*

宋孝同 戴又善
(杭州大学)

摘 要

利用(0—1/2)电磁束缚系统的相对论性 B-S 波函数,精确到 $O(\alpha)$ 量级,求得了复合系统的电磁形状因子的解析表达式.

一、引 言

近年来利用 B-S 方程对相对论性的电磁束缚系统进行了不少研究^[1-3]. 在 [1] 中求得了(0—1/2)电磁束缚态的近似 B-S 波函数. 在 [2]、[3] 中讨论了这类系统的产生与衰变. 本文进一步研究电子在这种复合系统上的散射,由此求出其电磁形状因子.

二、散射矩阵元与等效电磁流

与过程

$$e^- + (0-1/2) \rightarrow e^- + (0-1/2). \quad (1)$$

相应的两个最低阶费曼图见图 1. 如果认为束缚态与电磁场的相互作用分别是由结合成(0—1/2)系统的束缚粒子来实现的,则可取原始电磁相互作用哈密顿密度为

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_i(x) = & icQ_a \left[\phi_a^\dagger(x) \frac{\partial}{\partial x_\mu} \phi_a(x) \right] A_\mu(x) - ic\bar{\psi}(x) \gamma_\mu A_\mu(x) \psi(x) \\ & - icQ_b \bar{\psi}_b(x) \left[\gamma_\mu A_\mu(x) - i \frac{\kappa}{4m_b} \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right] \psi_b(x). \end{aligned} \quad (2)$$

利用复合粒子量子场论的标准方法^[4],不难得出与图 1(a) (b) 相应的 S 矩阵元为

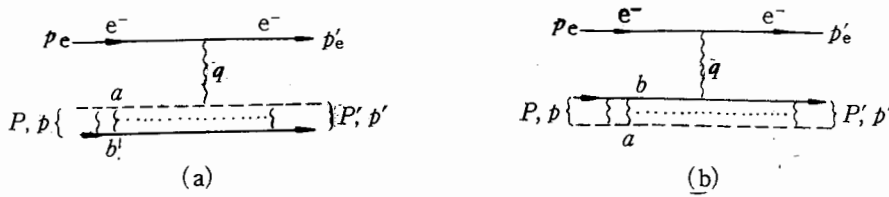
$$\begin{aligned} \langle P', p'_c | S^{(i)} - 1 | P, p_c \rangle = & ie^2 (2\pi)^4 \delta^4(P + p_c - P' - p'_c) \\ & \cdot \sqrt{\frac{m_c^2 m_b^2}{p_{c0} p'_{c0} p_0 p'_0}} \cdot \frac{1}{q^2} \cdot B_\mu^{(i)} \bar{u}(p'_c) \gamma_\mu u(p_c), \end{aligned} \quad (3)$$

(i = a, b)

其中

本文 1984 年 5 月 4 日收到.

* 中国科学院科学基金资助的课题.

图1 e^- 在 $(0-1/2)$ 电磁束缚态上散射的最低阶费曼图

$$B_{\mu}^{(a)} = \frac{-Q_a}{(2\pi)^4} \int d^4p \bar{\chi}_{P'}(p - \mu_b q) [i(\mu_b \hat{p} - \hat{p}) + m_b] \cdot [2(\mu_a P + p) - q]_{\mu} \cdot \chi_P(p), \quad (4a)$$

$$B_{\mu}^{(b)} = \frac{-iQ_b}{(2\pi)^4} \int d^4p \bar{\chi}_{P'}(p + \mu_a q) [(p + \mu_a P)^2 + m_a^2] \cdot \left[\gamma_{\mu} + \frac{\kappa}{2m_b} \sigma_{\mu\nu} q_{\nu} \right] \cdot \chi_P(p). \quad (4b)$$

式中 P, P', p_e, p'_e 分别是初末态复合粒子和电子的四动量, Q_a, Q_b 是自旋为零和 $1/2$ 的 a, b 粒子的电荷数 (以 e 为单位), κ 是自由 b 粒子的反常磁矩值. $\chi_P(p)$ 是束缚态波函数, $u(p_e)$ 是电子的自由 Dirac 旋量. 并且 $q = -(p_e - p'_e) = P - P'$, $\mu_a = \frac{m_a}{m_a + m_b}$,

$$\mu_b = \frac{m_b}{m_a + m_b}.$$

利用[1]中给出的 $(0-1/2)$ 电磁束缚系统的基态近似 B-S 波函数

$$\chi_P(p) = N f(p, P) \left(1 + \frac{i\hat{p}}{2m_b} \right) u(P), \quad (5)$$

$$f(p, P) = \{ [p^2 + \mu_a \mu_b P^2 + m_a m_b] [(\mu_a P + p)^2 + m_a^2] [(\mu_b P - p)^2 + m_b^2] \}^{-1}. \quad (6)$$

归一化常数为 $N = 8 \sqrt{\frac{2\pi m_b}{\mu_a}} (\alpha\mu)^{3/2}$; $\mu = \frac{m_a m_b}{m_a + m_b}$. $u(P)$ 满足 $(i\hat{p} + m_B)u(P) = 0$.

将(5)、(6)代入(4)可得

$$B_{\mu}^{(i)} = \frac{N^2}{(2\pi)^4} \int d^4p \bar{u}(P') \frac{\Gamma_{\mu}^{(i)} u(P)}{D_i} \quad (i = a, b), \quad (7)$$

其中

$$\Gamma_{\mu}^{(a)} = -Q_a \left[1 + \frac{i}{2m_b} (\hat{p} - \mu_b \hat{q}) \right] [i(\mu_b \hat{p} - \hat{p}) + m_b] \cdot [2(p + \mu_a P) - q]_{\mu} \left(1 + \frac{i\hat{p}}{2m_b} \right), \quad (8a)$$

$$\Gamma_{\mu}^{(b)} = -iQ_b \left[1 + \frac{i}{2m_b} (\hat{p} + \mu_a \hat{q}) \right] \left[\gamma_{\mu} + \frac{\kappa}{2m_b} \sigma_{\mu\nu} q_{\nu} \right] \cdot \left(1 + \frac{i\hat{p}}{2m_b} \right). \quad (8b)$$

并且

$$D_a = [(p - \mu_b q)^2 + \mu_a \mu_b P^2 + m_a m_b] [(p + \mu_a P - q)^2 + m_a^2] [(p - \mu_b P)^2 + m_b^2]^2$$

$$\cdot [p^2 + \mu_a \mu_b p^2 + m_a m_b] [(p + \mu_a p)^2 + m_a^2], \quad (9a)$$

$$D_b = [(p + \mu_a q)^2 + \mu_a \mu_b p'^2 + m_a m_b] [(p + \mu_b p)^2 + m_a^2] [(p - \mu_b p)^2 + m_b^2] \\ \cdot [(p - \mu_b p + q)^2 + m_b^2] [p^2 + \mu_a \mu_b p^2 + m_b^2]. \quad (9b)$$

用费曼参数化方法积去 $d^4 p$, 并注意 $\bar{u}(P') \hat{q} u(P) = 0$ 可得

$$B_\mu^{(i)} = \bar{u}(P') \left[I_1^{(i)}(q^2) \gamma_\mu + I_2^{(i)}(q^2) \frac{\sigma_{\mu\nu} q_\nu}{2m_B} + I_3^{(i)}(q^2) \frac{i q_\mu}{m_B} \right] u(P), \quad (10)$$

其中 $I_{1,2,3}^{(i)}(q^2)$ 都是 q^2 的实函数:

$$I_j^{(i)} = \frac{Q_i \pi^2 N^2}{(2\pi)^4 m_B^6} \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \int_0^{x_2} dx_3 \int_0^{x_3} dx_4 (x_4)^{\delta_{ia}} F_j^{(i)} \quad \left(\begin{array}{l} i = a, b \\ j = 1, 2, 3 \end{array} \right). \quad (11)$$

被积函数为

$$F_1^{(a)} = \frac{a_1}{l^4} + \frac{a_1'}{l^3} + \frac{a_1''}{l^2}; \quad F_2^{(a)} = \frac{a_2}{l^4} + \frac{a_2'}{l^3};$$

$$F_3^{(a)} = \frac{a_3}{l^4} + \frac{a_3'}{l^3}.$$

$$l = c_1(c_2 - c_1 - \mu_b) \frac{q^2}{m_B^2} + [\mu_a \mu_b \varepsilon + (\mu_b - \mu_a) \varepsilon c_2 + c_2^2],$$

$$c_1 = \mu_b x_3 + \mu_a x_2 - x_1; \quad c_2 = \mu_b x_4 + \mu_a x_2 - \mu_a,$$

$$a_1 = \frac{6}{\mu_b} [\mu_a \mu_b \varepsilon + 2\mu_a \mu_b c_2 + (2\mu_b - \mu_a) c_2^2 - c_2^3],$$

$$a_1' = \frac{-1}{\mu_b^2} [\mu_b(\mu_a + 2\mu_b) - 3\mu_b c_2 + c_2^3]; \quad a_1'' = \frac{1}{4\mu_b^2},$$

$$a_2 = -a_1; \quad a_2' = \frac{1}{\mu_b^2} [\mu_b(\mu_a + 2\mu_b) - 2\mu_b c_2 + c_2^3],$$

$$a_3 = \frac{3}{\mu_b} (\mu_b - c_2 + 2c_1)(\mu_b \varepsilon + 2\mu_b c_2 - c_2^2);$$

$$a_3' = \frac{1}{2\mu_b^2} (\mu_b - c_2 + 2c_1)(\mu_b - c_2).$$

对 $F_j^{(b)}$ 有类似的表示式, 其中 $\varepsilon \equiv [(m_a + m_b)^2 - m_B^2]/m_B^2 \approx \frac{2\Delta}{m_B} = \mu_a \mu_b \alpha^2$, Δ 是束缚系统基态结合能.

为了从(3)、(7)式求出形状因子, 必须先求出积分(11), 由于 $F_j^{(i)}$ 很复杂, 很难直接进行解析计算, 为此我们首先在小 q^2 区域, 将(11)式展成 q^2 的幂级数, 引进适当的变量变换可把四重积分化为二重积分, 然后在精确到 $O(\alpha)$ 的精度下, 求出各项系数, 最后再把求得的幂级数还原为初等函数的解析表达式, 并通过解析延拓, 把它从小 q^2 延拓到 q^2 的整个物理区域. 结果给出

$$I_1^{(a)} = Q_a \frac{1 + (\mu_b - \mu_a) \frac{q^2}{4\alpha^2 m_a^2}}{\left(1 + \frac{q^2}{4\alpha^2 m_a^2}\right)^3}; \quad I_2^{(a)} = -I_1^{(a)}; \quad I_3^{(a)} = 0, \quad (12)$$

$$I_1^{(b)} = Q_b \frac{1 - \kappa \mu_a \frac{q^2}{4m_b^2}}{\left(1 + \frac{q^2}{4\alpha^2 m_b^2}\right)^2}; \quad I_2^{(b)} = Q_b \frac{\frac{1}{\mu_b}(\mu_a + \kappa)}{\left(1 + \frac{q^2}{4\alpha^2 m_b^2}\right)^2};$$

$$I_3^{(b)} = 0. \quad (13)$$

其中 $I_1^{(i)}$, $I_2^{(i)}$ 的计算精确到 $O(\alpha)$, 而 $I_3^{(a)} = 0 = I_3^{(b)}$ 则是严格的结果。由此得到相应于图 1 的总 S 矩阵元为

$$\langle P', p'_c | S - I | P, p_c \rangle = ie^2 (2\pi)^4 \delta^4(P + p_c - P' - p'_c) \cdot \sqrt{\frac{m_a^2 m_B^2}{p_{c0} p'_{c0} P_0 P'_0}}$$

$$\cdot \bar{u}(P') \left[(I_1^{(a)} + I_1^{(b)}) \gamma_\mu + (I_2^{(a)} + I_2^{(b)}) \frac{\sigma_{\mu\nu} q_\nu}{2m_B} \right] \cdot \frac{1}{q^2}$$

$$\cdot \bar{u}(p'_c) \gamma_\mu u(p_c). \quad (14)$$

定义(0-1/2)电磁束缚系统的等效电磁流

$$J_\mu = ie \bar{u}(P') \left[f_1(q^2) \gamma_\mu + f_2(q^2) \frac{\sigma_{\mu\nu} q_\nu}{2m_B} \right] u(P), \quad (15)$$

其中

$$f_1(q^2) = Q_a \frac{1 + (\mu_b - \mu_a) \frac{q^2}{4\alpha^2 m_a^2}}{\left(1 + \frac{q^2}{4\alpha^2 m_a^2}\right)^3} + Q_b \frac{1 - \kappa \mu_b \frac{q^2}{4m_b^2}}{\left(1 + \frac{q^2}{4\alpha^2 m_b^2}\right)^2}, \quad (16)$$

$$f_2(q^2) = -Q_a \frac{1 + (\mu_b - \mu_a) \frac{q^2}{4\alpha^2 m_a^2}}{\left(1 + \frac{q^2}{4\alpha^2 m_a^2}\right)^3} + Q_b \frac{\frac{1}{\mu_b}(\mu_a + \kappa)}{\left(1 + \frac{q^2}{4\alpha^2 m_b^2}\right)^2}. \quad (17)$$

值得指出的是, (15) 式定义的复合系统等效电磁流是守恒流, 即满足 $q_\mu J_\mu = 0$ 。根据有关 B-S 方程的流守恒的一般性讨论, 要在微扰计算中保证流守恒, 应计算全部的同阶图贡献, 并且 B-S 波函数应是 B-S 方程的严格解, 而在上面的计算中, $I_3^{(a)}$ 和 $I_3^{(b)}$ 分别严格为零, 与所取近似无关。因此图 1(a) 与图 1(b) 分别独立地满足流守恒。此外, 尽管在得到 (16)、(17) 时, 使用的是精确到 $O(\alpha)$ 量级的近似 B-S 波函数, 但仍能保证 (15) 是守恒流, 这表明在求解 B-S 波函数时所取的近似并未破坏流守恒条件。

三、电磁形状因子

由(15)、(16)、(17)式可得(0-1/2)电磁复合系统的电磁形状因子^[5]

$$G_E(q^2) = f_1(q^2) - f_2(q^2) \frac{q^2}{4m_B^2}$$

$$= Q_a \frac{1 + (\mu_b - \mu_a) \frac{q^2}{4\alpha^2 m_a^2}}{\left(1 + \frac{q^2}{4\alpha^2 m_a^2}\right)^3} \left(1 + \frac{q^2}{4m_B^2}\right)$$

比

(上
内
降

束

矩
磁

Q

这

$$+ Q_b \frac{1 + (\mu_a \mu_b + \kappa) \frac{q^2}{4m_b^2}}{\left(1 + \frac{q^2}{4\alpha^2 m_b^2}\right)^2}, \quad (18)$$

$$G_M(q^2) = f_1(q^2) + f_2(q^2) = Q_b \frac{\frac{1}{\mu_b} (1 + \kappa) - \kappa \mu_a \frac{q^2}{4m_b^2}}{\left(1 + \frac{q^2}{4\alpha^2 m_b^2}\right)^2}. \quad (19)$$

以电子在 ($\pi^\pm \mu^\mp$) 原子上的散射为例, (18)、(19) 式给出的电磁形状因子如图 2(a) 和

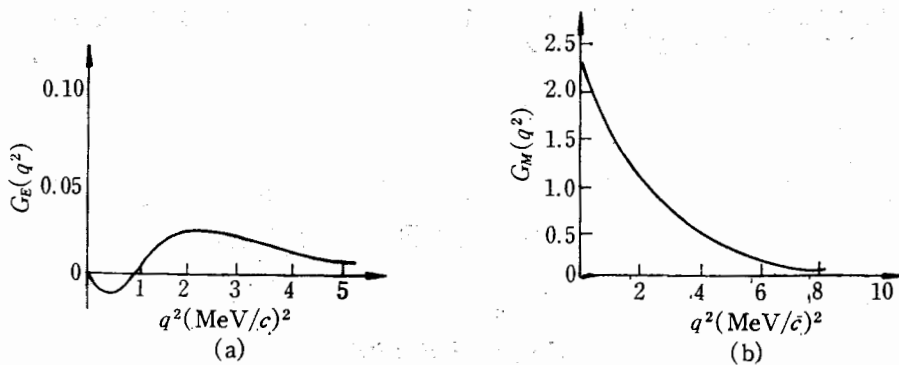


图 2 ($\pi^- \mu^+$) 系统的电磁形状因子

(b), 由此可见, 电形状因子的值很小, 这是因为系统是电中性的, 只是由于 π 和 μ 在系统内部有相对运动, 才使得电形状因子不全为零. 此外, 磁形状因子随 q^2 的增加而迅速下降. 在以上的结果中值得指出几点:

(1) 总电荷 $Q = G_E(0) = Q_a + Q_b$. 即复合系统的总电荷等于各组成粒子电荷和, 束缚效应不改变粒子的电荷值, 这与电荷的普适性一致.

(2) 总磁矩 $M_{\text{总}} = \frac{G_M(0)}{2m_B} = Q_b \frac{1 + \kappa}{\mu_b 2m_B} = Q_b \frac{1 + \kappa}{2m_b}$, 这意味着复合系统的总磁矩等于其中自旋为 1/2 的 b 粒子的总磁矩, 因为 $l=0$ 时, a 粒子 (自旋为零) 对系统总磁矩无贡献. 而反常磁矩为 $M_{\text{反}} = [G_M(0) - G_E(0)] \frac{1}{2m_B} = [Q_b (1 + \kappa) - \mu_b (Q_a + Q_b)] \frac{1}{2m_b}$ 对于 $Q_a + Q_b = 0$, $M_{\text{反}} = M_{\text{总}}$.

(3) 电荷均方半径

$$\begin{aligned} \sqrt{\langle r^2 \rangle} &= \sqrt{-6 \left[\frac{\partial G_E(q^2)}{\partial q^2} \right]_{q^2=0}} \approx \sqrt{\frac{3}{\alpha^2} \frac{(1 + \mu_a)m_b^2 + m_a^2}{m_a^2 \cdot m_b^2}} \\ &\approx \frac{1}{\alpha\mu} \end{aligned} \quad (20)$$

这与非相对论的约化质量为 μ 的原子玻尔半径 $a_0 = \frac{1}{\alpha\mu}$ 数量级相同, 这表明从近似 B-S

波函数求出的形状因子能给出合理的束缚系统的半径。对于 $(\pi^\pm \mu^\mp)$ 来说, $\sqrt{\langle r^2 \rangle} \approx 10^{-11}$ 厘米, 它远大于 π 介子本身的半径 $\sqrt{\langle r_\pi^2 \rangle} \approx 0.7 \times 10^{-13}$ 厘米。因此在描述 $(\pi\mu)$ 束缚态的 B-S 方程中把 π 介子看成是点粒子是相当好的近似。

从以上讨论可见, 本文求得的 $(0-1/2)$ 电磁束缚系统的形状因子满足一些基本的物理要求。

参 考 文 献

- [1] Ching Cheng-rui, Ho Tso-hsiu, Chang Chao-hsi, *Phys. Lett.*, 98B (1981), 456.
- [2] Song Xiao-tong, Ching Cheng-rui, *Physica Energiæ Fortis et Physica Nuclearis*, 4(1982), 394.
- [3] Song Xiao-tong, *ibid.*, 6(1982), 697.
- [4] Ho Tso-hsiu, Chang Chao-hsi, Huang Tao, *ACTA PHYSICA SINICA*, 4 (1980), 337.
- [5] R. G. Sachs, *Phys. Rev.*, 126 (1962), 2256.

ELECTROMAGNETIC FORM FACTORS OF $(0-1/2)$ ELECTROMAGNETIC BOUND SYSTEM

SONG XIAO-TONG DAI YOU-SHAN
(Hangzhou University)

ABSTRACT

Utilizing the relativistic B-S wave function of the $(0-1/2)$ electromagnetic bound system, the analytic expressions of the electromagnetic form factors of this system are obtained up to the order of $O(\alpha)$.

原理
后并
及远
导致
应的
但关
的实
的相

义下
G(或
引力
使用
可以
自旋
这种
效应
子干涉
COW

加
本