第9卷 第4期 高能物理与核物理 Vol. 9, No. 4
1985年7月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS July, 1985

带有分数电荷、磁单极子和异常光子的 $SO(10)\times SO(8)$ 模型

江向东 周咸建
（中国科学院高能物理研究所）

摘 要

本文构造了一个 $SO(10)\times SO(8)$ 大统一模型．它能容纳带分数电荷 $\left(\text{例如}\ \frac{e}{2}\ \text{或}\ \frac{e}{3}\right)$ 的色单态粒子，并且满足 Dirac 量子化条件 $\left(\text{当磁荷取值}\ \frac{1}{2e}\ \text{时}\right)$．理论预言了四代通常费米子和四代异常费米子．特别是模型中存在着不同于通常光子的异常光子，这些可以在今后的高能实验中去验证．

一、引 言

近年来，斯坦福大学报告了两个令人感兴趣的实验．一个是 Fairbank 等人发现了电荷可能为 $e/3$ 的粒子[1]；一个是 Cabrera 发现了可以解释带有一个 Dirac 磁荷 $g=\frac{1}{2e}$ 的磁单极子的事例[2]．如果颜色是禁闭的，那么由 Fairbank 等人发现的新粒子应是色单态．一并考虑这两个实验结果，意味着众所周知的 Dirac 量子化规则[3]的破坏．Dirac 规则是说，任意一个磁单极子的磁荷 g 和任意一个色单态粒子的电荷 q 必须遵循下式：

$$gq=n/2\ (n\ \text{为整数}). \tag{1}$$

尽管上述的两个实验结果至今尚未被再度证实，但它们与 Dirac 规则相冲突这件事，人们还是有兴趣讨论它．

假定上述两个实验是对的，再考虑到 Dirac 规则的理论基础的坚固性，为了让两个实验结果与 Dirac 规则相容，人们作了一些有趣的尝试[4-7]．Rubakov[4] 和 Barr 等人[5]提出的解决办法是：假定自然界除了 $U(1)_{em}$ 对称性外，还有一个局部 $U'(1)$ 对称性．此时被观测的分数电荷粒子也携带 $U'(1)$ 荷 q'，磁单极子也带有 $U'(1)$ 的磁荷 g'．这样，Dirac 规则变为：

$$gq+g'q'=n/2. \tag{2}$$

在文献[4]中，Rubakov 假定质子和中子带有与 $U'(1)$ 相应的电荷 q'，为了与 Eötvös-Dicke 实验[8]不矛盾，与 $U'(1)$ 相对应的新的精细结构常数 α' 必须非常小：

本文1984年3月1日收到．

$$\alpha' \lesssim 10^{-47}. \tag{3}$$

由于 α' 如此小，因此，对应 $U'(1)$ 的相互作用，很难与强、弱-电相互作用统一在一个大统一模型里．Barr 等人提出了另一种形式的模型[5]，即认为普通物质（通常的夸克和轻子）不带对应于 $U'(1)$ 的电荷，而只有反常物质（例如分数电荷色单态）带有带撇的电荷，这时候的 α' 不必小于通常的精细结构常数 α.

在 Barr 等人的文章里，规范群 G 最后破缺到 $H = SU(3)_c \times U(1)_{em} \times U'(1)_{em}$，考虑到色荷和色磁荷后，Dirac 量子化规则能表示为：

$$e^{i4\pi Q} = I, \tag{4}$$

其中 Q 是 Q_{em}、Q'_{em} 和 Y_c 的线性组合．而 Q_{em}、Q'_{em} 和 Y_c 分别是 $U(1)_{em}$、$U'(1)_{em}$ 和 $SU(3)_c$ 的生成元，I 是子群 H 的恒等表示．对于 Cabrera 提出的磁单极子，Dirac 规则可写成：

$$Q = Q_{em} + Q'_{em} + Y_c = n. \tag{5}$$

Barr 等人的文章中，所选的规范群是半单纯群 $SU(5) \times SU'(5)$．人们企图尝试[6-7]，在单纯群中，是否可以容纳上述想法．结果发现，这是相当困难的．最低秩的单纯群只能选 $SU(9)$ 和 $SO(18)$ 群，而且只能让 Fairbank 等人发现的分数电荷粒子带 $e/2$ 电荷1)．当然，更高秩的单纯群是可以使这种粒子带 $e/3$ 电荷，不过此时费米子就会太多，使得渐近自由性质被破坏．

本文想用 $SO(10) \times SO(8)$ 来讨论同样的问题．之所以选择这个群，是想使得我们的理论，不但能包含已经观察到的三代费米子，而且要能容纳上述两实验中发现的粒子，此外又与 Dirac 量子化条件相容．若用比 $SO(8)$ 更低秩的群，只需经过简单的尝试，便能得知这种低秩群模型不能容纳三代通常的费米子；若取比 $SO(8)$ 高秩的群，又会使费米子代数过多，将破坏 $SU(3)_c$ 的渐近自由性质．因此，我们用 $SO(10) \times SO(8)$ 作为规范群．我们选择的费米子表示为 $(\underline{16}, \underline{8})$，其中 $\underline{16}$ 是 $SO(10)$ 的 16 维不可约表示，而 $\underline{8}$ 是 $SO(8)$ 的 8 维旋量表示或矢量表示．这样，就会得到八代费米子：四代为通常的费米子，四代为异常的费米子（带 $U'(1)$ 电荷）．在电荷的一种填充下，此模型可容纳带 $e/2$ 电荷的色单态粒子，如同在文献[6—7]中一样．对于另一种填充，则能容纳 $e/3$ 电荷的色单态粒子，但这时会出现有些异常粒子带无理数电荷．

在这个模型中，我们选择了最简单的对称性自发破缺过程：

$$\begin{aligned} SO(10) \times SO(8) &\xrightarrow{M} SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y \times U'(1)_{em} \\ &\xrightarrow{M_w} SU(3)_c \times U(1)_{em} \times U'(1)_{em}. \end{aligned} \tag{6}$$

这样，当 $\sin^2\theta_w$ 的值与实验一致时，大统一标度 M 就和通常的标准大统一模型一样．

二、两种电荷算符 Q_{em} 和 Q'_{em}

对于半单纯群 $SO(10) \times SO(8)$，电荷算符一般可以写作：

$$Q_{em} = Q_{em(10)} \otimes I_{(8)} + I_{(10)} \otimes Q_{em(8)}. \tag{7}$$

1) 李政道教授回国时曾说到，有人把 Fairbank 等人的实验数据另法重处理，得到的分数电荷值为 0.48 e.

当它作用在某个表示 $D_{(10)}\otimes D_{(8)}$ 上时 ($D_{(10)}$ 和 $D_{(8)}$ 分别为 $SO(10)$ 和 $SO(8)$ 的某个表示)，$Q_{em(10)}$ 是 $SO(10)$ 的某个生成元，只作用在 $D_{(10)}$ 上． 而 $I_{(10)}$ 是 $D_{(10)}$ 空间的单位矩阵；同样，$Q_{em(8)}$ 是 $SO(8)$ 的某生成元，只作用在 $D_{(8)}$ 上，$I_{(8)}$ 则是 $D_{(8)}$ 表示空间的单位矩阵．符号"$\otimes$"表示矩阵直积．

同样，对于奇异电荷算符有：

$$Q'_{em}=Q'_{em(10)}\otimes I_{(8)}+I_{(10)}\otimes Q'_{em(8)}. \tag{8}$$

我们先讨论 $Q_{em(10)}$ 和 $Q'_{em(10)}$．

我们把费米子填充在 $D_{(10)}\otimes D_{(8)}=(\underline{16},\underline{8})$ 表示中，其中 $\underline{16}$ 是 $SO(10)$ 的 16 维旋量表示，$\underline{8}$ 是 $SO(8)$ 的 8 维旋量表示或矢量表示．

对应于 16 维旋量表示，$SO(10)$ 的五个对角生成元为[9]：

$$\begin{aligned}&2I_{12}=\sigma_z\otimes\sigma_z\otimes I\otimes I;\ 2I_{34}=I\otimes\sigma_z\otimes I\otimes I;\ 2I_{56}=\sigma_z\otimes I\otimes I\otimes\sigma_z;\\&2I_{78}=\sigma_z\otimes I\otimes\sigma_z\otimes\sigma_z;\ 2I_{9\bar{0}}=\sigma_z\otimes I\otimes\sigma_z\otimes I,\end{aligned} \tag{9}$$

其中 σ_z 是泡利矩阵 $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$，$I$ 是单位矩阵．(文献[9]中在上式的最前面还乘上一个 σ_z，因而是 32×32 矩阵，包含着两个不可约不等价的 16 维表示，约化为单个 16 维表示时，就取上面形式．)定义：

$$\begin{aligned}Q_{em(10)}&=\frac{1}{3}(3I_{34}+I_{56}-I_{78}+I_{9\bar{0}})\\&=\mathrm{diag}\Big(\frac{2}{3}\ \frac{2}{3}\ \frac{2}{3}\ 0\ -\frac{1}{3}\ -\frac{1}{3}\ -\frac{1}{3}\ -1\\&\qquad\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ 1\ -\frac{2}{3}\ -\frac{2}{3}\ -\frac{2}{3}\ 0\Big).\end{aligned} \tag{10}$$

在$(\underline{16},\underline{8})$ 表示中，$\underline{8}$ 里面 $Q_{em(8)}$ 荷为零的某个态所对应的 16 个态 [对应 $SO(10)$ 的 16 维表示]，它们的电荷就取上述矩阵中的值，相当于通常的 $SO(10)$ 模型中的一代费米子．例如取第一代，则填充如下：

$$\phi_L=(u_1\,u_2\,u_3\,v_e\,d_1\,d_2\,d_3\,e^-\,d_1^c\,d_2^c\,d_3^c\,e^+\,u_1^c\,u_2^c\,u_3^c\,N^c)_L, \tag{11}$$

u_i 和 d_i 分别为上、下夸克，i 为色指标，c 表示电荷共轭态．中性粒子 N^c 是 $SU(5)$ 单态．这时，色群 $SU(3)_c$ 和弱同位旋群 $SU(2)_L$ 是 $SO(10)$ 中的子群，就象通常的 $SO(10)$ 大统一模型中那样(它们的生成元的具体形式，可参考 [9])．

为使得普通费米子不带带撇的电荷，对于 16 维旋量表示，我们取：

$$Q'_{em(10)}=\mathrm{diag}\,(0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0). \tag{12}$$

对于 $SO(8)$ 群，它的四个互相对易的生成元可写为：

$$I'_{12},\ I'_{34},\ I'_{56},\ I'_{78}.$$

一般有：

$$\begin{aligned}Q_{em(8)}&=aI'_{12}+bI'_{34}+cI'_{56}+dI'_{78}\\Q'_{em(8)}&=a'I'_{12}+b'I'_{34}+c'I'_{56}+d'I'_{78}\end{aligned} \tag{13}$$

当选 $D_{(8)}$ 为旋量表示时，有：

$$I'_{12}=\sigma_z\otimes I\otimes I;\ I'_{34}=\sigma_z\otimes I\otimes\sigma_z;$$

$$I'_{56}=\sigma_z\otimes\sigma_z\otimes\sigma_z;\quad I'_{78}=\sigma_z\otimes\sigma_z\otimes I. \tag{14}$$

当选 $(\underline{16},\underline{8})$ 中 $SO(8)$ 的 8 维表示 $D_{(8)}$ 为矢量表示时，矢量表示的生成元为：

$$(\sigma_{rs})_{ij}=-i(\delta_{ri}\delta_{sj}-\delta_{rj}\delta_{si})\ (i,j=1,2,\cdots 8) \tag{15}$$

其中四个互相对易的记为：$\sigma_{12},\sigma_{34},\sigma_{56},\sigma_{78}$.

$Q_{em(8)}$ 和 $Q'_{em(8)}$ 可以由下面四个条件来确定：

1. 电荷 Q_{em} 和异常电荷 Q'_{em} 正交，即 $T_r(Q_{em}Q'_{em})=0$

2. 我们希望至少有三代通常的费米子出现在 $(\underline{16},\underline{8})$ 中，这些费米子的电荷与实验观察到的三代电荷相同，但不带异常电荷．这就要求，$SO(8)$ 的 8 维旋量表示（或矢量表示）中，至少有三个态，它们的 $Q_{em(8)}$ 和 $Q'_{em(8)}$ 的本征值都为零．

3. 应出现带分数电荷的色单态粒子，从而解释 Fairbank 等人的发现．因为据说 Fairbank 分数电荷值的不确定性，我们假定可取 $\frac{e}{3}$ 或 $\frac{e}{2}$.

4. 推广的 Dirac 量子化条件应得到满足．即对一般粒子，不论带色与否，要求下式成立：

$$Q_{em}+Q'_{em}+Y_c=n\ (\text{整数}). \tag{16}$$

按上述要求，当$(\underline{16},\underline{8})$ 中的 $\underline{8}$ 为 $SO(8)$ 旋量表示时，可以有两种情况：

$$(1)\quad Q_{em(8)}=\frac{1}{4}(I'_{12}+I'_{34})=\mathrm{diag}\left(\frac{1}{2}\ 0\ \frac{1}{2}\ 0\ -\frac{1}{2}\ 0\ -\frac{1}{2}\ 0\right)$$

$$Q'_{em(8)}=-\frac{1}{4}(I'_{56}+I'_{78})=\mathrm{diag}\left(-\frac{1}{2}\ 0\ \frac{1}{2}\ 0\ \ \frac{1}{2}\ 0\ -\frac{1}{2}\ 0\right) \tag{17}$$

这时，存在着色单态电荷为 $\frac{e}{2}$ 的粒子．

$$(2)\quad Q_{em(8)}=\frac{1-\sqrt{2}}{12}(I'_{12}+I'_{34})+\frac{1+\sqrt{2}}{12}(I'_{56}+I'_{78})$$

$$=\mathrm{diag}\left(\frac{1}{3}\ 0\ -\frac{\sqrt{2}}{3}\ 0\ -\frac{1}{3}\ 0\ \frac{\sqrt{2}}{3}\ 0\right)$$

$$Q'_{em(8)}=\left(\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{2}}{12}\right)(I'_{12}+I'_{34})+\left(\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{2}}{12}\right)(I'_{56}+I'_{78})$$

$$=\mathrm{diag}\left(\frac{2}{3}\ 0\ \frac{\sqrt{2}}{3}\ 0\ -\frac{2}{3}\ 0\ -\frac{\sqrt{2}}{3}\ 0\right). \tag{18}$$

这时会出现 $q=e/3$ 的色单态粒子．但在异常的代中，也会出现无理数电荷，这一点很新奇．

相应于旋量表示的总电荷算符，对 (1) 和 (2) 两种情况分别为：

$$(1)\ Q_{em}=\Big(\frac{2}{3}\ \frac{2}{3}\ \frac{2}{3}\ 0\ -\frac{1}{3}\ -\frac{1}{3}\ -\frac{1}{3}\ -1\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ 1$$

$$-\frac{2}{3}\ -\frac{2}{3}\ -\frac{2}{3}\ 0;\ \frac{1}{2}\ 0\ \frac{1}{2}\ 0\ -\frac{1}{2}\ 0\ -\frac{1}{2}\ \ 0\Big);$$

$$Q'_{em}=\Big(0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0$$

$$0\quad 0\quad 0\quad 0;\ -\frac{1}{2}\quad 0\quad \frac{1}{2}\quad 0\quad \frac{1}{2}\ 0-\frac{1}{2}\ 0\Big). \tag{19}$$

(2) $$Q_{em}=\Big(\frac{2}{3}\ \frac{2}{3}\ \frac{2}{3}\ 0\ -\frac{1}{3}\ -\frac{1}{3}\ -\frac{1}{3}\ -1\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ 1$$

$$-\frac{2}{3}\ -\frac{2}{3}\ -\frac{2}{3}\ 0;\ \frac{1}{3}\ 0\ -\frac{\sqrt{2}}{3}\ 0\ -\frac{1}{3}\ 0\ \frac{\sqrt{2}}{3}\ 0\Big);$$

$$Q'_{em}=\Big(0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0$$

$$0\quad 0\quad 0\quad 0;\ \frac{2}{3}\ 0\ \frac{\sqrt{2}}{3}\ 0\ -\frac{2}{3}\ 0\ -\frac{\sqrt{2}}{3}\ 0\Big). \tag{20}$$

定义 $SU(3)_c$ 的超荷算符:

$$Y_c=Y_{c(10)}\otimes I_{(8)}+I_{(8)}\otimes Y_{c(8)}$$

$$=\Big(\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ -\frac{2}{3}\ 0\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ -\frac{2}{3}\ 0\ -\frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{3}\ \frac{2}{3}\ 0\ -\frac{1}{3}\ -\frac{1}{3}\ \frac{2}{3}\ 0;\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\Big), \tag{21}$$

其中 $Y_{c(10)}=\frac{1}{3}(I_{78}+2I_{9\overline{0}}-I_{56})$, $Y_{c(8)}=0$.

这样可以验证 Dirac 量子化条件(17)式总是满足的.

当取 $(\underline{16},\underline{8})$ 中的 $\underline{8}$ 为 $SO(8)$ 的矢量表示时,满足了上述四个条件后,也可以有两种取法:

(1′) $$Q_{em(8)}=\frac{1}{2}(\sigma_{12}+\sigma_{34})\quad Q'_{em(8)}=\frac{1}{2}(\sigma_{12}-\sigma_{34}) \tag{22}$$

相应地, $Q_{em(8)}$ 的本征值为: $\Big(\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\ 0\ 0\ 0\ 0\Big)$;

$Q'_{em(8)}$ 的本征值为: $\Big(\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2}\ 0\ 0\ 0\ 0\Big)$. (23)

这时与旋量表示(1)类似,出现 $q=\frac{e}{2}$ 的色单态.

(2′) $$Q_{em(8)}=\frac{1}{3}\sigma_{12}+\frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_{34}\quad Q'_{em(8)}=\frac{2}{3}\sigma_{12}-\frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_{34} \tag{24}$$

相应的本征值为:

$$Q_{em(8)}=\Big(\frac{1}{3}\ -\frac{1}{3}\ \frac{\sqrt{2}}{3}\ -\frac{\sqrt{2}}{3}\ 0\ 0\ 0\ 0\Big);$$

$$Q'_{em(8)}=\Big(\frac{2}{3}\ -\frac{2}{3}\ -\frac{\sqrt{2}}{3}\ \frac{\sqrt{2}}{3}\ 0\ 0\ 0\ 0\Big). \tag{25}$$

这时类似于旋量表示的情况(2),不仅出现 $q=\frac{e}{3}$ 的色单态,而且有奇异的带无理数电

荷的粒子.

上面的所有情形，$SO(8)$ 的电荷算符 $Q_{em(8)}$ 和 $Q'_{em(8)}$ 的本征态中，都有四个 $Q_{em(8)}$ 和 $Q'_{em(8)}$ 的值同时为零的态．因此，此模型中有四代通常的费米子，它们不带 Q'_{em} 荷；还有四代异常的费米子，它们所带的 Q_{em} 荷与通常费米子不一样，因此出现了带分数电荷的色单态，同时它们又带有 Q'_{em} 电荷.

三、Higgs 自发破缺机制

最简单的对称性自发破缺过程如下：

$$SO(10) \times SO(8) \xrightarrow{M} SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y \times U'(1)_{em}$$
$$\xrightarrow{M_w} SU(3)_c \times U(1)_{em} \times U'(1)_{em}. \tag{26}$$

这是一个两阶段的破缺过程．为了实现第一阶段的破缺，我们可以选取 Higgs 场为 $(\underline{45}, \underline{1})$，$(\underline{16}, \underline{1})$，$(\underline{1}, \underline{28})$，$(\underline{1}, \underline{8})$ 和另一个下面要讲到的 Higgs 表示．其中 $\underline{45}$ 和 $\underline{16}$ 分别为 $SO(10)$ 的二阶反对称表示和旋量表示；$\underline{28}$ 和 $\underline{8}$ 分别为 $SO(8)$ 的二阶反对称表示和旋量表示.

记 $SO(10)$ 的 45 维二阶反对称表示的 Higgs 场为 ϕ_{ij}，$(i, j = 1, 2, \cdots 10)$，令：

$$\hat{\phi} = \sum I_{ij}\phi_{ij}. \tag{27}$$

它的真空期望值取为：

$$\langle \hat{\phi} \rangle = a(I_{56} - I_{78} + I_{9\bar{0}}) + b(I_{12} - I_{34}),$$

即取：

$$\langle \phi_{56} \rangle = -\langle \phi_{78} \rangle = \langle \phi_{9\bar{0}} \rangle = a,\ \langle \phi_{12} \rangle = -\langle \phi_{34} \rangle = b,\ a \neq b \sim M. \tag{28}$$

这样使得：

$$SO(10) \longrightarrow SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_{Y'} \times U'(1), \tag{29}$$

其中 $U(1)_{Y'}$ 和 $U'(1)$ 对应的算符(在旋量表示中)分别为：

$$\begin{aligned} Y' &= (I_{56} - I_{78} + I_{9\bar{0}}) \\ &= \mathrm{diag}\left(\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ -\frac{3}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ -\frac{3}{2}\ -\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\right. \\ &\qquad \left.-\frac{1}{2}\ \frac{3}{2}\ -\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\ \frac{3}{2}\right); \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} T_3^R &= (I_{12} - I_{34}) \\ &= \mathrm{diag}\ (0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ -1\ -1\ -1\ -1\ 1\ 1\ 1\ 1). \end{aligned} \tag{31}$$

再取 Higgs 场表示 $(\underline{16}\ \underline{1})$ 中 $SO(10)$ 的 16 维旋量表示 ϕ_i，它的非零真空期望值取为 $\langle \phi_{16} \rangle = C \sim M$，这样 Y' 和 T_3^R 破缺了，但它们的线性组合 $Y'' = -\frac{3}{2}T_3^R + Y'$ 依然没有破缺，令它相应于 $u''(1)$．于是，通过 $(\underline{45}, \underline{1})$ 和 $(\underline{16}, \underline{1})$，我们把：

$$SO(10) \times SO(8) \rightarrow SU(3)_c \times SU(2)_L \times U''(1) \times SO(8). \tag{32}$$

记 Higgs 场 $(\underline{1}, \underline{28})$ 中 $SO(8)$ 的 28 维表示为 ϕ'_{ij}，$(\underline{1}, \underline{8})$ 中的 8 维旋量表示为 ϕ'_i $(i, j = 1, 2, \cdots 8)$，其真空期望值取为：

$$\begin{aligned}\langle\hat{\phi}'\rangle &\equiv \langle I'_{ij}\phi'_{ij}\rangle = a'I'_{12}+b'I'_{34}+c'I'_{56}+d'I'_{78};\\ \langle\phi'_i\rangle &= \mathrm{diag}\,(0\ \ a''\ \ 0\ \ b''\ \ 0\ \ c''\ \ 0\ \ d''),\end{aligned} \tag{33}$$

其中 a'、b'、c'、d' 互不相等，且与 a''、b''、c''、d'' 都为 M 量级的值.
这使得：

$$SO(8) \xrightarrow{M} U(1)_{em(8)} \times U'(1)_{em}. \tag{34}$$

到此为止，已实现破缺：

$$SO(10)\times SO(8) \xrightarrow{M} SU(3)_c\times SU(2)_L\times U''(1)\times U(1)_{em(8)}\times U'(1)_{em}. \tag{35}$$

还需要把 $U''(1)\times U(1)_{em(8)}$ 破缺到 $U(1)_Y$. 我们可以选择 Higgs 表示为

$$(\underline{16},\ \underline{8}\otimes\underline{8}) = (\phi_i,\ \phi'_i\otimes\phi'_j),$$

其中 $\underline{16}$ 为 $SO(10)$ 的旋量表示，而 $\underline{8}\otimes\underline{8}$ 为 $SO(8)$ 的两个旋量表示的直积. 只要取分量 $(\phi_{12},\phi'_5\otimes\phi'_7)$ 的真空期望值不为零且为 M 量级，便可实现上述的破缺. 从而最终完成第一阶段的破缺：

$$SO(10)\times SO(8) \xrightarrow{M} SU(3)_c\times SU(2)_L\times U(1)_Y\times U'(1)_{em}. \tag{36}$$

为实现第二步的破缺（见(26)式），可以取 $(\underline{16},\underline{1})$ 为 Higgs 场，取 $SO(10)$ 的 16 维旋量表示中的第四分量（即中微子所在的位置）.具有非零真空期望值.或者，取 $(\underline{10},\underline{1})$ 表示中 $SO(10)$ 的矢量表示的第一、二两个态，它们不仅是 Q_{em} 和 Q'_{em} 为零的态，而且也是 $SU(2)_L$ 二重态中的一个分量. 将其中的一个取非零真空期望值，便能实现最后一阶段的破缺.

我们选择了一系列具有非零的真空期望值的 Higgs 场，实现了我们所要的最简单的两阶段破缺过程. 但是，由这些 Higgs 场所构成的位势中，是否能够使这些真空期望值恰好对应位势的极小值处，再者，会不会出现 Goldstone 粒子？这乃是需要仔细讨论，但又十分复杂的问题. 象通常的文献遇到这种情况一样，我们在此不作深入讨论.

四、讨　论

在我们的模型中，Weinberg 角和大统一标度 M 怎么样呢？由于我们选取的规范群是半单纯群 $SO(10)\times SO(8)$，因而有两个独立的耦合常数 g_{10} 和 g_8. 令它们在大统一质量标度时为 $g_{10}(M)$ 和 $g_8(M)$. 而在低能时（例如 M_w 标度），理论中的耦合常数就有四个：$g_3(M_w)$、$g_2(M_w)$、$g_{em}(M_w)$ 和 $g'_{em}(M_w)$，它们分别对应于 $SU(3)_c$、$SU(2)_L$、$U(1)_{em}$ 和 $U'(1)_{em}$. 当模型中的费米子和 Higgs 粒子的内容确定后，我们就可以用四个重整化群方程，把 $g_3(M_w)$、$g_2(M_w)$、$g_{em}(M_w)$、$g'_{em}(M_w)$ 与 $g_{10}(M)$、$g_8(M)$ 联系起来. 如果把强相互作用精细结构常数 $(\alpha_c(M_w)\sim 0.16)$、电磁相互作用精细结构常数

$$\left(\alpha(M_w)\sim\frac{1}{128}\right)$$

和 Weinberg 角 $\sin^2\theta_w$ 作为已知值，那么上述四个方程中未知的量正好剩下四个，即 $g_{10}(M)$、$g_8(M)$、M 和 $g'_{em}(M_w)$. 从而可确定这四个量. 因此，我们可以用 $\sin^2\theta_w$ 作为输入参数，以此来确定 M. M 的确定也很简单，这是因为，$SU(3)_c$ 和 $SU(2)_L$ 都是

$SO(10)$ 的子群，故在 g_3 和 g_2 演变的重整化群方程中，只涉及到 $g_{10}(M)$，M，$g_3(M_w)$和 $g_2(M_w)$，而不涉及到 $g_8(M)$ 和 $g'_{em}(M_w)$，由此两方程消去 $g_{10}(M)$ 后就可以求得 M. g_3 和 g_2 所满足的重整化群方程的解为:

$$\frac{1}{g_3^2(M_w)}=\frac{1}{g_{10}^2(M)}+2b\ln\frac{M}{M_w}; \tag{37}$$

$$\frac{1}{g_2^2(M_w)}=\frac{1}{g_{10}^2(M)}+2b'\ln\frac{M}{M_w}. \tag{38}$$

这里的 b 和 b' 分别为 g_3 和 g_2 的重整化群方程中的系数:

$$\begin{aligned} b&=-\frac{1}{32\pi^2}\left[\frac{22}{3}C_2(SU(3))-\frac{4}{3}\sum_{\text{费米}}T(R)\right];\\ b'&=-\frac{1}{32\pi^2}\left[\frac{22}{3}C_2(SU(2))-\frac{4}{3}\sum_{\text{费米}}T'(R)\right], \end{aligned} \tag{39}$$

其中 $C_2(SU(3))=3$，$C_2(SU(2))=2$；$T(R)$，$T'(R)$ 分别为 $SU(3)$ 和 $SU(2)$ 的费米子表示的邓金指标(费米子左右手分别计算)．在我们的理论中，有八代费米子．易知，每一代中有 4 个 $SU(3)$ 基础表示的费米子，也有 4 个 $SU(2)$ 基础表示的费米子．由 $SU(N)$ 群基础表示的邓金指标为 $\frac{1}{2}$，得 (39) 与 (40) 中的

$$\sum_{\text{费米}}T(R)=16,\quad \sum_{\text{费米}}T'(R)=16. \tag{40}$$

另外有熟知的关系:

$$\frac{1}{g_2^2(M_w)}=\frac{\sin^2\theta_w(M_w)}{g_e^2(M_w)}=\frac{\sin^2\theta_w}{4\pi\alpha_{em}}. \tag{41}$$

这里的 $\sin^2\theta_w$ 和 α_{em} 为在 M_w 点的 Weinberg 角和电磁相互作用的精细结构常数，让 (37) 减去 (38)，考虑到 (39)—(41) 式，可以得到

$$\ln\frac{M}{M_w}=\frac{6\pi}{11}\left(\frac{\sin^2\theta_w}{\alpha_{em}}-\frac{1}{\alpha_c}\right), \tag{42}$$

其中 $\alpha_c=\frac{g_3^2(M_w)}{4\pi}$，为强相互作用精细结构常数在 M_w 处值．在 $SU(5)$ 大统一理论中，按同样方式，也可以得到与(42)一样的方程．其原因在于，虽然在两种情形下电荷的填充很不相同，但是在一代中费米子取 $SU(3)$ 基础表示的数目与取 $SU(2)$ 基础表示的数目依然不变，都为 4．正是因为费米子取 $SU(3)$ 基础表示数目与取 $SU(2)$ 基础表示数目相同，当 (37) 式与 (38) 式相减时 b 与 b' 中的费米子贡献部分相消．这就导致 g_3 与 g_2 的相对变化趋势与费米子代数无关，而且我们的情况与 $SU(5)$ 一样．不同的是，$SU(5)$ 理论中除了 (42) 外还有另一式，它也是 M，M_w，$\sin^2\theta_w$，α_{em} 等的函数方程．由实验给出 α_c，α_{em}，M_w 就可以同时计算出M与 $\sin^2\theta_w$．在我们这里，如前面已分析的，不能做到这一点．但可以由 (42) 式，把 α_{em}，α_c，$\sin^2\theta_w$ 作为输入参数而计算出大统一标度 M 来．这样，M将与通常的 $SU(5)$ 大统一理论一样～10^{14}—10^{15} GeV．这里所涉及到的重整化群方程，例如可参看文献 [10].

目前的质子衰变实验中，在$SU(5)$理论预言的范围里，尚未观测到质子衰变．一种可能的变动，就是把M提得更高．在我们的模型中，若采取更复杂的破缺过程(例如，二阶段

以上的破缺)，就可能做到这一点．这是因为引进了更多参数的缘故．事实上，此时对M也就失去了预言．另外，通常大统一理论中存在着的阶梯问题，在本模型中也同样存在．这些问题，我们不打算再详细讨论．

总之，本文讨论了能解释斯坦福大学的两个实验，同时满足 Dirac 规则的 $SO(10)\times SO(8)$ 模型．预言了四代普通费米子和四代异常费米子的存在．在今后的高能实验中有可能对此加以验证，也有可能验证异常光子存在与否．

我们感谢杜东生、薛丕友和东方晓同志的有益的讨论．

参　考　文　献

[1] W. M. Fairbank, G. S. La Rue and A. F. Hebard, *Phys. Rev. Lett.*, **38** (1977), 1011; W. M. Fairbank, G. S. La Rue and J. D. Phillips, *Phys. Rev. Lett.*, **42** (1979), 142.

[2] B. Cabrera, *Phys. Rev. Lett.*, **48**(1982), 82.

[3] P. A. M. Dirac, *Phys. Rev.*, **74**(1948), 817.

[4] V. A. Rubakov, *Phys. Lett.*, **120B** (1983), 191.

[5] S. M. Barr, D. B. Reiss and A. Zee, *Phys. Rev. Lett.*, **50**(1983), 317.

[6] S. AOYAMA, Y. FUJIMOTO, ZHAO Zhiyong, *Phys. Lett.*, **124B** (3, 4) (1983), 185.

[7] F. X. Dong, T. S. Tu, P. Y. Xue and X. J. *Zhou, Phys Lett.*, **129B** (1983), 405.

[8] R. V. Eötvös, *Math. nat. Ber. Ungarn,* **8**(1890), 65; R. V. Eötvös, D. Pekar and E. Fekete, *Ann. Phys.*, **68**(1922), 11; D. H. Dicke, in Relativity, Groups and Topology, ed. by C. Dewitt and B. S. Dewitt (Gordon, and Breach, New York, 1964), 167; P. G. Roll, R. Krotkov and R. H. Dicke, *Ann. Physics,* (N. Y.) **26**(1967) 442.

[9] 马中骐、杜东生、周咸建和薛丕友，《高能物理与核物理》，**5**(1981)，664.

[10] F. X. Dong, T. S. Tu, P. Y. Xue and X. J. Zhou, *Annals of Physics,* **145** (1983), 1.

$SO(10)\times SO(8)$ MODEL WITH FRACTIONAL CHARGES, MONOPOLES AND PECULIAR PHOTONS

JIANG XIANG-DONG　ZHOU XIAN-JIAN

(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

An $SO(10)\times SO(8)$ model of grand unified theory is proposed. It can accommodate the color singlet particles with fractional charges (for example: e/2 or e/3), and the model satisfies the Dirac quantization rule with magnetic charge 1/2e. This theory predicts four generations of ordinary fermions and four generations of peculiar fermions. In particular, there exist peculiar photons which are different from ordinary photons. These could be tested in future experiments at high energy.