

核分子 $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ 振转谱的对称性

杨伯君

(北京大学)

摘要

本文利用 $U(5)$ 群代数对核分子 $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ 振转谱进行分类。结果表明，利用动力学对称性 $U(5) \supset U(4) \supset O(4) \supset O(3)$ 可以较好地描述 $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ 核分子振转能级的对称性质。

一、引言

为了解释重离子反应中截面的中间结构现象，我们曾提出过一种核分子的振转模型^[1]，并指出核分子既像原子形成的分子，但又有区别。它的转动运动类似于普通双原子分子，发生在两核的相对运动自由度上；而振动运动与普通核相似可以是表面振动，因此不仅存在相对坐标方向的纵向振动，而且存在着垂直于对称轴的横向振动。对核分子振转谱对称性质的描述，不能用原子分子的 $U(4)$ 模型^[2]，起码应当用 $U(5)$ 模型。在文献[3]中已用 $U(5)$ 模型讨论了 $^{12}\text{C} + ^{16}\text{O}$ 核分子的能谱，本文将用 $U(5)$ 模型讨论核分子 $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ ，研究这一核分子振转能级的对称性质。

二、动力学对称性 $U(5) \supset U(4) \supset O(4) \supset O(3)$

在 $U(5)$ 模型中，系统的哈密顿量可以表示为^[3]：

$$\begin{aligned}
 H = & C_0^{(0)} + C_1^{(2)} S^+ S + C_2^{(4)} A^+ A + C_3^{(4)} \sum_m V_m^+ V_m \\
 & + \sum_{L=0}^2 C_L^{(2)} [(V^+ V^+)^{(2)} (\tilde{V} \tilde{V})^{(2)}]^{(0)} + C_3^{(2)} [(V^+ V^+)^{(0)} (SS)^{(0)} \\
 & + (S^+ S^+)^{(0)} (\tilde{V} \tilde{V})^{(0)}]^{(0)} + C_4^{(2)} [(V^+ V^+)^{(0)} (AA)^{(0)} + (A^+ A^+)^{(0)} (\tilde{V} \tilde{V})^{(0)}]^{(0)} \\
 & + C_5^{(2)} [(S^+ S^+)^{(0)} (SS)^{(0)}]^{(0)} + C_6^{(2)} [(A^+ A^+)^{(0)} (AA)^{(0)}]^{(0)} \\
 & + C_7^{(2)} [(V^+ S^+)^{(0)} (\tilde{V} S)^{(0)}]^{(0)} + C_8^{(2)} [(V^+ A^+)^{(0)} (\tilde{V} A)^{(0)}]^{(0)}, \quad (1)
 \end{aligned}$$

式中 $S^+(S)$, $A^+(A)$, $V_m^+(V_m)$, $m=0, \pm 1$, 分别是模型中五种玻色子的产生与湮灭算符，它们满足玻色子算符的对易关系，符号 $\tilde{V}_m = (-1)^{1-m} V_{-m}$ ，括号表示张量积，例如

$$(V^+ V^+)^{(0)} = \sum_{mm'} \langle 1m1m' | 00 \rangle V_m^+ V_{m'}^+$$

式中 $\langle 1m1m'|00\rangle$ 表示 Clebsch-Gordan 系数。

对于 $U(5)$ 群, 包括 $O(3)$ 为子群的群链有两个:

$$(I) U(5) \supset O(5) \supset O(3),$$

$$(II) U(5) \supset U(4) \supset O(4) \supset O(3).$$

在文献[3]中已讨论了链(I)的一般解, 并用它来描述核分子 $^{12}\text{C} + ^{16}\text{O}$ 振转能级的对称性质。本文将讨论链(II)的解, 并用它对核分子 $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ 振转谱进行分类。

在动力学对称性 $U(5) \supset U(4) \supset O(4) \supset O(3)$ 情况下, 系统的哈密顿量可以写成

$$H = E_0 + EC_{1U5} + AC_{U4} + BC_{O4} + DC_{O3}, \quad (2)$$

式中 C_{1U5} 是 $U(5)$ 群的一次 Casimir 算子, C_{U4} , C_{O4} 和 C_{O3} 分别是 $U(4)$ 、 $O(4)$ 和 $O(3)$ 群的二次 Casimir 算子, 它们的形式可以取为^[4]:

$$C_{1U5} = A^+A = \hat{N}_2, \quad (3)$$

$$C_{U4} = \frac{1}{4} \{ [(S^+S^+)^{(0)}(SS)^{(0)}]^{(0)} + [(V^+V^+)^{(0)}(\tilde{V}\tilde{V})^{(0)}]^{(0)} \\ - 3^{3/2}[(V^+V^+)^{(1)}(\tilde{V}\tilde{V})^{(1)}]^{(0)} - 3^{3/2}[(V^+S^+)^{(1)}(\tilde{V}S)^{(1)}]^{(0)} \\ + 5^{3/2}[(V^+V^+)^{(2)}(\tilde{V}\tilde{V})^{(2)}]^{(0)} \}; \quad (4)$$

$$C_{O4} = S_+S_-, \quad (5)$$

$$\text{其中} \quad S_+ = \frac{1}{2} \left[\sum_{m=-1}^1 (-1)^{1-m} V_m^+ V_m^+ + S^+ S^+ \right], \quad S_- = (S_+)^+ \\ C_{O3} = 3^{1/2} [(V^+\tilde{V})^{(1)}(V^+\tilde{V})^{(1)}]^{(0)}. \quad (6)$$

下面分两种情况讨论状态的表达形式与哈密顿量的本征值。

(1) 完全对称分布: 相应于核没有内部激发, 只有一类玻色子, 具有完全对称分布。这时 $U(5)$ 群的不可约表示以 N 表示, N 为总玻色子数。 $U(4)$ 群的不可约表示用 $[n]$ 表示, n 取值为:

$$N, N-1, N-2, \dots, 0,$$

对确定的 n , 当约化成 $O(4)$ 群时, 其不可约表示用量子数 ω 表示, ω 取值为

$$n, n-2, n-4, \dots, 1 \text{ 或 } 0,$$

当 $O(4)$ 约化成 $O(3)$ 时, $O(3)$ 不可约表示的量子数 L , 对一定的 ω , 可取的数值为

$$0, 1, 2, \dots, \omega,$$

$O(3)$ 可以向 $O(2)$ 约化, $O(2)$ 不可约表示用磁量子数 M 表示, 对一定的 L , M 可取 $2L+1$ 个值。

在这种情况下, 态矢量可以用各子群不可约表示的量子数表示, 取为:

$$|N, n, \omega, L, M\rangle. \quad (7)$$

在这个态上, 哈密顿量(2)的本征值为

$$E(Nn\omega L) = E_0 + An(n+4) + B\omega(\omega+2) + DL(L+1). \quad (8)$$

这结果与文献[5]给出的相似, 所不同的是现在 n 可取不同的值。在实际问题中, 当没有内部激发, n 取最大的值为 N , 即为文献[5]的结果, 相当在 $U(5)$ 模型中有一个自由度被冻结。若引入振动量子数 $\nu = (n - \omega)/2$, $\nu = 0, 1, 2, \dots, \left[\frac{n}{2}\right]$, 对应于纵向振动, 则系

统能量可以表示为

$$E(\nu, L) = E_0 + An(n+4) + B(n^2 - 4n + 3) - 4B(n+2)\left(\nu + \frac{1}{2}\right) + 4B\left(\nu + \frac{1}{2}\right)^2 + DL(L+1) \quad (9)$$

(2) 不完全对称分布: 当核分子形成过程中, 引起核内部的振动激发, 描述相对运动玻色子与内部运动玻色子是不一样的, 其玻色子数分别为 N_1 和 N_2 , 这时 $U(5)$ 群的不可约表示将由配分 $\{N_1'N_2'\}$ 表示, $N_1'N_2'$ 可取的数值, 由 Kronecker 乘积分解给出: ($N_2 < N_1$)

$$\{N_1\} \times \{N_2\} = \{N_1 + N_2, 0\} \oplus \{N_1 + N_2 - 1, 1\} \oplus \cdots \oplus \{N_1, N_2\}$$

下面讨论当 $U(5)$ 群不可约表示取配分 $\{N_1, N_2\}$ 情况下, 群链中各子群不可约表示量子数可取的数值. 这时 $U(4)$ 群的不可约表示将由配分 $[n_1, n_2]$ 表示, $[n_1, n_2]$ 可取的数值从以下约化公式得到:

$$\{N_1, N_2\} = [N_2] \oplus [N_2 + 1] \oplus \cdots \oplus [N_1] \oplus [N_2, 1] \oplus \cdots \oplus [N_1, 1] + [N_2, 2] \oplus \cdots \oplus [N_1, 2] \oplus \cdots \oplus [N_2, N_2] + [N_2 + 1, N_2] \oplus \cdots \oplus [N_1, N_2]$$

$O(4)$ 群的不可约表示用量子数 (ω_1, ω_2) 表示, 从 $U(4)$ 的 $[n_1, n_2]$ 向 $O(4)$ 约化时, (ω_1, ω_2) 取值是 (n_1, n_2) 各种可能的收缩之和^[6]:

$$[n_1, n_2] = (n_1, n_2) \oplus (n_1 - 1, n_2 - 1) \oplus (n_1, n_2 - 2) \oplus (n_1 - 2, n_2) \oplus \cdots,$$

例如 $[4, 2] = (4, 2) \oplus (3, 1) \oplus (4, 0) \oplus (2, 2) \oplus (2, 0)^2 \oplus (0, 0)$, 在 $O(4)$ 向 $O(3)$ 约化中, 每个 (ω_1, ω_2) 相应 $O(3)$ 不可约表示 L 可取的数值, 可以证明为:

$$\omega_2^2, (\omega_2 + 1)^2 \cdots \omega_1^2$$

其中方次表示每种值可取的次数, 上式表明每个 L 值可以取两次. 这里应指出的是 $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ 为全同核形成的核分子, 两个核交换是不变的, 因此角量子数 L 只能取偶数.

在这种情况下系统的态矢量表示为:

$$|\{N_1, N_2\}, [n_1, n_2], (\omega_1, \omega_2), \delta LM\rangle, \quad (10)$$

δ 是从 $O(4)$ 向 $O(3)$ 约化时引出的附加量子数, 在这态上哈密顿量 H 的本征值为:

$$E = E_0 + E'N_2 + A'[n_1(n_1 + 4) + n_2(n_2 + 3)] + B'[\omega_1(\omega_1 + 2) + \omega_2(\omega_2 + 1)] + D'L(L + 1) + \delta E. \quad (11)$$

在对称性不破缺的情况下, $O(4)$ 向 $O(3)$ 约化时出来的两组 L 值是简并的, 为使这两组 L 的能量分开, 必须引入对称性的部分破缺, δE 表示对称性部分破缺带来的影响.

三、 $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ 核分子振转谱的群分类

现在我们将上节结果用于 $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ 核分子, 对其振转谱进行分类. 取总玻色子数 $N = 14$, 基态转动带相应于完全对称分布, 也没有纵向振动激发: $\nu = 0$, 这时 $N = n = \omega = 14$, 考虑全同核分子的交换对称性, 相应 L 可取数值为:

$$0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14,$$

在这种情况下, 系统的能量可以简单写成

$$E = E_0 + DL(L + 1). \quad (12)$$

当存在纵向振动激发时,取振动量子数 $\nu = 1$, $\omega = n - 2\nu = 12$, 相应 L 取值为: 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12. 这时系统的能量为

$$E = E_0 - 56B_0 + DL(L + 1). \quad (13)$$

相对 $U(4)$ 模型而言, $U(5)$ 模型的主要优点是可以考虑核的内部激发, 内部振动激发量子数 $r = \frac{N_2}{2}$. 取 $r = 1$, 则 $N_2 = 2$, 假定 $N_1 + N_2 = 14$, 则 $N_1 = 12$. 按 Kronecker

乘积的一般公式, $U(5)$ 不可约表示可能出现配分: $\{14\}$, $\{13, 1\}$ 和 $\{12, 2\}$, 第一种配分即完全对称分布, 前面已进行了讨论. 由内部振动的一次激发相应于 $N_2 = 2$, 因此允许存在不完全对称分布的配分是 $\{12, 2\}$. 下面讨论这一配分下各子群量子数可取的数值.

从 $U(5)$ 群向 $U(4)$ 群约化的一般公式, 可以得到 $U(4)$ 群不可约表示 $[n_1, n_2]$ 可取的数值为

$$\begin{aligned} \{12, 2\} = & [2, 0] \oplus \cdots \oplus [12, 0] \oplus [2, 1] \oplus \\ & \cdots \oplus [12, 1] \oplus [2, 2] \oplus \cdots \oplus [12, 2]. \end{aligned}$$

对于 $U(4)$ 群的不可约表示 $[12, 0]$, $[12, 1]$ 和 $[12, 2]$, 当约化成 $O(4)$ 群时, $O(4)$ 群的不可约表示 (ω_1, ω_2) 可取的数值为:

$$[12, 0] = (12, 0) \oplus (10, 0) \oplus (8, 0) \oplus (6, 0) \oplus (4, 0) \oplus (2, 0) \oplus (0, 0),$$

$$\begin{aligned} [12, 1] = & (12, 1) \oplus (11, 0) \oplus (10, 1) \oplus (9, 0) \oplus (8, 1) \oplus (7, 0) \oplus (6, 1) \\ & \oplus (5, 0) \oplus (4, 1) \oplus (3, 0) \oplus (2, 1) \oplus (1, 0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [12, 2] = & (12, 2) \oplus (12, 0) \oplus (11, 1) \oplus (10, 0)^2 \oplus (10, 2) \oplus (9, 1) \\ & \oplus (8, 2) \oplus (8, 0)^2 \oplus (7, 1) \oplus (6, 2) \oplus (6, 0)^2 \oplus (5, 1) \oplus (4, 2) \\ & \oplus (4, 0)^2 \oplus (3, 1) \oplus (2, 2) \oplus (2, 0)^2 \oplus (1, 1) \oplus (0, 0). \end{aligned}$$

如果纵向振动不激发 $\nu = 0$, 则 $O(4)$ 群不可约表示只取 $(12, 0)$, $(12, 1)$ 和 $(12, 2)$ 三组. 对这三种表示约化成 $O(3)$ 群时, 量子数 L 可取的数值为:

对应 $(12, 0)$, L 取 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12;

对应 $(12, 1)$, L 取 $2^2, 4^2, 6^2, 8^2, 10^2, 12^2$;

对应 $(12, 2)$, L 取 $2^2, 4^2, 6^2, 8^2, 10^2, 12^2$.

在这种情况下哈密顿量的本征值为:

$$\begin{aligned} E = & E_0' + A'[n_1(n_1 + 4) + n_2(n_2 + 3)] + B'[\omega_1(\omega_1 + 2) + \omega_2(\omega_2 + 1)] \\ & + D'L(L + 1) + \delta_E, \end{aligned} \quad (14)$$

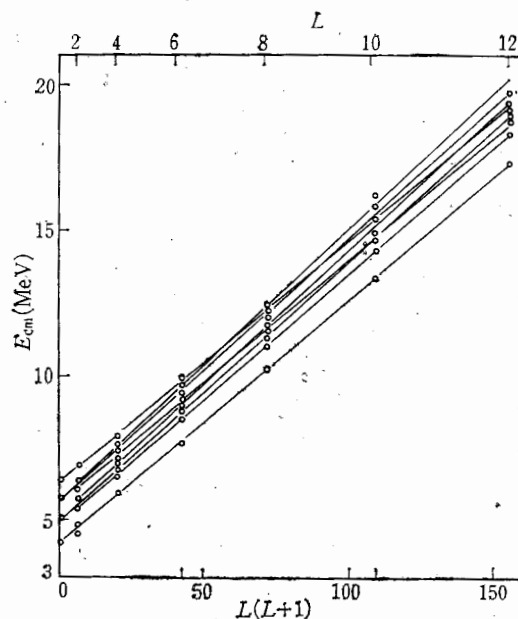
δ_E 是由对称性部分破缺而引入的附加项, 对称性部分破缺可能来自内部振动角动量与转动角动量之间的耦合, 耦合大、小正比于 L , 因此唯象可以取 $\delta_E = \pm \delta' L$. 这样在能量表达式 (14) 中有五个可调的参数: E_0', A', B', D' 和 δ' . 当内部激发后核分子转动惯量将发生变化, 因此 $D' \neq D$. 根据以上讨论, 对核分子 $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ 的低激发态, 如果仅取纵向与横向(内部)振动的一次激发, 一共得到八条转动带, 其中 O^+ 态只有四个, 比其他角动量态少, 这与实验结果一致. 目前实验观测到的 O^+ 态一共是三个, 能量分别为 4.25 MeV, 5.80 MeV 和 6.30 MeV^[7], 分别选取为三个转动带的带头, 另一个带头取 $E = 5.05$ MeV. 从这四个值可以得到 $E_0 = 12.45$ MeV, $B_0 = -0.0366$ MeV, $A' = 0.075$ MeV, 若取

表1 计算的 $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ 核分子能级 (MeV)

$U(5)$		$\{14, 0\}$		$\{12, 2\}$					
$U(4)$		$[14, 0]$		$[12, 0]$	$[12, 1]$		$[12, 2]$		
$O(4)$		$(14, 0)$	$(12, 0)$	$(12, 0)$	$(12, 1)$		$(12, 0)$	$(12, 2)$	
					$-\delta'L$	$+\delta'L$		$-\delta'L$	$+\delta'L$
0(3)	0	4.25	6.30	5.05			5.80		
	2	4.75	6.80	5.59	5.50	5.70	6.34	6.02	6.22
	4	5.93	7.98	6.85	6.64	7.04	7.60	7.18	7.58
	6	7.78	9.83	8.83	8.52	9.12	9.58	9.06	9.66
	8	10.30	12.35	11.53	11.12	11.92	12.28	11.66	12.46
	10	13.49	15.54	14.95	14.44	15.45	15.7	14.98	15.98
	12	17.35	19.40	19.09	18.48	19.68	19.84	19.02	20.22

$B' = B$ 得到 $E'_0 = -3.2\text{MeV}$ 。另外三个可调参数, 取 $D = 0.084\text{MeV}$, $D' = 0.090\text{MeV}$, $\delta' = 0.050\text{MeV}$ 。利用这些参数值算出来的各转动带的能量如表1所列。结果与实验的比较如图1所示, 其中直线是计算值, \circ 表示实验值, 从图中看出理论值与实验值之间符合得比较好。

以上结果表明, 动力学对称性 $U(5) \supset U(4) \supset O(4) \supset O(3)$ 能较好地描述核分子 $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ 振转能级的对称性质, 结合文献[3]的讨论, 表明 $U(5)$ 模型可能较好地描述核分子的对称性质。除 $^{12}\text{C} + ^{16}\text{O}$ 与 $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ 两核分子外, 也可以用 $U(5)$ 群代数讨论其他重离子反应中形成的核分子态, 包括 α 粒子与轻核反应中表现出来的中间结构, 这方面的工作正在进行。

图1 $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ 共振能量 E_{CM} 与 $L(L+1)$ 的关系, \circ 为实验值, 直线是计算值

参 考 文 献

- [1] 杨伯君, 高能物理与核物理, 6(1982), 760.
- [2] F. Iachello, R. D. Levine, *J. Chem. Phys.*, 77(1982), 3046.
- [3] 杨伯君, 高能物理与核物理, 8(1984), 482.
- [4] S. Levit, U. Smilansky, *Nucl. Phys.*, A389(1982), 56.
- [5] F. Iachello, *Phys. Rev.*, C23(1981), 2778.
- [6] M. Hamermesh, *Group Theory and its Application to Physical Problems*, Addison-Wesley (1962).
- [7] N. Cindro, *Riv. Nuo. Cim.*, 4(1981), 17.

SYMMETRY OF THE ROTATION-VIBRATION SPECTRA FOR NUCLEAR MOLECULE $^{12}\text{C}+^{13}\text{C}$

YANG BO-JUN
(Peking University)

ABSTRACT

The rotation-vibration spectra of nuclear molecule $^{12}\text{C}+^{13}\text{C}$ is classified by the irreducible representations of group $U(5)$. It is shown that the symmetry of rotation-vibration levels of nuclear molecule $^{12}\text{C}+^{13}\text{C}$ are described by means of dynamical symmetry $U(5) \supset U(4) \supset O(4) \supset O(3)$.