

原子核内新的转动不变性的探索

顾金南

(中国科学院近代物理研究所)

摘 要

对于 $\lambda = 2, 4, 6 \dots$ 的偶极轴对称形变核, 除存在着 $R(\pi)$ 不变性外, 在某些核中可能还存在着 $R(\pi/2)$ 不变性. 本文从理论上一般地分析了出现新的形变对称性的可能性. 主要分析了出现 $R(\pi/2)$ 不变性的条件, 满足 $R(\pi/2)$ 不变性的波函数和矩阵元中所谓的记号因子 $\sigma^{(1)}$ 相关项. 用此可以解释实验能谱和 $B(E2)$ 值中出现的一些 $I/2$ 奇偶现象. 本文还提出了可能存在 $R(2\pi/3)$ 不变性的条件.

一 引 言

具有转动谱的原子核的特征是存在形变. 形变使转动不变性受到破坏, 但由于形变的某些对称性, 仍保持相应的转动不变性. 例如轴对称形变, 则有绕对称轴转任意角度的不变性. 因而核有确定的好量子数 K , 即角动量 I 在对称轴上的投影 K 是个守恒量. 对于 $\lambda = 2, 4$ 等的轴对称形变核, 还有绕垂直于对称轴的轴转动 180° 的不变性, 以后简称 $R(\pi)$ 不变性^[1]. 于是在矩阵元中出现记号因子 $\sigma^{(2)}$ 这个量子数, 对于 $K \neq 0$ 的转动带, 就分成对应于不同量子数 $\sigma^{(2)}$ 的两组. 所以在分析转动谱时, 首先应分析形变的对称性及其相应的对转动自由度的限制.

那么, 原子核是否还存在其它的转动不变性呢? 这是一个感兴趣的问题. 本文所要探索和讨论的就是这个问题. 对某些偶极性 ($\lambda = 2, 4, 6, \dots$) 轴对称形变核的 $K^\pi = 0^+$ 和 0^- 带, 例如 ^{218}Ra 核, 除 $R(\pi)$ 不变性外, 还存在或者近似地存在着 $R\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 不变性. 这样就可以从理论上解释这些核 $K^\pi = 0^+$ 和 0^- 带的能级能量和 $B(E2)$ 的 $\frac{I}{2}$ 奇偶效应^[2].

对于奇极性 ($\lambda = 1, 3, 5, \dots$) 轴对称形变核, 在某些核中存在 $R\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ 不变性的可能性, 本文也作了探讨.

首先, 本文简述了 $R(\pi)$ 不变性. 而后, 一般地讨论了转动不变性问题. 在原来的描述核表面半径矢量的勒让特多项式表示中, 对偶极性 ($\lambda = 2, 4, \dots$) 轴对称形变, 只有 $R(\pi)$ 不变性. 但变到第一类契贝谢夫多项式 $T^{(n)}(\cos\theta)$ 后, 从数学形式上看, $T^{(n)}(\cos\theta)$

就具有 $R\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ 不变性。但关键是这种 $R\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 不变性的物理内容, 以及实验上是否已给出这种不变性存在的信息, 即实验检验。实际上, 实验上已积累了一些给出 $R\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ($n=4$) 不变性效应的数据。下文将对此进行较详细的讨论。本文从理论上给出了原子核出现 $R\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 不变性效应的条件, 主要是要求十六极形变比较大。再有, 我们对满足 $R\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 不变性的波函数作了讨论, 其转动波函数由两部分组成, 即由满足 $R(\pi)$ 不变性的波函数及其经过转动 $\frac{\pi}{2}$ 后的波函数两部分组成。显然, D 函数 \mathcal{D}_{MK}^L 不是 $R\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 算子的本征态, 这就增加了问题的复杂性。最后, 求出了记号因子 $\sigma^{(4)}$ 的近似值。对奇极性 ($\lambda=1, 3, 5, \dots$) 轴对称形变核, 讨论了存在 $R\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ 不变性的可能性及存在这种不变性的条件, 即要求八极形变较大。

二 转动不变性

现有的能谱实验数据(能级能量、电磁跃迁等)表明, 原子核系统的整体转动和内禀运动可以近似分离。在这样的形变原子核中, 描述内禀自由度的出发点是分析非球形势中的单粒子运动。当然, 这种非球形势具有转动谱所显示出来的对称性和平衡形状。通常, 这种平衡形状具有轴对称性和 $R(\pi)$ 不变性。所测量的矩表明, 主要的形变是四极轴对称的。这种形变 Nilsson 势^[3]

$$V = \frac{1}{2} \hbar \omega_0(\varepsilon) \rho^2 \left(1 - \frac{2}{3} \varepsilon p_2(\cos \theta)\right), \quad (1)$$

系统的 Hamiltonian

$$H = \frac{1}{2} \hbar \omega_0(\varepsilon) \left[-\Delta + \rho^2 \left(1 - \frac{2}{3} \varepsilon p_2(\cos \theta)\right)\right] - V_c, \quad (2)$$

公式中的符号及其意义参看文献 [3]。这里所说的转动不变性是指对核的内禀形状而言的。在矩阵元中, 例如 (14) 式中记号因子相关项的产生原因, 是转动柯里奥利力破坏内禀态二重简并性。因为具有 $R(\pi)$ 不变性的波函数^[1]

$$\Psi_{IMK}^{(\pi)} = \left(\frac{2I+1}{16\pi^2}\right)^{1/2} \{\varphi_K(q) \mathcal{D}_{MK}^I(\omega) + (-)^{I+K} \varphi_{\bar{K}}(q) \mathcal{D}_{M-\bar{K}}^I(\omega)\} \quad (3)$$

$\varphi_K, \varphi_{\bar{K}}$ 是二重简并态, 是在 (1) 式所示的平均势场下的内禀态。 $R(\pi)$ 不变性效应的结果是对 $K \neq 0$ 的带, 转动能不仅包含 $\Delta K = 0$ 的项, 还包含有 $\Delta K = \pm 2K$ 的项^[1](参阅 [1]4-57 式及其解释)

$$\begin{aligned} \langle (H_{\text{rot}})_{\Delta K = \pm 2K} \rangle &= \Delta E_{\text{rot}} \\ &= (-)^{I+K} \langle K | h_{2K} | \bar{K} \rangle \frac{(I+K)!}{(I-K)!} \end{aligned} \quad (4)$$

系数 $\langle K | h_{2K} | \bar{K} \rangle$ 表示柯里奥利力作用的 $2K$ 级微扰效应。这里 h_{2K} 是内禀变量的函数,

$\sigma^{(2)} = (-)^{l+k}$, 称为记号因子。对 $K \neq 0$ 的带, 分成对应于不同量子数 $\sigma^{(2)}$ 两组, 这称为记号因子劈裂 (*signature splitting*)。在其它物理量中, 例如电磁跃迁几率的矩阵元, 也会出现记号因子相关项。

如上所述, 在分析转动谱时, 分析形状的对称性或转动不变性是很重要的。它将给出内禀自由度和集体自由度如何耦合的信息。

迄今为止, 关于转动不变性的讨论, 限于 $R(\pi)$ 不变性。下面将给出轴对称形变下转动不变性的普遍讨论, 以探索存在其它转动不变性的可能性。

显然, 形状对称性或核的转动不变性决定于核所具有的平衡形状, 或核的平均势场。对于核表面, 半径矢量 R 为

$$\begin{aligned} R(\theta\varphi) &= R_0 \left(1 + \sum_{\lambda} \alpha_{10} Y_{10}(\theta\varphi) \right) \\ &= R_0 \left(1 + \sum_{\lambda} \beta_{\lambda} P_{\lambda}(\cos\theta) \right), \end{aligned} \quad (5a)$$

这里 $P_{\lambda}(\cos\theta)$ 是勒让特多项式, α_{10} 、 β_{λ} 均为形变参数。

于是有

$$P_{\lambda}(-x) = (-)^{\lambda} P_{\lambda}(x). \quad (5b)$$

可以分成两组, 偶极性 $\lambda = 2, 4, 6, \dots$ 和奇极性 $\lambda = 1, 3, 5, \dots$ 两组, 前者有 $R(\pi)$ 不变性^[1], 后者通常认为没有转动不变性。可以作一个变换使

$$R(\theta) = R_0 \left(1 + \sum_n a_n T^{(n)}(\cos\theta) \right), \quad (6)$$

这里 $T^{(n)}(\cos\theta)$ 是第一类契贝谢夫多项式。可以看到, 仍然有类似 (5b) 式的关系式

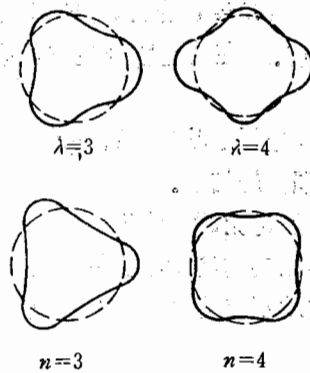
$$T^{(n)}(-x) = (-)^n T^{(n)}(x), \quad (7)$$

以及两组: $n = 0, 2, 4, \dots$ 和 $n = 1, 3, 5, \dots$ 两组。前者仍有 $R(\pi)$ 不变性, 从形式

上看, 两者都有 $R\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ 不变性。这里先讨论 n 为偶数时的情况。

$$\begin{cases} T^{(0)} = 1, \\ T^{(2)} = 2x^2 - 1, \\ T^{(4)} = 8x^4 - 8x^2 + 1 \quad (x = \cos\theta), \\ \dots \\ T^{(n)}(\cos\theta) = \cos n\theta. \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} a_0 = \sum_{\lambda=0,2,\dots}^{\infty} a_{0\lambda} \beta_{\lambda} = \beta_0 + \frac{1}{4} \beta_2 + \frac{9}{64} \beta_4 + \frac{50}{512} \beta_6 + \dots, \\ a_2 = \sum_{\lambda=2,4,\dots}^{\infty} a_{2\lambda} \beta_{\lambda} = \frac{3}{4} \beta_2 + \frac{5}{16} \beta_4 + \frac{105}{512} \beta_6 + \dots, \\ a_4 = \sum_{\lambda=4,6,\dots}^{\infty} a_{4\lambda} \beta_{\lambda} = \frac{35}{64} \beta_4 + \frac{63}{256} \beta_6 + \dots, \\ \dots \\ a_n = \sum_{\lambda>n}^{\infty} a_{n\lambda} \beta_{\lambda}. \end{cases} \quad (9)$$

图 1 $\lambda = 3, 4$ 和 $n = 3, 4$ 的示意图形

可见,首先, $a_n T^{(n)}(\cos\theta)$ 项,当 n 为偶时,由 λ 偶次项的 $\beta_1 P_1(\cos\theta)$ 组成;其次, a_2 项中主要是 β_2 , a_4 项中主要是 β_4 , 其它项 (β_1) 的贡献一般地小一个量级;图中给出了 $\lambda = 3, 4$ 和 $n = 3, 4$ 时的示意图形。不过更重要的是,实验上有无这种形状对称性,理论上这种形状对称性会引出什么效应等。下面我们来具体地讨论 $R\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 不变性。

三 $R\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 不变性

从式(8)可见, $T^{(n)}(\cos\theta)$ 具有 $R\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 不变性。初步看来,只要 a_4 大,即 β_4 大,就有 $R\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 不变性效应显示。但这种讨论是形式上的,光形式地看理想的 $R\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 不变性。这就是 $a_2 = 0$ 和 a_4 较大,于是核肯定是转动 $\frac{\pi}{2}$ 不变,即有 $R\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 不变性。

$$a_2 = 0,$$

即

$$\sum_{\lambda=2,4,\dots}^{\infty} a_{2\lambda} \beta_{2\lambda} = 0, \quad \text{可得}$$

$$\beta_2 = -\frac{5}{12} \beta_4 \quad \text{或} \quad \alpha_2 = -\frac{\sqrt{5}}{4} \alpha_4. \quad (10)$$

如不考虑 $\lambda \geq 4$ 的项。可见这是一个极强的限制条件。也许只有在近球形核区某些核例如 ^{218}Ra , 才能近似地满足这个条件。

第二种情况, $a_4/a_2 \approx 0$ 。当然,这样的系统不具有 $R\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 不变性。

具有 $R\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 不变性的原子核波函数为

$$\Psi_{\text{IMK}}^{(\frac{\pi}{2})} \approx \left[1 + R_i^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right) R_c\left(\frac{\pi}{2}\right) + R_i^{-1}(\pi) R_c(\pi) + R_i^{-1}\left(\frac{3\pi}{2}\right) R_c\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right] \mathcal{D}_{\text{MK}}^I \varphi_K \quad (11a)$$

$$\approx \left(1 + R_i^{-1} \left(\frac{\pi}{2}\right) R_c \left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \Psi_{iMk}^{(\pi)} \quad (11b)$$

从 (11a) 式可见, 它由四部分组成; 但由 (11b) 式可见, 它由 $\Psi_{iMk}^{(\pi)}$ (3 式) 及其转动 $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 后的波函数两部分组成. 这里 φ_k 不仅是二重简并, 而且是四重简并的 (这时势场 (1) 式必须作某种修改以满足 (10) 式的条件). (11) 式中的 R_i 算子作用在内禀态 φ_k 上, $R_c \left(\frac{\pi}{2}\right)$ 作用在集体态上.

对于 $K^\pi = 0^+$ 和 0^- 带

$$\Psi_{iM0}^{(\pi)} \begin{cases} I = 0, 2, 4, \dots & K^\pi = 0^+ \text{ 带} \\ I = 1, 3, 5, \dots & K^\pi = 0^- \text{ 带} \end{cases} \quad (12)$$

这时, 任何一个可观测量 Q 的期待值中会出现记号因子相关项.

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{iM_1K_1}^{(\pi)} | Q | \Psi_{iM_2K_2}^{(\pi)} \rangle &= (N_i N)^{-\frac{1}{2}} \\ &\left\langle \left(1 + R_i^{-1} \left(\frac{\pi}{2}\right) R_c \left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \Psi_{iM_1K_1}^{(\pi)} \middle| Q \middle| \left(1 + R_i^{-1} \left(\frac{\pi}{2}\right) R_c \left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \Psi_{iM_2K_2}^{(\pi)} \right\rangle, \end{aligned} \quad (13)$$

这里 N_i 和 N 是归一化常数. 如无 $R \left(\frac{\pi}{2}\right)$ 不变性, 则 (13) 式为 $\langle \Psi_{iM_1K_1}^{(\pi)} | Q | \Psi_{iM_2K_2}^{(\pi)} \rangle$, 其能级能量为

$$\begin{aligned} E_{\text{rot}}(I, K \approx 0) &= \sum_{n=0} A_n [I(I+1)]^n + (-)^{I+K} \frac{(I+K)!}{(I-K)!} \\ &\times \sum_m B_m [I(I+1)]^m, \end{aligned} \quad (14)$$

(参阅文献 [1] 4-62 式及其解释)

第二项即为记号因子 $\sigma^{(2)}$ 相关项. 如有 $R \left(\frac{\pi}{2}\right)$ 不变性, 在 (13) 式的交叉项中就不会出现 $\sigma^{(2)}$ 相关项, 而且会出现 $R \left(\frac{\pi}{2}\right)$ 不变性效应项, 即 $\sigma^{(4)}$ 相关项. 但问题的复杂性在于 $\mathcal{D}_{iMk}^I(\alpha, \beta, \gamma)$ 不是 $R_c \left(\frac{\pi}{2}\right)$ 转动算子的本征态. 由于下文所要分析的是 $K^\pi = 0^+$ 和 0^- 带, 这些带中实验上呈现 $2^+, 6^+, 10^+ \dots$ 相对于 $4^+, 8^+ \dots$ (包括能级能量和 $B(E2)$ 值) 态的系统偏离. 所以这里讨论偶偶核 $K^\pi = 0^+$ 带的情况, 这时 (13) 式中没有 $\sigma^{(2)}$ 相关项, 但必须导出 $R_c \left(\frac{\pi}{2}\right) \mathcal{D}_{iMk}^I$, 引出近似的 $\sigma^{(4)}$ 表达式.

$$R_c \left(\frac{\pi}{2}\right) \mathcal{D}_{iM0}^I(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_K \mathcal{D}_{iK0}^{*I} \left(0, \frac{\pi}{2}, 0\right) \mathcal{D}_{iMK}^I(\alpha, \beta, \gamma) \quad (15)$$

对于最简单的 $M=0$ 的情况

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{i00}^I(\alpha, \beta, \gamma) &= P_I(\cos \beta) \\ R_c \left(\frac{\pi}{2}\right) P_I(\cos \beta) &= \sum_K (-)^{\frac{I-K}{2}} a_K(I) P_I^{K|}(\cos \theta) \\ &= (-)^{\frac{I}{2}} \sum_K a_K(I) P_I^{K|}(\cos \theta) \end{aligned} \quad (16)$$

项
上

有
这

10)

亥例

11a)

$$\begin{cases} a_1 = \beta_1 + \frac{3}{8}\beta_3 + \dots = \sum_{\lambda=1,3,\dots} a_{1\lambda}\beta_\lambda \\ a_3 = \frac{5}{8}\beta_3 + \dots = \sum_{\lambda=3,5,\dots} a_{3\lambda}\beta_\lambda \end{cases} \quad (19c)$$

如只考虑 $n = 1, 3$, 则由 $a_1 = 0$ 得到¹⁾

$$\beta_1 = -\frac{3}{8}\beta_3. \quad (20)$$

再加 a_3 较大, 或 β_3 较大, 就有 $R\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ 不变性. 但从实验上看, 基态有无稳定的八极形变, 尚是一个正在争议的问题. Ra, Th 核极低的负宇称带的存在和其它信息表明, 这些核可能存在稳定的八极形变, 而偶极形变 ($\lambda = 1$), 历来并不去讨论它, 所以这是一个值得探讨的问题.

最后, 我们可以概述如下.

公式 (5) 所描述的核的形状, 除轴对称性和 $R(\pi)$ 不变性 (λ 为偶数值) 外, 可以探索存在其它转动不变性的可能性, 主要是 $R\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 不变性的存在的可能性. 变换到公式 (6), 即利用契贝谢夫多项式的特性就比较易于讨论这一问题. 而公式 (10) 就是存在 $R\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 不变性的限制条件. 当然这是极强的限制条件, 也许 ^{218}Ra 可能近似地满足这一条件. 另外一种就是 $a_2 \approx 0$, 只要求 a_4 较大, 也就是 β_4 较大这一限制条件. 必须从理论上和实验上对此作进一步研究.

从实验数据看, $R(\pi)$ 不变性效应是主级效应, 例如奇 A 核转动带能谱中的去耦合项直接反映在能级能量中. 而 $R\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 不变性效应是二级或次级效应, 它反映在能级能量 $E(I)$ 的二级差分 (^{218}Ra) 或三级差分上, 即在 $\Delta^2 E(I)$ 或 $\Delta^3 E(I)$ (其它核) 中显示这种 $\frac{I}{2}$ 奇偶效应. 这也是自然的, 对很多核, 一般说来, β_2 比 β_4 大 5 倍以上. 另外, 实验数据表明, 这种 $\frac{I}{2}$ 奇偶效应, 在较多的核中间存在着, 从 ^{20}Ne 到稀土核、铜系核; 从能级能量 $\Delta^2 E$ 或 $\Delta^3 E$ 中, 到 $B(E2)$ 值中都有, 以后我们将详细分析之.

感谢徐躬耦先生的宝贵意见和非常有益的讨论.

参 考 文 献

- [1] A. Bohr, B. R. Mottelson, *Nucl. Structure*, VII(1975).
- [2] 顾金南, *Proc. of Int. Conf. on Nucl. Phys.*, (Florence Italy 1983) 121.
- [3] S. G. Nilsson et al., *Nucl. Phys.*, A131(1969), 1.
- [4] L. K. Peter et al., *Phys. Rev. Lett.*, 50(1983), 1749.

) 式

2 ×

19a)

19b)

1) β_1 很小时相当于原子核的质心平移. 一般情况下, β_1 很小.

THE $R(\pi/2)$ INVARIANCE OF NUCLEI

GU JIN-NAN

(*Institute of Modern Physics, Academia Sinica, Lanzhou*)

ABSTRACT

For the nuclear deformation of $\lambda=2, 4, 6, \dots$, the most important symmetries are axial symmetry and $R(\pi)$ invariance, but probably there is $R(\pi/2)$ invariance in some nuclei. In this paper the possible occurrence of this new symmetry is analysed in general. In particular, the condition for the existence of the $R(\pi/2)$ invariance, wave function of nucleus with $R(\pi/2)$ invariance and signature-dependent terms in the matrix elements of an operator F are discussed in detail.

These provide an analysis of the experimental data, for example the alternating behavior of level energies and $B(E2)$ for $K^*=0^+$ and $K^*=0^-$ bands.