

强子质量谱的变分研究

胡 连 郭 硕 鸿
(中山大学物理系)

摘 要

本文在格点 QCD 范围用线性变分法计算了强子质量谱及其波函数,在中间耦合区域得到了合理的结果。

一、引 言

计算强子质量谱是粒子物理的重要课题之一。在格点 QCD 范围,近几年有不少作者用 Monte Carlo 模拟法及解析法计算强子质量谱^[1-8]。用 Monte Carlo 模拟法研究强子质量谱的主要优点是可以在任意耦合常数区做较可靠的计算,主要缺点是计算中的物理图象不够清楚,另外对在目前用 Monte Carlo 模拟法研究中所用的淬火近似、对手征对称问题的处理、有效点阵效应及边界条件的影响都还需要更深入研究^[5-7]。目前用解析法计算强子谱主要用微扰展开法,如强耦合展开^[11,12]、跳跃参数展开^[2]、 $1/d$ 展开^[16,17]等。在强耦合区用这些方法计算强子谱及手征对称自发破坏有一定的成功,但在中间耦合区域,由于高阶微扰很难计算,用这些方法所得结果的正确性值得怀疑。本文尝试用线性变分法在中间耦合区域计算强子谱。研究表明,对于计算强子谱及其波函数,本文所用的线性变分法比一般微扰展开法更有效。本文第二节说明我们的变分计算方案及强子变分波函数,第三节讨论本文的结果并与其它工作比较。

二、变分计算方案及强子变分波函数

为简便,本文只考虑 Naive 费米子方案,哈密顿量如下

$$H = H_E + H_M + H_K + H_m, \quad (1)$$

$$H_E = \frac{g^2}{2a} \sum_{x,j} E_j^2(\mathbf{x}),$$

$$H_M = -\frac{1}{ag^2} \sum_P \text{Tr}(U_P + U_P^\dagger),$$

$$H_K = \frac{1}{2a} \sum_{x,k} \bar{\psi}(\mathbf{x}) \gamma_K U(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \psi(\mathbf{x} + \mathbf{k}),$$

$$H_m = m \sum_{\mathbf{x}} \bar{\psi}(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}).$$

我们选用以下的费米子表示

$$\psi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \xi(\mathbf{x}) \\ \eta^+(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

其中 $\xi(\mathbf{x})$ 和 $\eta(\mathbf{x})$ 为 $\psi(\mathbf{x})$ 的两个二分量旋量场。定义“裸”真空态 $|0\rangle$, 它满足以下条件:

$$\xi(\mathbf{x})|0\rangle = \eta(\mathbf{x})|0\rangle = 0, \quad E_i^2(\mathbf{x})|0\rangle = 0. \quad (3)$$

在文献[19,20], 我们设物理真空 $|Q\rangle$ 为

$$\left. \begin{aligned} |Q\rangle &= e^{i\theta S} |0\rangle, \\ S &= \frac{i}{\sqrt{6}} \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{k}} \psi^+(\mathbf{x}) \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} U(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \psi(\mathbf{x} + \mathbf{k}). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

真空能量平均值为

$$E_Q = \langle Q | H | Q \rangle = \langle 0 | H' | 0 \rangle, \quad (5)$$

$$H' = e^{-i\theta S} H e^{i\theta S}, \quad (6)$$

θ 为由 $\partial E_Q / \partial \theta = 0$ 确定的变分参数。

从(6)式看到, 若在裸真空态 $|0\rangle$ 计算, 哈密顿量要做(6)式的么正变换。本文中我们将展开到 θ^2 级的哈密顿量做为强耦合区及中间耦合区 ($1/g^2 \lesssim 1$) 的有效哈密顿量 H_{eff} 。文献[20,22]证明, H_{eff} 中对强子质量变分计算有贡献的部分为:

$$H_{\text{eff}} = \left[\frac{g^2}{2a} \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{k}} E_k^2(\mathbf{x}) + H^0 \right] + H^1, \quad (7)$$

$$H^0 = \frac{\kappa}{2} \sum_{\mathbf{x}} \bar{\psi}(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) - \frac{\lambda}{12} \sum_{\mathbf{x}} (Q + Q^+), \quad (8)$$

$$Q = \frac{1}{N_c} \sum_{\mathbf{K}} \eta^\alpha(\mathbf{x}) \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k} \xi^\beta(\mathbf{x} + \mathbf{k}) \eta^\beta(\mathbf{x} + \mathbf{k}) \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k} \xi^\alpha(\mathbf{x}),$$

$$Q^+ = \frac{1}{N_c} \sum_{\mathbf{K}} \xi^{\alpha+}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k} \eta^{\beta+}(\mathbf{x} + \mathbf{k}) \xi^{\beta+}(\mathbf{x} + \mathbf{k}) \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k} \eta^{\alpha+}(\mathbf{x}),$$

$$\kappa \equiv 2m(1 - 2\theta^2) + \frac{2\sqrt{6}}{a} \theta - \frac{g^2 C_N}{a} \theta^2,$$

$$\lambda \equiv \frac{g^2 C_N}{a} \theta^2,$$

(1)

$$H^1 = \left(\frac{m\theta^2}{3} - \frac{\sqrt{6}\theta}{a} \right) \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{k}_1 \neq -\mathbf{k}_2} \bar{\psi}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k}_1 \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k}_2 U(\mathbf{x}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$$

$$\times \psi(\mathbf{x} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) + \frac{g^2 \theta^2}{6a} \left[\sum_{\mathbf{x}, \mathbf{k} \neq -\mathbf{l}} \psi^+(\mathbf{x}) \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{l} \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} \right.$$

$$\times [U(\mathbf{x}, \mathbf{l}), E_l(\mathbf{x})] U(\mathbf{x} + \mathbf{l}, \mathbf{k}) \psi(\mathbf{x} + \mathbf{l} + \mathbf{k}), E_l(\mathbf{x}) \left. \right\}$$

$$- \left[\sum_{\mathbf{x}, \mathbf{l}} \psi^+(\mathbf{x}) [U(\mathbf{x}, \mathbf{l}), E_l(\mathbf{x})] U(\mathbf{x} + \mathbf{l}, -\mathbf{l}) \psi(\mathbf{x}), E_l(\mathbf{x}) \right] \left. \right\}$$

$$-\frac{1}{ag^2} \sum_P \text{Tr}(U_P + U_P^\dagger). \quad (9)$$

以下说明我们选取强子变分波函数的方法。在强耦合极限, 强子拉不开, H_{eff} 中只有 H^0 对强子质量谱有贡献, 此时我们用强子的 $SU(6)$ 波函数^[23]. π^0 、 ρ^0 、 p 与 Δ^{++} 的波函数如下:

$$|\pi^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2N_f N_c V}} \sum_{\mathbf{x}} \xi^+(\mathbf{x}) \eta^+(\mathbf{x}) |0\rangle, \quad (10)$$

$$|\rho^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2N_f N_c V}} \sum_{\mathbf{x}} \xi^+(\mathbf{x}) \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Z} \eta^+(\mathbf{x}) |0\rangle, \quad (11)$$

$$|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{18V}} \sum_{\mathbf{x}} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \xi_{u,1}^{\alpha+}(\mathbf{x}) [\xi_{d,1}^{\beta+}(\mathbf{x}) \xi_{d,2}^{\gamma+}(\mathbf{x}) - \xi_{d,2}^{\beta+}(\mathbf{x}) \xi_{d,1}^{\gamma+}(\mathbf{x})] |0\rangle, \quad (12)$$

$$|\Delta^{++}\rangle = \frac{1}{\sqrt{36V}} \sum_{\mathbf{x}} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \xi_{u,1}^{\alpha+}(\mathbf{x}) \xi_{u,1}^{\beta+}(\mathbf{x}) \xi_{u,1}^{\gamma+}(\mathbf{x}) |0\rangle. \quad (13)$$

以上诸式中上标 α, β, γ 为色指标, 下标 u, d 分别表示 u, d 层子, 并取 ρ, p, Δ^{++} 的自旋沿 \mathbf{Z} 轴方向, ξ^+ 的下标 1, 2 分别表示该层子的自旋与 \mathbf{Z} 轴平行或反平行。

在非强耦合极限, 强子可以拉开, 按微扰论的看法, 用 H^1 中的双链项逐次作用于某强子的零链态上所产生的新组态都是该强子的可能状态。例如用 H^1 中的二链项作用在 (11) 式的 $|\rho_0\rangle$ 态上可产生一个 ρ 介子二链态

$$|\rho_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2N_f N_c V}} \frac{1}{\sqrt{56}} \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \xi^+(\mathbf{x}) \{ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Z}, \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}_1 \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}_2 \} \times U(\mathbf{x}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \eta^+(\mathbf{x} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) |0\rangle. \quad (14)$$

用 H^1 的二链项逐次作用在二链态 $|\rho_2\rangle$ 上又可得到 $|\rho_4\rangle, |\rho_6\rangle$ 等态。在非强耦合极限, 我们设 ρ 介子态 $|\rho\rangle$ 为 $|\rho_0\rangle, |\rho_2\rangle, |\rho_4\rangle$ 等态的线性组合, 截止到四链态, 我们求出 ρ 介子的变分波函数为:

$$|\rho\rangle = C_0^{\rho} |\rho_0\rangle + C_2^{\rho} |\rho_2\rangle + C_4^{\rho} |\rho_4\rangle, \quad (15)$$

$$|\rho_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2N_f N_c V}} \sum_{\mathbf{x}} \xi^+(\mathbf{x}) \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Z} \eta^+(\mathbf{x}) |0\rangle,$$

$$|\rho_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2N_f N_c V}} \frac{1}{\sqrt{56}} \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \xi^+(\mathbf{x}) \{ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Z}, \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}_1 \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}_2 \} \times U(\mathbf{x}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \eta^+(\mathbf{x} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) |0\rangle,$$

$$|\rho_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2N_f N_c V}} \frac{1}{\sqrt{3664}} \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4} \xi^+(\mathbf{x}) \Gamma_4^{\rho} U(\mathbf{x}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) \times \eta^+(\mathbf{x} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) |0\rangle$$

$$\Gamma_4^{\rho} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}_1 \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}_2 \{ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Z}, \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}_3 \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}_4 \} + \{ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{Z}, \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}_1 \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}_2 \} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}_3 \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}_4.$$

其中 $C_0^{\rho}, C_2^{\rho}, C_4^{\rho}$ 为线性变分系数, 我们已使

$$\langle \rho_i | \rho_j \rangle = \delta_{ij}. \quad (16)$$

用类似方法可以得到 π, p 和 Δ^{++} 的变分波函数, 例如对 π, p 强子, 我们得到:

$$|\pi\rangle = C_0^\pi |\pi_0\rangle + C_2^\pi |\pi_2\rangle + C_4^\pi |\pi_4\rangle, \quad (17)$$

$$|\pi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2N_f N_c V}} \sum_{\mathbf{x}} \xi^+(\mathbf{x}) \eta^+(\mathbf{x}) |0\rangle,$$

$$|\pi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2N_f N_c V}} \frac{1}{\sqrt{30}} \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \xi^+(\mathbf{x}) \sigma \cdot \mathbf{k}_1 \sigma \cdot \mathbf{k}_2 \\ \times U(\mathbf{x}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \eta^+(\mathbf{x} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) |0\rangle,$$

$$|\pi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2N_f N_c V}} \frac{1}{\sqrt{6 \times 5^3}} \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4} \xi^+(\mathbf{x}) \sigma \cdot \mathbf{k}_1 \sigma \cdot \mathbf{k}_2 \sigma \cdot \mathbf{k}_3 \sigma \cdot \mathbf{k}_4 \\ \times U(\mathbf{x}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) \eta^+(\mathbf{x} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) |0\rangle,$$

$$\langle \pi_i | \pi_j \rangle = \delta_{ij},$$

$$|p\rangle = C_0^p |p_0\rangle + C_{2,1}^p |p_{2,1}\rangle + C_{2,2}^p |p_{2,2}\rangle + (\text{三、四链态}), \quad (18)$$

$$|p_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{18V}} \sum_{\mathbf{x}} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \xi_{u,1}^{\alpha+}(\mathbf{x}) [\xi_{d,1}^{\beta+}(\mathbf{x}) \xi_{d,2}^{\gamma+}(\mathbf{x}) - \xi_{u,2}^{\beta+}(\mathbf{x}) \xi_{d,1}^{\gamma+}(\mathbf{x})] |0\rangle,$$

$$|p_{2,1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{90V}} \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \xi^+(\mathbf{x}) \sigma \cdot \mathbf{k}_1 \sigma \cdot \mathbf{k}_2 \\ \times U(\mathbf{x}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \xi(\mathbf{x} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) |p_0\rangle,$$

$$|p_{2,2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3240V}} \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \xi^+(\mathbf{x} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \sigma \cdot \mathbf{k}_2 \sigma \cdot \mathbf{k}_1 \\ \times U(\mathbf{x} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, -\mathbf{k}_2, -\mathbf{k}_1) \xi(\mathbf{x}) \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \Gamma_{ijk}^p \xi_{u,i}^{\alpha+}(\mathbf{x}) \xi_{u,j}^{\beta+}(\mathbf{x}) \xi_{d,k}^{\gamma+}(\mathbf{x}) |0\rangle,$$

$$\Gamma_{ijk}^p = \sqrt{2} (\sigma \cdot \mathbf{k}_1 \sigma \cdot \mathbf{k}_2)_{i1} [(\sigma \cdot \mathbf{k}_1 \sigma \cdot \mathbf{k}_2)_{i1} (\sigma \cdot \mathbf{k}_1 \sigma \cdot \mathbf{k}_2)_{K2} \\ - (\sigma \cdot \mathbf{k}_1 \sigma \cdot \mathbf{k}_2)_{i2} (\sigma \cdot \mathbf{k}_1 \sigma \cdot \mathbf{k}_2)_{K1}].$$

以上 $|p_{2,1}\rangle$ 、 $|p_{2,2}\rangle$ 为自旋结构不同的两个二链态。为简便,我们没写出质子的三链态及四链态,本文所考虑的一个三链态及两个四链态在位形空间的形状见图 1。



图 1 本文所有的重子三链态及四链态在位形空间的形状。

对 P 波介子 ε, A_1 与 B , 由于至少有一条链的规范场激发, 用类似前面的方法, 我们求出截止到三链态的 P 波介子波函数。这与 A. Haserfratz 等^[3]的处理方法相似。如对 B 介子, 我们得到^[24]

$$|B\rangle = C_1^B |B_1\rangle + C_3^B |B_3\rangle, \quad (19)$$

$$|B_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2N_f N_c V}} \frac{1}{\sqrt{8}} \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{K}} \xi^+(\mathbf{x}) \{\sigma \cdot \mathbf{k}_1, \sigma \cdot \mathbf{Z}\} U(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \eta^+(\mathbf{x} + \mathbf{k}) |0\rangle,$$

$$|B_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2N_f N_c V}} \frac{1}{\sqrt{336}} \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}_3} \xi^+(\mathbf{x}) \Gamma^B U(\mathbf{x}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \\ \times \eta^+(\mathbf{x} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) |0\rangle,$$

$$\Gamma^B = \{\sigma \cdot \mathbf{k}_1, \sigma \cdot \mathbf{Z}\} \sigma \cdot \mathbf{k}_2 \sigma \cdot \mathbf{k}_3 + \sigma \cdot \mathbf{k}_1 \sigma \cdot \mathbf{k}_2 \{\sigma \cdot \mathbf{k}_3, \sigma \cdot \mathbf{Z}\}.$$

由于篇幅限制,我们没写出 ϵ 、 A 和 Δ^{++} 的波函数,文献[22]给出这几个强子的波函数.

得到以上给出的强子线性变分波函数后,可以用线性变分法计算强子质量. 设强子 A 的线性变分波函数为

$$|h^A\rangle = \sum_{i=1}^k C_i^A |h_i^A\rangle, \quad (20)$$

质量为 M^A ,用(7)、(8)及(9)式给出的哈密顿量 H_{eff} 可以求出

$$M^A(C_1^A, C_2^A, \dots, C_k^A) = \frac{\langle h^A | H_{\text{eff}} | h^A \rangle}{\langle h^A | h^A \rangle} - E_0, \quad (21)$$

E_0 为真空能量. 变分条件为

$$\frac{\partial M^A}{\partial C_1^A} = \frac{\partial M^A}{\partial C_2^A} = \dots = \frac{\partial M^A}{\partial C_k^A} = 0. \quad (22)$$

解此方程组导致解一久期方程,久期方程的最小特征根即为所求强子质量的上限,与此特征值对应的特征向量确定了变分波函数中诸 C_i^A 的值. 求解久期方程的特征值及特征向量的过程可用计算机按标准程序求解,这是采用线性变分法的方便之处.

三、计算结果及讨论

由于整个变分计算比较繁杂,以下只给出解析计算的结果. 用上节给出的强子变分波函数,我们得到的结果为:

$$\begin{aligned} M_{\pi^+ a} = & 2Y \left[1 - \left(\frac{\lambda}{\kappa} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} C_0^2 + \left[2Y + \frac{4}{3x} (1 - \theta^2) - 8J + \frac{4x}{15} \right] C_1^2 \\ & + \sqrt{120} J (2C_0 C_2) + \left[2Y + \frac{4}{3x} (2 - \theta^2) - 8J + \frac{224}{375} x \right] C_2^2 \\ & + \sqrt{\frac{32}{375}} x (2C_0 C_4) + \left(10J - \frac{32x}{75} \right) (2C_2 C_4), \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} M_{\rho^+ a} = & 2Y \left[1 - \left(\frac{\lambda}{3\kappa} \right)^2 \right]^{1/2} C_0^2 + \left(2Y + \frac{4}{3x} + \frac{113\theta^2}{126x} - \frac{57}{14} J + \frac{4x}{21} \right) C_1^2 \\ & + \sqrt{56} J (2C_0 C_2) + \left[2Y + \frac{4}{3x} \left(2 - \frac{\theta^2}{3} - \frac{136\theta^2}{229} \right) \right. \\ & \left. - \frac{1632}{229} J + \frac{146}{229} x \right] C_2^2 + \sqrt{\frac{64}{2061}} x (2C_0 C_4) \\ & + \frac{2}{\sqrt{3026}} \left(259J - \frac{16}{3} x \right) (2C_2 C_4), \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} M_{B^+ a} = & \left[2Y + \frac{2}{3x} \left(1 - \frac{2\theta^2}{3} \right) - 2J \right] C_1^2 + \frac{43}{\sqrt{42}} J (2C_1 C_3) \\ & + \left[2Y + \frac{2}{x} \left(1 - \frac{2\theta^2}{3} \right) - \frac{323\theta^2}{468} - \frac{323}{42} J + \frac{4x}{39} \right] C_3^2, \end{aligned} \quad (25)$$

$$M_{\Delta^+ a} = 3Y C_0^2 + \left[3Y + \frac{4}{3x} (1 - 2\theta^2) - \frac{18}{5} J + \frac{4}{15} x \right] C_{2,1}^2$$

子

20)

21)

22)

七特
正向

$$\begin{aligned}
& + \left[3Y + \frac{4}{3x} \left(1 - \frac{\theta^2}{3} \right) + \frac{4}{5} J - \frac{8x}{15} \right] C_{2,2}^2 + \sqrt{90} J (2C_0 C_{2,1}) \\
& + \frac{\sqrt{90}}{5} J (2C_0 C_{2,2}) + \left[\frac{1}{5} \left(3Y + \frac{4}{3x} \right) - \frac{4\theta^2}{15x} \right. \\
& + \left. \left(2 - \frac{4}{5} \right) J \right] (2C_{2,1} C_{2,2}) + \left[3Y + \frac{2}{x} \left(1 - \frac{3\theta^2}{4} \right) - \frac{15J}{2} \right] C_3^2 \\
& + \left[3Y + \frac{8}{3x} \left(1 - \frac{\theta^2}{3} \right) - 4J + \frac{92x}{125} \right] C_{4,1}^2 \\
& + \left[3Y + \frac{8}{3x} \left(1 - \frac{2\theta^2}{3} \right) - 8J + \frac{8x}{15} \right] C_{4,2}^2 \\
& + \frac{8h}{\sqrt{10}} (2C_{2,1} C_3) - \sqrt{40} h (2C_{2,2} C_3) + \sqrt{\frac{32}{125}} x (2C_0 C_{4,1}) \\
& + \left(5h - \frac{32x}{75} \right) (2C_{2,1} C_{4,1}) + \left(h - \frac{8x}{75} \right) (2C_{2,2} C_{4,1}) \\
& + \sqrt{200} h (2C_{2,1} C_{4,2}) + \frac{\sqrt{200}}{5} h (2C_{2,2} C_{4,2}) + \sqrt{\frac{8}{25}} J (2C_{4,1} C_{4,2}). \quad (26)
\end{aligned}$$

以上诸式中的 κ, λ 的定义同(8)式, 而

变分

$$\left. \begin{aligned}
Y &= \frac{\kappa a}{2}, \quad J = \frac{-\theta}{\sqrt{6}} \left(1 - \frac{2m a \theta}{\sqrt{6}} \right), \\
x &= \frac{1}{g^2}, \quad h = J + \frac{\theta^2}{9x}.
\end{aligned} \right\} \quad (27)$$

(26)式中的 $C_3, C_{4,1}, C_{4,2}$ 分别为图 1 所表示的一个三链态及两个四链态的变分系数。另外对 $M_{\pi a}, M_{\rho a}$ 式中 C_3^2 项的系数, 我们引用了文献[20]在线性近似下用 Bogoliubov 变换将 H^0 对角化所得的结果。关于 ε, A_1 与 Δ^{++} 的变分计算结果, 可以参考[22]。

(23)

得到以上结果后, 我们先用以下波函数分析: 对 ρ, P 和 Δ^{++} 强子, 用零链态及二链态的线性组合作为其波函数; 对 P 波介子, 用一链态及三链态的线性组合作为其波函数; 对 π 介子, 用零链态、二链态和四链态的线性组合作为其波函数。(23)式到(26)式的结果含两个参数, 格点长度与层子质量 m 。为了得到低质量的 π 介子, 必须在小层子质量参数下计算。由流代数公式^[9]有:

$$f_{\pi}^2 M_{\pi}^2 = 4m_q \langle \bar{\psi} \psi \rangle_{inv}. \quad (28)$$

这里 m_q 是重整化群不变的层子质量

(24)

$$m_q = m \alpha_{MOM}^{-1/11}. \quad (29)$$

$\langle \bar{\psi} \psi \rangle$ 与格点上的 $\langle \bar{\psi} \psi \rangle$ 由下式联系:

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle_{inv} = \frac{1}{2a^3} \langle \bar{\psi} \psi \rangle \alpha_{MOM}^{1/11}, \quad (30)$$

(25)

$$\alpha_{MOM} = \frac{4\pi}{11 \ln \left(\frac{\pi}{a \Lambda_{MOM}} \right)^2 + \frac{102}{11} \ln \ln \left(\frac{\pi}{a \Lambda_{MOM}} \right)^2}. \quad (31)$$

由文献[19]关于 $\langle \bar{\psi} \psi \rangle$ 的结果我们可以求出在 $1/g^2 = 0.9$ 时 $\langle \bar{\psi} \psi \rangle$ 与层子质量 m 的关系,

见图 2.

综合前面的结果,在 $x = 0.9$ 处输入质子质量及 π 衰变常数,我们得到表 1 的结果.为比较方便,表 1 也给出了 Gilchrist 等用 Monte Carlo 模拟计算的结果.

表 1 本文结果与实验及与 Gilchrist 等 Monte Carlo 计算结果的比较

	$1/g^2$	a^{-1}	m	π	ρ	s	A_1	B	N	f_π
变分	0.9	439	4.1	175	623	1279	1257	1217	输入	输入
Monte Carlo	0.9	551	5.82	137	输入	796	1224		输入	210
实验				140	770	1300	1100	1235	940	95

实际上 Monte Carlo 模拟计算有一定的误差,表 1 中 Monte Carlo 模拟的结果是依据 Gilchrist 等^[9]在 $x = 0.9$ 处用线性关系确定强子质量与层子质量的结果得出的.我们用变分计算也得到了类似的线性关系^[22].

得到表 1 的结果时,我们所用的重子波函数为零链态及二链态的线性组合,求出二链态的长度 $2a$ 是对强子半径的粗糙估计.我们得到 $a^{-1} \approx 440[\text{MeV}]$,这相当 $2a = 0.9[\text{f}]$ ($1[\text{f}] = 10^{-13}\text{cm}$).与质子的电荷分布半径 $r_p \approx 0.8[\text{f}]$ 比较,可看出本文所用的强子波函数能基本覆盖强子的实际大小.

变分波函数包含越多的变分态,得到的波函数越准确.设变分波函数有 k 个 n 链态,则强子被拉开 n 条链的几率近似为

$$\rho(n) = \sum_{i=1}^k C_{n,i}^2$$

十分粗略的看,函数 $\rho(n)$ 可反映强子波函数的径向分布.对质子与 ρ 介子,用 (18) 式与 (15) 式的变分波函数分析,我们得到图 3 的结果.

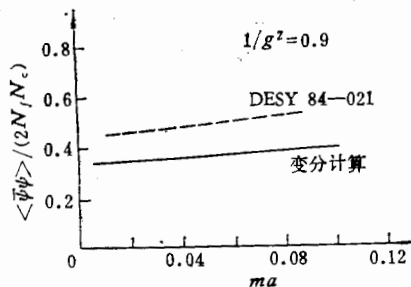


图 2 $1/g^2 = 0.9$ 时用变分法求出的 $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ 与层子质量 m 的关系.

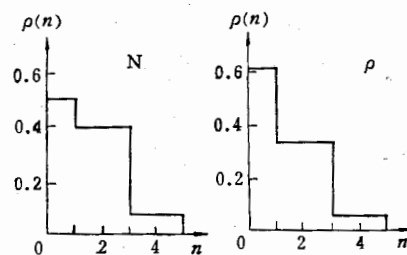


图 3 用变分法求出的强子波函数的径向分布, $\rho(n)$ 与 n 的关系.

用本文给出的简单变分波函数讨论向连续极限过渡问题显然是不够的.为了讨论这一问题,必须在变分波函数中增加许多长链变分态.研究结果表明,当在波函数中增加长链变分态时,所得的结果在中间耦合区有向渐近自由曲线移动的倾向,如图 4.

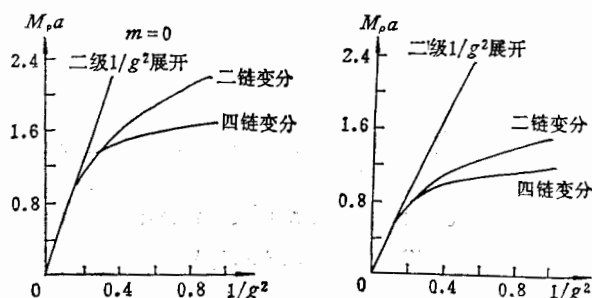


图 4 二级强耦合展开与二链、四链变分计算的比较(此处二链、四链分别指变分波函数中的最长链变分态为二链态、四链态)。

本文所用的方法还有一系列缺点, 如得不到大的 Δ -p 分裂及不能处理强衰变过程等。对这些问题, 用改进作用量的方法^[25], 已经有了一些初步研究。

在本文的工作过程中, 我们曾与陈启洲、刘金明、郑波进行过有益的讨论, 在此对他们表示感谢。

参 考 文 献

- [1] H. Hamber and G. Parisi, *Phys. Rev.*, **D27**(1983), 208.
- [2] A. Hasenfranze, P. Hasenfranze, Z. Kunszt and C. B. Lang, *Phys. Lett.*, **110B**(1982), 289.
- [3] C. Bernard, T. Draper and K. Olynyk, *Nucl. Phys.*, **B220**(1983), 508.
- [4] K. C. Bowler, D. L. Chalmers, A. Kenway, R. D. Kenway, G. S. Pawley and D. J. Wallace, *Nucl. Phys.*, **B240 FS12** (1984), 213.
- [5] G. Parisi, *Phys. Rep.*, **103**(1984), 203.
- [6] D. J. Wallace, *Phys. Rep.*, **103**(1984), 191.
- [7] R. Petronzio, *Phys. Rep.*, **103**(1984), 213.
- [8] M. Fukugita, T. Kaneko and A. Ukawa, *Nucl. Phys.*, **B230**(1984), 62.
- [9] J. P. Gilchrist, G. Schierholz, H. Schneider and M. Teper, *Nucl. Phys.*, **B248**(1984), 29.
- [10] B. Velikson and D. Weingarten, *Nucl. Phys.*, **B249**(1985), 433.
- [11] T. Banks, S. Raby, L. Susskind, J. Kogut, D. R. T. Jones, P. N. Scharbach, D. K. Sinclair, *Phys. Rev.*, **D15**(1977), 1111; D. R. T. Jones, J. B. Kogut, D. K. Sinclair, *Z. Phys.*, **C3**(1979), 29.
- [12] J. Shigemitsu, *Phys. Rev.*, **D18**(1978), 1709.
- [13] J. Smit, *Nucl. Phys.*, **B175**(1980), 307.
- [14] J. Greensite and J. Primack, *Nucl. Phys.*, **B180**(1981), 170.
- [15] N. Kawamoto and K. Shigemoto, *Phys. Lett.*, **114B**(1982), 42; N. Kawamoto, Preprint NBI-HE-83-15.
- [16] H. Kluberg-Stern, A. Morel and B. Petersson, *Nucl. Phys.*, **B215**(1983), 527.
- [17] T. Jolicoeur, H. Kluberg-Stern, M. Lev, A. Morel and B. Petersson, SPHT/83-70.
- [18] O. Martin, CALT-68-1027.
- [19] Guo Shuo-hong, Chen Qi-zhou, Liu Jin-ming and Hu Lian, *Commun. in Theor. Phys.*, (Beijing) **3**(1984), 481.
- [20] Guo Shuo-hong, Chen Qi-zhou, Liu Jin-ming and Hu Lian *Commun. in Theor. Phys.*, (Beijing) **3**(1984), 575.
- [21] H. J. Melosh, *Phys. Rev.*, **D9**(1974), 1095.
- [22] 胡连, 博士学位论文, 1985. 3.
- [23] F. E. Close, *An introduction to quarks and partons* (1980) Sec. ed.
- [24] 见文献 [22] 的附录.
- [25] H. W. Hamber and Wu Chi-min, *Phys. Lett.*, **133B**(1983), 251.

具。

入

依我

二链

[f]

子波

态,

式与

论这
加长

A VARIATIONAL RESEARCH FOR HADRON SPECTRUM

HU LIAN GUO SHUO-HONG

(Zhongshan University).

ABSTRACT

Based on lattice QCD, we use the linear variational method to calculate the hadron spectrum and wave functions, our results are in reasonable agreement with experiment in the region of medium coupling constant.