第 11 卷 第 1 期　　高能物理与核物理　　Vol. 11, No. 1
1987 年 1 月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Jan., 1987

Elliott $SU(3)$ 模型的连续变量表示[1)]

王顺金　曹建民　徐躬耦
（兰　州　大　学）

摘　　要

本文运用生成坐标方法给出了 Elliott $SU(3)$ 模型的连续变量表示，并据此对其作出几何解释．指出 Elliott $SU(3)$ 动力学群集体运动态的荷载子空间由 β, γ 振动和转动态生成．以 $SU(3)$ 模型为例，分析了原子核集体运动的运动学和动力学方面，并指出集体运动的类型或模式由动力学群的代数结构决定，而集体运动的动力学特征(能谱和惯性参量)则由哈密顿量的具体形式决定．

一、引　　言

在五十年代初由 Bohr-Mottelson 发展起来的原子核集体运动的几何模型[1]取得了很大的成功．稍后出现的 Elliott $SU(3)$ 模型[2]则对集体运动的微观本质的认识提供了一条新的途径．Elliott 应用群论方法求解了这一模型，建立起集体转动态与壳模型组态混合之间的联系．从原则上说，对原子核集体运动微观本质的研究应该一方面给 Bohr-Mottelson 模型奠定微观基础，另一方面给微观的集体运动模型(包括 Elliott $SU(3)$ 模型)建立相应的几何表示．长期以来，对 Elliott $SU(3)$ 模型的研究[3]多限于在多体费密子空间用代数方法求解．这个模型的几何形态至今没有被充分揭示出来．

生成坐标方法[4]着眼于在动力学群的参数空间表述原子核集体运动问题，最适合于揭示 Elliott $SU(3)$ 模型的几何形态．本文用生成坐标方法表述 Elliott $SU(3)$ 模型的目的是双重的：其一是用又一个可解模型检验和发展生成坐标方法；其二是揭示 Elliott $SU(3)$ 模型与几何模型之间的关系．

二、Elliott $SU(3)$ 模型[2,3,9]

Elliott $SU(3)$ 模型哈密顿量是：

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + k\sum_{\mu}(-)^{\mu}\hat{Q}_{-\mu}\hat{Q}_{\mu}, \tag{1}$$

其中 $\hat{H}_0$ 是各向同性谐振子哈密顿量，$\hat{Q}_\mu$ 是保持声子数守恒的四极算子，其定义为：

1) 国家教委科学基金资助的课题

本文 1985 年 3 月 2 日收到．

$$\hat{Q}_\mu = -\sqrt{6}\sum_{i=1}^{A}(a_i^+ \otimes a_i)_\mu^2, \tag{2}$$

$a_{\nu i}^+$, $a_{\nu i}$ 是由第 i 个核子的坐标和动量的 ν 分量构成的声子产生、消灭算子．上述哈密顿量由 $U(3)$ 群的生成子构成，其动力学群为 $U(3)$（或 $SU(3)$）．其中 H_0 与所有生成子对易，构成 $U(1)$ 子代数．$SU(3)$ 的 8 个生成子，包括 5 个 $\hat{Q}_\mu$ 和 3 个角动量算子：

$$\hat{L}_q = \sqrt{2}\sum_{i=1}^{A}(a_i^+ \otimes a_i)_q^1, \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned}
[\hat{L}_q, \hat{L}_{q'}] &= (-1)^{1+q+q'}\sqrt{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ q & q' & -q-q' \end{pmatrix}\hat{L}_{q+q'}, \\
[\hat{Q}_\mu, \hat{Q}_{\mu'}] &= (-)^{\mu+\mu'}3\sqrt{30}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ \mu & \mu' & -\mu-\mu' \end{pmatrix}\hat{L}_{\mu+\mu'}, \\
[\hat{Q}_\mu, \hat{L}_q] &= (-)^{\mu+q}\sqrt{30}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ \mu & q & -\mu-q \end{pmatrix}\hat{Q}_{\mu+q}.
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

(4) 式是 $SU(3)$ 生成子的互易关系，其二阶 Casimir 算子：

$$\hat{C}_2 = 3\sum_q(-)^q\hat{L}_q\hat{L}_{-q} + \sum_\mu(-)^\mu\hat{Q}_{-\mu}\hat{Q}_\mu = 3\hat{\boldsymbol{L}}\cdot\hat{\boldsymbol{L}} + \hat{\boldsymbol{Q}}\cdot\hat{\boldsymbol{Q}}. \tag{5}$$

Elliott 按 $SU(3)\supset SO(3)\supset SO(2)$ 群链给出了 $SU(3)$ 不可约表示的基矢 $|(\lambda\mu)KLM\rangle$，该基矢是 $\hat{C}_2$, $\hat{L}^2$, $\hat{L}_z$ 和 $\hat{H}$ 的本征函数：

$$\begin{aligned}
\hat{C}_2|(\lambda\mu)KLM\rangle &= C_2(\lambda\mu)|(\lambda\mu)KLM\rangle \\
&= \frac{2}{3}(\lambda^2+\mu^2+\lambda\mu+3\lambda+3\mu)|(\lambda\mu)KLM\rangle,
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\hat{H}|(\lambda\mu)KLM\rangle = \{\hbar\omega N + k(C_2(\lambda\mu) - 3L(L+1))\}|(\lambda\mu)KLM\rangle.$$

三、Elliott $SU(3)$ 模型的连续变量表示

Elliott 模型的集体运动动力学群是 $SU(3)$，其集体运动态子空间是 $SU(3)$ 群的不可约表示的载荷空间．集体运动的激发算子是 $\hat{Q}_\mu$ 和 $\hat{L}_q$．其中 $\hat{Q}_\mu$ 激发四极振动，而 $\hat{L}_q$ 引起原子核内禀角动量发生转动． 如原子核内禀角动量为零，则与 $\hat{L}_q$ 相联系的内禀自由度退化． 与 $SU(3)$ 生成子 $\hat{Q}_\mu$ 及 $\hat{L}_q$ 相应的群参数是 α_μ 及 Ω_q，5 个 α_μ 是描述表面振动的自由度，3 个 Ω_q 是描述内禀角动量的自由度[5]．

有两种方式表示 $SU(3)$ 不可约表示空间． 一是直接采用基矢 $|(\lambda\mu)KLM\rangle$，这是量子力学中通常的表示法；二是群参数空间表示法，即从不可约表示空间中任一状态出发，经过群元素的作用，生成这个不可约表示空间的任意态矢量．生成坐标方法，着眼于提取集体变量，故采用群参数空间表示法．

集体态的群参数空间表示法又可区别为两种不同情况[6]． 一是从某个不可约表示空间的极态出发，考虑到极态的性质，用部分生成算子作为集体激发自由度，来生成这个不可约表示空间的任意态矢量．由于已考虑了极态的性质，故已具体规定了这个特定的不可约表示．二是从某个不可约表示空间中任意状态出发，并不考虑这个状态的具体性质，

用全部生成算子来生成这个不可约表示空间的任意态矢量．由于未考虑起始状态的具体性质，故尚需附加条件来规定这个特定的不可约表示．对于 Elliott $SU(3)$ 模型，为了保持哈密顿量的 $SO(3)$ 对称性，必须使用后一种连续变量表示．

在复合空间，保持空时对称性（不变性）的 $SU(3)$ 任意群元素可写成：

$$\hat{g}(\alpha,\Omega) = e^{-i\alpha_{\tilde{\mu}}\hat{Q}_{\mu}}e^{-i\Omega_{\tilde{q}}\hat{L}_{q}}, \begin{pmatrix} \mu = 2,1,0,-1,-2 \\ q = 1,0,-1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

其中群参数 α_μ，Ω_q 在参数空间的变换性质与 $\hat{Q}_\mu(x)$，$\hat{L}_q(x)$ 在坐标 (x) 空间的变换性质相比较，具有相同的空间转动与空间反演性质和相反的时间反演性质，从而保证 $\hat{g}(\alpha,\Omega)$ 在复合空间中空时变换的不变性[7]．若 $\hat{g}(\alpha,\Omega)$ 描述平均场的变化，它必须是么正变换．从么正条件可得：

$$\alpha_{\mu}^{*} = \alpha_{\tilde{\mu}} = (-)^{\mu}\alpha_{-\mu},\quad \Omega_{\nu}^{*} = \Omega_{\tilde{\nu}} = (-1)^{\nu}\Omega_{-\nu}. \tag{8}$$

群参数空间的任意态矢量 $|\phi(x,\alpha,\Omega)\rangle$ 可写成：

$$|\phi(x,\alpha,\Omega)\rangle = \hat{g}(\alpha,\Omega)|\phi_0(x)\rangle, \tag{9}$$

其中 $|\phi_0(x)\rangle$ 是不可约表示空间某一起始态矢量．由于定义了内积的 $|\phi(x,\alpha,\Omega)\rangle$ 在某个确定不可约表示空间内的完备性，这个空间的任意集体运动态矢量可写成：

$$|\psi(x)\rangle = \int |\phi(x,\alpha,\Omega)\rangle f(\alpha,\Omega)d\mu_\alpha d\mu_\Omega, \tag{10}$$

其中 $d\mu_\alpha$，$d\mu_\Omega$ 为群参数空间 (α,Ω) 中的测度．

在连续变量表示中，模算子的定义为：

$$\begin{aligned}&\mathscr{N}\left(\alpha,\Omega,-i\frac{\partial}{\partial\alpha},-i\frac{\partial}{\partial\Omega}\right)(\{\alpha,\Omega\}|\hat{\mathscr{P}}|\{\alpha',\Omega'\})\\ &=\langle\phi(x,\alpha,\Omega)|\phi(x,\alpha',\Omega')\rangle,\end{aligned} \tag{11}$$

这里 $\mathscr{P}$ 是对于这个确定的不可约表示空间的投影算子 $\hat{\mathscr{P}}^2=\hat{\mathscr{P}}$．根据定义，它是 $SU(3)$ 群 Casimir 算子的函数．对应由 $SU(3)$ 群生成元构成的算子 $\hat{G}(x)$，则有：

$$\begin{aligned}&\hat{\mathscr{G}}\left(\alpha,\Omega,-i\frac{\partial}{\partial\alpha},-i\frac{\partial}{\partial\Omega}\right)(\{\alpha,\Omega\}|\hat{\mathscr{P}}|\{\alpha',\Omega'\})\\ &=\langle\phi(x,\alpha,\Omega)|\hat{G}(x)|\phi(x,\alpha',\Omega')\rangle.\end{aligned} \tag{12}$$

$\hat{G}(x)$ 算子的 Dyson 表示为：

$$\hat{\mathscr{G}}^{D} = \hat{\mathscr{G}}\hat{\mathscr{N}}^{-1} \quad 或 \quad \hat{\mathscr{G}} = \hat{\mathscr{G}}^{(D)}\mathscr{N}. \tag{13}$$

为了简明起见，下面计算 $SU(3)$ 生成子的连续变量表示时，我们具体考虑 $|\phi_0(x)\rangle$ 是 $SO(3)$ 标量的情形（而对于 $|\phi_0(x)\rangle$ 为非转动不变量，即 $|\phi_0(x)\rangle$ 具有内禀角动量的情形，将在附录中讨论）．

由于 (7) 式所示的 $\hat{g}(\alpha,\Omega)$ 已耦合为复合空间的 $SO(3)$ 标量，故 $|\phi(x,\alpha,\Omega)\rangle$ 在复合空间是子群 $SO(3)$ 的不变量，所以模算子是 $SO(3)$ 群 Casimir 算子的函数，这样可有以下关系式[8]：

$$\hat{\mathscr{N}} = \hat{\mathscr{N}}[\hat{\mathscr{C}}(SO(3))] \tag{14}$$

$$[\hat{\mathscr{N}},\hat{\mathscr{L}}_q^D] = 0 \tag{15}$$

$$[\hat{\mathscr{N}},\mathscr{C}^D(SU(3))] = 0 \tag{16}$$

因此，$SO(3)$ 生成元和 $SU(3)$ Casimir 算子的 Dyson 表示与 Holstein-Primakoff 表示一致.

$$\hat{\mathscr{L}}_q^D = \hat{\mathscr{L}}_q^{HP} = \hat{\mathscr{L}}_q \qquad \hat{\mathscr{C}}^D(SU(3)) = \hat{\mathscr{C}}^{HP} = \hat{\mathscr{C}} \tag{17}$$

经过具体计算给出[附录一]:

$$\hat{\boldsymbol{\mathscr{L}}} = B\,\frac{\boldsymbol{\partial}}{\partial \boldsymbol{\alpha}^*}, \tag{18}$$

$$\hat{\boldsymbol{\mathscr{Q}}}^D = -i\sqrt{3B^+B}\,\mathrm{ctg}\sqrt{3B^+B}\,\frac{\boldsymbol{\partial}}{\partial \boldsymbol{\alpha}^*}, \tag{19}$$

其中矩阵 B，列矢 $\frac{\boldsymbol{\partial}}{\partial \boldsymbol{\alpha}^*}$，$\hat{\boldsymbol{\mathscr{L}}}$，$\hat{\boldsymbol{\mathscr{Q}}}$ 分别定义为:

$$B_{\nu\mu} = \sqrt{30}\;\alpha(\widetilde{\mu-\nu})\,(-)^\mu \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ \mu-\nu & \nu & -\mu \end{pmatrix}, \tag{20}$$

$$\frac{\boldsymbol{\partial}}{\partial \boldsymbol{\alpha}^*} = \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_{\bar\mu}}\right),\quad \hat{\boldsymbol{\mathscr{L}}} = (\hat{\mathscr{L}}_\mu) \quad (\hat{\mathscr{L}}_{-2} = \hat{\mathscr{L}}_2 = 0),\quad \hat{\boldsymbol{\mathscr{Q}}} = (\hat{Q}_\mu) \tag{21}$$

一般情况下 $SU(3)$ 生成元的表示在附录 2 中给出.

Elliott 模型的等效哈密顿量和 Casimir 算子为

$$\hat{\mathscr{H}} = \hat{\mathscr{H}}^{HP} = \hat{\mathscr{H}}^D = \hbar\omega\left(\hat{N} + \frac{3}{2}\right) + k\sum_\mu \hat{\mathscr{Q}}^D_{\bar\mu}\hat{\mathscr{Q}}^D_\mu, \tag{22}$$

$$\hat{\mathscr{C}}_2 = \hat{\mathscr{C}}_2^{HP} = \hat{\mathscr{C}}^D = 3\hat{\boldsymbol{\mathscr{L}}}\cdot\hat{\boldsymbol{\mathscr{L}}} + \hat{\boldsymbol{\mathscr{Q}}}^D\hat{\boldsymbol{\mathscr{Q}}}^D, \tag{23}$$

这里考虑的特定不可约表示由一个附加条件决定.

应当指出，上述 $SU(3)$ 连续变量表示，可以认为是 $SO(3)$ 群连续变量表示的推广. 对 $SO(3)$ 群，若取:

$$|\phi(x,\alpha,\beta,\gamma)\rangle = e^{-i\varphi\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{J}}|\phi_0(x)\rangle = e^{-i\alpha J_z(x)}e^{-i\beta J_y(x)}e^{-i\gamma J_z(x)}|\phi_0(x)\rangle, \tag{24}$$

按上述方法，可求出 [附录 2]:

$$\begin{aligned} \hat{J}_x^D &= i\sin\alpha\,\frac{\partial}{\partial\beta} + i\cos\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta\,\frac{\partial}{\partial\alpha} - i\,\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}\,\frac{\partial}{\partial\gamma}, \\ \hat{J}_y^D &= i\sin\alpha\,\mathrm{ctg}\beta\,\frac{\partial}{\partial\alpha} - i\cos\alpha\,\frac{\partial}{\partial\beta} - i\,\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\,\frac{\partial}{\partial\gamma}, \\ \hat{J}_z^D &= -i\,\frac{\partial}{\partial\alpha}, \end{aligned} \tag{25}$$

这正是角动量算子在 $SO(3)$ 参数空间的欧拉角表示.

上述连续变量表示有以下几个特点:

1) $SU(3)$ 群生成元的连续变量表示由群的结构常数和 $g(\alpha)$ 的形式完全决定，与出发态矢 $|\phi_0(x)\rangle$ 和群参数空间上测度的明显形式无关.

2) 模算子 $\hat{\mathscr{N}}$ 的具体表达式依赖于群参数空间测度的选取，若采用群参数空间的不变测度，则模算子 $\hat{\mathscr{N}}$ 退化为单位算子.

3) $SU(3)$ 群生成算子的连续变量表示仅含群参数的一阶导数，且是群参数的周期函数.

四、Elliott 模型的几何解释

得到 Elliott $SU(3)$ 模型的连续变量表示之后，我们现在可以讨论它的求解问题．在费密子空间的群论解法中，Elliott 按 $SU(3)\supset SO(3)\supset SO(2)$ 群链求出本征值和本征解即不可约表示的基矢 $|(\lambda\mu)KLM\rangle$．因此 $\hat{H}$ 的本征值的计算相当容易，而从多粒子波函数构造基矢 $|(\lambda\mu)KLM\rangle$ 却比较复杂．在连续变量表示中，$SU(3)$ 的生成元 $\hat{\mathscr{L}}_q$，$\hat{Q}_\mu$ 虽然只包含一阶导数 $\dfrac{\partial}{\partial\alpha^*}$，但 $\hat{\mathscr{Q}}_\mu$ 算子为 α_μ 的无穷级数，要求出 $SU(3)$ 群连续变量表示中二阶 Casimir 算子 $\hat{\mathscr{C}}_2$，三阶 Casimir 算子 $\hat{\mathscr{C}}_3$ 及 $\hat{\mathscr{L}}^2$，$\hat{\mathscr{L}}_z$，$\hat{\mathscr{L}}_K$ 的共同本征函数 $f(\alpha_{2\mu},\ \Omega_{1q})$ 是十分困难的．在 $SO(3)$ 群的连续变量表示中，我们的确具体求出了 $\hat{J}^2\left(\omega_i,\ \dfrac{\partial}{\partial\omega_i}\right)$，$\hat{J}_z\left(\omega_i,\ \dfrac{\partial}{\partial\omega_i}\right)$，$\hat{J}_3\left(\omega_i,\ \dfrac{\partial}{\partial\omega_i}\right)$ 的共同本征函数 $D^L_{MK}(\omega_i)$，因此我们可以从几个物理问题的动力学群的连续变量表示求解问题的对比中，得出关于 $SU(3)$ 群连续变量求解的某些知识．

(1) 三维各向同性谐振子

$$
\begin{aligned}
\hat{H} &= \frac{\hat{p}^2}{2m}+\frac{m}{2}\omega^2 r^2=\hbar\omega\left(\hat{N}+\frac{3}{2}\right)\\
&= -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}\right]+\frac{m}{2}\omega^2 r^2+\frac{\hbar^2}{2mr^2}\hat{L}^2, \qquad (26)
\end{aligned}
$$

其动力学群是 $U(3)\supset SO(3)$，按 $\hat{H}(U(3)$ 的不变量），$\hat{L}^2$，$\hat{L}_z$ 的共同本征函数求解，得本征函数为 $\psi_{nlm}(\boldsymbol{r})=H_{nl}(r)Y_{lm}(\theta,\ \varphi)$，本征能量 $E=\hbar\omega\left(N+\dfrac{3}{2}\right)$．其中 $N=2n+l$，这一关系限制了 n，l 的取值范围．

(2) 氢原子[9]

$$
\begin{aligned}
\hat{H} &= \frac{\hat{p}^2}{2m}-\frac{Z^2}{r}=-\frac{Z^2}{4\left(\hat{F}+\frac{1}{2}\right)}\\
&= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}-\frac{Z^2}{r}+\frac{\hbar^2}{2mr^2}\hat{L}^2, \qquad (27)
\end{aligned}
$$

其动力学群是 $SO(4)$[9]．$\hat{F}=\hat{J}^2+\hat{J}'^2$，$\hat{J}^2$ 和 $\hat{J}'^2$ 是与 $SO(4)$ 群局部同构的两个 $SU(2)\times SU(2)$ 群的 Casimir 算子，对氢原子 $\hat{J}^2=\hat{J}'^2$，按 $\hat{H}$（或 $\hat{F}$），$\hat{L}^2$，$\hat{L}_z$ 的共同本征函数求得，$\psi_{nlm}(\boldsymbol{r})=R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta,\varphi)$，$E_n=-\dfrac{e^2}{a_0}\dfrac{Z^2}{2n}$，$\left(a_0=\dfrac{\hbar^2}{me^2}\right)$．其中 $n=n_r+l+1$ 给出了 n_r，l 的取值范围．

上述例子表明：① 虽然 $\hat{H}$ 包括角动量算子 $\hat{L}^2$，但由于 $\hat{H}$ 是更大群的不变量，能量 E 是大群不变量的量子数的函数而与 l 无关．② 大群不变量的量子数自动限制了其子群的不变量量子数的取值范围．这是因为大群的不可约表示按子群的不可约表示约化时，从约化规则给出的子群不可约表示的数目是确定的（有限个）．这两点，对于分析 $SU(3)$ 群连续变量表示中的求解问题十分重要．对 $SU(3)$ 群，我们需要求 $\hat{\mathscr{C}}_2$，$\hat{\mathscr{C}}_3$，$\hat{\mathscr{L}}^2$，

$\hat{\mathscr{L}}_z$, $\hat{\mathscr{L}}_K$ 的共同本征函数,变换到 $\alpha_{2\mu}$ 的本体系, $(\alpha_{2\mu}) \rightarrow (\theta_i, \beta, \gamma)$ 有

$$
\begin{aligned}
&\hat{\mathscr{C}}_2 = \hat{\mathscr{C}}_2\left(\theta_i, \beta, \gamma, \frac{\partial}{\partial\theta_i}, \frac{\partial}{\partial\beta}, \frac{\partial}{\partial\gamma}\right), \\
&\hat{\mathscr{C}}_3 = \hat{\mathscr{C}}_3\left(\theta_i, \beta, \gamma, \frac{\partial}{\partial\theta_i}, \frac{\partial}{\partial\beta}, \frac{\partial}{\partial\gamma}\right), \\
&\hat{\mathscr{L}}^2 = \hat{\mathscr{L}}^2\left(\theta_i, \frac{\partial}{\partial\theta_i}\right), \ \hat{\mathscr{L}}_z = \hat{\mathscr{L}}_z\left(\theta_i, \frac{\partial}{\partial\theta_i}\right), \\
&\hat{\mathscr{L}}_K = \hat{\mathscr{L}}_K\left(\theta_i, \frac{\partial}{\partial\theta_i}; \beta, \gamma, \frac{\partial}{\partial\beta}, \frac{\partial}{\partial\gamma}\right)
\end{aligned}
\tag{28}
$$

它们的共同本征函数形式可写为:

$$
\begin{aligned}
&f_{n_0n_2LKM}(\theta_i,\beta,\gamma) = D_{KM}(\theta_i) f^{KL}_{n_0n_2}(\beta,\gamma,\theta_i), \\
&\hat{\mathscr{C}}_2 f_{n_0n_2LKM}(\theta_i,\beta,\gamma) = \mathscr{C}_2(n_0,n_2,L,K) f_{n_0n_2LKM}(\theta_i,\beta,\gamma), \\
&\hat{\mathscr{C}}_3 f_{n_0n_2LKM}(\theta_i,\beta,\gamma) = \mathscr{C}_3(n_0,n_2,L,K) f_{n_0n_2LKM}(\theta_i,\beta,\gamma), \\
&\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\tag{29}
$$

另一方面, $SU(3)$ 群的不可约表示又用 (λ,μ) 标记,有

$$
\mathscr{C}_2(\lambda,\mu) = \mathscr{C}_2(n_0,n_2,L,K), \ \mathscr{C}_3(\lambda,\mu) = \mathscr{C}_3(n_0,n_2,L,K) \tag{30}
$$

由此可解出:

$$
\lambda = \lambda(n_0,n_2,L,K), \ \mu = \mu(n_0,n_2,L,K), \tag{31}
$$

这很像谐振子情形中 N 与 n, l 的关系,氢原子情形中 n 与 n_r, l 的关系,对于给定的 λ, μ,

$$
L = L(n_0,n_2,\lambda,\mu), \ K = K(n_0,n_2,\lambda,\mu) \tag{32}
$$

上式限制了 L, K 的取值范围. 上述讨论表明, $SU(3)$ 不可约表示指标 (λ,μ), 在几何表示中与 β, γ 振动量子数 (n_0, n_2) 相联系. 如果在 $SU(3)$ 的上述求解中, 不考虑 $\hat{\mathscr{C}}_2$, $\hat{\mathscr{C}}_3$ 算子,则不可能确定 K, L 的取值范围. 在 B-M 集体模型中, 由于对其哈密顿量没有考虑包含 $SO(3)$ 群的更大的动力学群,故 L 取无限序列的值.

讨论 $SU(3)$ 模型集体运动态的一些特征是有意义的. 把 $f_{n_0n_2LKM}$ 代入 (10) 式:

$$
\Psi_{n_0n_2KLM}(x) = \int D^L_{MK}(\theta_i) f^{KL}_{n_0n_2}(\beta,\gamma,\theta_i) |\phi(x,\theta_i,\beta,\gamma)\rangle d\mu_\theta d\mu_{\beta\gamma}, \tag{33}
$$

其中 $|\phi(x,\theta_i,\beta,\gamma)\rangle$ 表示四极算子 $\hat{Q}_\mu$ 引起单粒子平均势场变形(用 β,γ 标志)和取向(用 θ_i 标志), 从而破坏了 $SU(3)$ 不变性. 这种对称性的破缺,又导致集体转动和 β,γ 振动的激发(分别以 $D^L_{MK}(\theta_i)$ 和 $f^{KL}_{n_0n_2}$ 表示);对称性破缺后的多体系统(用 $|\phi(x,\theta_i,\beta,\gamma)\rangle$ 表示)按这种集体模式的运动((33)式右边的积分),导致 $SU(3)$ 对称性的恢复.

$SU(3)$ 集体运动空间包含转动和 β, γ 振动两种运动形态,是从波函数得出的关于集体运动的运动学结论. $SU(3)$ 集体运动的动力学特征(集体惯量和能谱问题)与 Elliott 模型哈密顿量的具体形式有关: $\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{N} + \frac{3}{2}\right) + k\hat{\boldsymbol{Q}}\cdot\hat{\boldsymbol{Q}}$. 其中第一项是 $U(3)$ 不变量,并不消除各集体运动态的简并. 各集体运动态的不同能量来自第二项(势能),其具体形式是: $k\hat{\boldsymbol{Q}}\cdot\hat{\boldsymbol{Q}} = k(\hat{\mathscr{C}}_2 - 3\hat{\boldsymbol{L}}\cdot\hat{\boldsymbol{L}})$ 这一项目使得具有不同的 n_0, n_2, K, L 的状态的

简并得以部分消除．与此有关的转动惯量 $\mathscr{T}=\frac{-1}{6k}$ 是常数，与 $\hat{H}$ 的具体形式有关．而 β, γ 振动对集体运动能量的贡献包括在 $\mathscr{C}_2$ 中．

五、结　论

对 Elliott $SU(3)$ 模型的连续变量表示的研究，使我们得出以下几点认识：

(1) 生成坐标方法可以处理可解的 Elliott $SU(3)$ 模型，给出 Elliott $SU(3)$ 模型的连续变量（几何）表示．

(2) 在 Elliott $SU(3)$ 模型的上述几何表示中，集体运动子空间是由 β, γ 振动和转动态生成的．相应的量子数 $|(n_0n_2)KLM\rangle$ 与 $|(\lambda\mu)KLM\rangle$ 有直接对应关系．我们可清楚地认识到 $SU(3)$ 不可约表示指标与 β, γ 振动量子数 (n_0, n_2) 相联系．

(3) 对于原子核集体运动，应当从运动学和动力学两个方面去分析．在运动学方面，集体运动意味着平均场的对称破缺以及由此产生的集体自由度的激发．平均场集体自由度的变化，携带多粒子系统作集体运动，从而恢复整个系统的对称性，同时产生多体系统的组态混合．在动力学方面，集体运动导致的组态混合，通过系统哈密顿量的具体形式给出与这种组态混合相联系的集体运动的能谱及惯性参量．因此，我们说，集体运动的类型或模式（运动学方面）由动力学群的代数结构决定，而集体运动的动力学特征（能谱与惯性参数）则由哈密顿量的具体形式决定．

(4) 在具有某种动力学对称性的集体运动哈密顿量的连续变量表示中，为了保证本征解的正确性，必须考虑这个动力学群的完备算子集的共同本征值问题．否则，对于完备集中任何算子的遗漏（如 $SU(3)$ 模型中，对 $\hat{\mathscr{C}}_2$ 或 $\hat{\mathscr{C}}_3$ 的遗漏），就不能正确地给出本征解．这是群论中[5]显而易见的事实．动力学群的完备算符集的本征值问题，对于表象变换保持不变．而生成坐标方法正是动力学群的表象变换理论，故这一事实必将在生成坐标方法中明确地表现出来．

附　录　一

把(11)和(12)式代入(13)式，并注意(7)和(9)式后得

$$\hat{\mathscr{Y}}^D\langle\phi(x,\alpha)|\phi(x,\alpha')\rangle=\langle\phi_0(x)|e^{i\alpha\hat{Q}}\hat{G}(x)e^{-i\alpha'\hat{Q}}|\phi_0(x)\rangle \tag{A1}$$

上式已用到 $|\phi_0(x)\rangle$ 是 $SO(3)$ 标量即 $\hat{L}_q|\phi_0(x)\rangle=0$ 并运用缩写 $\alpha\hat{Q}=\sum_\mu \alpha_{\tilde{\mu}}\hat{Q}_\mu$. 考虑算子公式

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_{\tilde{\nu}}}e^{i\alpha\hat{Q}}=e^{i\alpha Q}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\left[\alpha\hat{Q},\frac{\partial}{\partial\alpha_{\tilde{\nu}}}\right]_{(n)}$$

$$\left[\alpha\hat{Q},\frac{\partial}{\partial\alpha_{\tilde{\nu}}}\right]=-\hat{Q}_\nu\quad[\alpha\hat{Q},\hat{Q}_\nu]=3B^*_{\mu\nu}\hat{L}_\mu\quad[\alpha\hat{Q},\hat{L}_\nu]=B_{\nu\mu}\hat{Q}_\mu$$

其中重复下标意味着求和且

$$[\hat{A},\hat{B}]_{(n)}=[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]_{(n-1)}],\ [\hat{A},\hat{B}]_{(1)}=[\hat{A},\hat{B}]$$

运用正文中的矩阵和列矢记号，上述算子公式可写为

$$\frac{\partial}{\partial\alpha^*}e^{i\alpha\hat{Q}}=e^{i\alpha\hat{Q}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\left[\alpha\hat{Q},\frac{\partial}{\partial\alpha^*}\right]_{(n)}, \tag{A2}$$

$$\left[\alpha\hat{Q},\frac{\partial}{\partial\alpha^*}\right]=-\hat{Q},\ \ [\alpha\hat{Q},\hat{Q}]=3B^+\hat{L},\ \ [\alpha\hat{Q},\hat{L}]=B\hat{Q} \tag{A3}$$

注意到 $\hat{L}|\phi_0(x)\rangle=0$ 后，由 (A1)—(A3) 式可得

$$B\frac{\partial}{\partial\alpha^*}\langle\phi(x,\alpha)|\phi(x,\alpha')\rangle=\hat{\mathscr{L}}^D\langle\phi(x,\alpha)|\phi(x,\alpha')\rangle, \tag{A4}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha^*}\langle\phi(x,\alpha)|\phi(x,\alpha')\rangle=\{i\sin\sqrt{3B^+B}\,/\sqrt{3B^+B}\,\hat{Q}^D+(1-\cos\sqrt{3B^+B})/B\hat{\mathscr{L}}^D\}\langle\phi(x,\alpha)|\phi(x,\alpha')\rangle, \tag{A5}$$

(A5) 式 $\hat{Q}^D$ 和 $\hat{\mathscr{L}}^D$ 的分式系数按幂级数定义。从 (A4)(A5) 解得

$$\hat{\mathscr{L}}^D=B\frac{\partial}{\partial\alpha^*}, \tag{A6}$$

$$\hat{Q}^D=-i\sqrt{3B^+B}\,\mathrm{ctg}\sqrt{3B^+B}\frac{\partial}{\partial\alpha^*}, \tag{A7}$$

下面证明 $\hat{\mathscr{L}}^D_\mu$ 和 $\mathscr{C}^D$ 保持与 $\hat{L}_\mu(x)$ 和 $\hat{C}(x)$ 相同的厄米性。利用正文中的(15)和(16)式可有：

$$\hat{\mathscr{L}}^{HP}_q=\hat{\mathscr{N}}^{-\frac{1}{2}}\hat{\mathscr{L}}^D_q\hat{\mathscr{N}}^{\frac{1}{2}}=\hat{\mathscr{L}}^D_q, \tag{A8}$$

$$\hat{\mathscr{C}}^{HP}=\hat{\mathscr{N}}^{-\frac{1}{2}}\hat{\mathscr{C}}^D\hat{\mathscr{N}}^{\frac{1}{2}}=\hat{\mathscr{C}}^D. \tag{A9}$$

而两个互为共轭的算子的 Halstein-Primakoff 表示保持它们原有的厄米共轭关系：

$$(\hat{\mathscr{G}}^{(HP)})^+=\hat{\mathscr{N}}^{-\frac{1}{2}}\hat{\mathscr{G}}^+\hat{\mathscr{N}}^{-\frac{1}{2}}=(\mathscr{G}^+)^{(HP)}, \tag{A10}$$

我们可以直接验证 $\hat{\mathscr{L}}^D_\mu$ 保持 $\hat{L}_\mu(x)$ 的厄米共轭关系。从 (18) 和 (20) 式可得出

$$\hat{\mathscr{L}}^D_\mu=\sqrt{10}\left(\alpha_2\otimes\frac{\partial}{\partial\alpha_2^*}\right)_{1\mu}=\sqrt{10}\sum_{qq'}\langle 2q2q'|1\mu\rangle\alpha_{2q}\frac{\partial}{\partial\alpha_{2\tilde{q}}}. \tag{A11}$$

这正是 Bohr-Mottelson 模型中角动量算子的集体变量表示式，从这里看出它与 Elliott 模型角动量算子的连续变量表示是一致的。

利用下面关系式：

$$\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_{q'}}\alpha_{\tilde{q}}\right]=(-)^q\delta_{q',-q}, \tag{A12}$$

$$\sum_q\langle 2q2-q|10\rangle(-1)^q=0, \tag{A13}$$

可以计算出：

$$\mathscr{L}^{D+}_\mu=(-1)^\mu\mathscr{L}^D_{-\mu}. \tag{A14}$$

这一结果与 $\hat{L}_\mu(x)$ 的厄米共轭关系一致。

附　　录　　二

当 $|\phi_0(x)\rangle$ 具有内禀角动量时，需补充下面列矢及矩阵 C，D

$$\frac{\partial}{\partial r^*}=\left(\frac{\partial}{\partial\Omega_{\bar{\nu}}}\right),\ \ C_{\mu\nu}=\Omega_{\widetilde{\nu-\mu}}\sqrt{30}\,(-1)^\nu\begin{pmatrix}1&2&2\\ \nu-\mu&\mu&-\nu\end{pmatrix},\ \ D_{\mu\nu}=\Omega_{\widetilde{\nu-\mu}}\sqrt{6}\,(-1)^{\nu+1}\begin{pmatrix}1&1&1\\ \nu-\mu&\mu&-\nu\end{pmatrix}. \tag{B1}$$

C，D 是厄米矩阵。再增加两个算子公式

$$[\Omega\hat{L},\hat{Q}]=C\hat{L},\ \ [\Omega\hat{L},\hat{L}]=D\hat{L} \tag{B2}$$

其中 $\Omega\hat{L}=\sum_\nu\Omega_{\bar{\nu}}\hat{L}_\nu$，用附录一的方法求得

$$\hat{\mathscr{L}}^D(\alpha,\Omega)=B\frac{\partial}{\partial\alpha^*}+D/(I-e^{-iD})\frac{\partial}{\partial\Omega^*}, \tag{B3}$$

$$\hat{Q}^D(\alpha,\Omega)=-i\sqrt{3B^+B}\,\mathrm{ctg}\sqrt{3B^+B}\frac{\partial}{\partial\alpha^*}+i\sqrt{3B^+B}\,\mathrm{tg}(\sqrt{3B^+B}/2)B^{-1}D/(I-e^{iD})\frac{\partial}{\partial\Omega^*}. \tag{B4}$$

附　　录　　三

利用 Baker-Campbell-Hausdorff 公式及角动量对易关系

$$\hat{J}_i e^{i\varphi \hat{J}_j} = e^{i\varphi \hat{J}_j} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i\varphi)^k}{k!} [\hat{J}_j, \hat{J}_i]_{(k)}, \tag{C1}$$

可计算出：

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \langle \phi(x,\alpha,\beta,\gamma) | \phi(x,\alpha',\beta',\gamma') \rangle = \langle \phi(x,\alpha,\beta,\gamma) | i\hat{J}_z(x) | \phi(x,\alpha',\beta',\gamma') \rangle, \tag{C2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \langle \phi(x,\alpha,\beta,\gamma) | \phi(x,\alpha',\beta',\gamma') \rangle = \langle \phi(x,\alpha,\beta,\gamma) | -i\sin\alpha \hat{J}_x + i\cos\alpha \hat{J}_y | \phi(x,\alpha',\beta',\gamma') \rangle,$$

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} \langle \phi(x,\alpha,\beta,\gamma) | \phi(x,\alpha',\beta',\gamma') \rangle = \langle \phi(x,\alpha,\beta,\gamma) | i(\cos\alpha\sin\beta \hat{J}_x + \sin\alpha\sin\beta \hat{J}_y + \cos\beta \hat{J}_z) | \phi(x,\alpha',\beta',\gamma') \rangle,$$

利用 Dyson 算子的定义 (A1)，从上式求出：

$$\begin{aligned} \hat{J}_x^D &= i\sin\alpha \frac{\partial}{\partial \beta} + i\cos\alpha \,\mathrm{ctg}\beta \frac{\partial}{\partial \alpha} - i\cos\alpha / \sin\beta \frac{\partial}{\partial \gamma}, \\ \hat{J}_y^D &= i\sin\alpha \,\mathrm{ctg}\beta \frac{\partial}{\partial \alpha} - i\cos\alpha \frac{\partial}{\partial \beta} - i\sin\alpha / \sin\beta \frac{\partial}{\partial \gamma}, \\ \hat{J}_z^D &= -i \frac{\partial}{\partial \alpha}. \end{aligned} \tag{C3}$$

参 考 文 献

[1] A. Bohr, *Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk.*, **26**(1952), No. 14;
A. Bohr and B. R. Mottelson, *Mat. Eys. Medd. Dan. Vid. Selsk.*, **27**(1953), No. 16.
[2] J. P. Elliott, *Proc. Roy. Soc., London,* **A245**(1958), 128, 562.
[3] M. Harvey, in Advances in Nuclear Physics, Vol. 1, (M. Baranger and E. Vogt, eds.), Plenum Press, New York (1968).
[4] 徐躬耦，中国科学， No. 6(1974), P567; 徐躬耦，*Progr part. Nucl. Phys.*, **9**(1983), 573. 徐躬耦，*Nucl. Phys.*, **A421**(1984), 275c.
[5] 陈金全，群表示论的新途径，上海科技出版社，1984;
J. Q. Chen, F. Wang and M. J. Gao, *J. Phys A. Math. Gen.*, **16**(1983), 1347.
[6] 徐躬耦，王顺金，杨亚天，李福利，生成坐标方法与原子核集体运动：集体自由度的选取　高能物理与核物理，(待发表).
[7] 徐躬耦，高能物理与核物理，**8**(1984)，p. 207.
[8] 本文中(15)，(16)两式可经直接计算证明：因 $\hat{\mathscr{L}}_q^D$ 和 $\hat{\mathscr{C}}_{(SU(3))}^D$ 保持原来的厄米共轭关系，故(15)，(16)式成立(见附录 1)．一般证明见徐躬耦，王顺金，杨亚天的总结性文章：生成坐标方法与原子核集体运动，《物理学进展》，(待发表).
[9] B. G. Wybourne, Classical Groups for Physicists, John Wiley & Sons, New York, 1974.

CONTINUOUS VARIABLE REPRESENTATION OF ELLIOTT $SU(3)$ MODEL

WANG SHUN-JIN　　CAO JIAN-MIN　　XU GONG-OU

(*Lanzhou University*)

ABSTRACT

The continuous variable representation and the geometrical interpretation of the Elliott $SU(3)$ model are given by virtue of the generator coordinate method. It is pointed out that the carrier subspace of collective states of the dynamical group $SU(3)$ in the Elliott model is spanned by the β and γ vibration states as well as the rotation states.