

# 调变厚度永磁多极磁体磁场分布的分析

徐建铭 徐清

(中国科学院高能物理研究所)

## 摘 要

本文讨论了实际情况下,调变厚度永磁多极磁体的磁场分布,给出了磁场的空间分布形式,并讨论了减少不必要的高次谐波场的可能方法。

在文献[1, 2]里,我们提出了调变厚度永磁多极磁体的设计,并证明了在理想二维情况下,这种磁体能产生纯 $2N$ 极磁场。理想情况的磁体由无穷多无限薄的永磁块组成,这些永磁块的厚度根据要求建造的磁场形式,按一定规律调变,即可形成所要求的纯 $2N$ 极磁场。

实际建造的磁体只能由有限数目的永磁块组成,因而所形成的磁场除需要的 $2N$ 极磁场外,还会有一些不需要的谐波磁场存在。下面我们将分析这些谐波磁场和磁体参数间的关系及减弱谐波场的方法。

### 1. 磁体结构

如文献[1, 2]所述,为了形成 $2N$ 极磁场,将圆柱形磁轭等分成 $2N$ 份,每份再等分成 $n$ 个小区。这样,每一小区的张角 $\delta$ 可以表示为:

$$\delta = \frac{\pi}{Nn}.$$

每个小区中都安放有一个扇形、矩形或梯形永磁块。本文只讨论永磁块为扇形的情況。如果某小区中心线的角坐标是 $j\delta$ ,则在它里面所安放的扇形永磁块的张角 $\delta_j$ 由下式表示:

$$\delta_j = \delta |\sin Nj\delta|. \quad (1)$$

我们称该永磁块为第 $j$ 永磁块。

考虑到工艺上较易实现,各永磁块中各点的磁化方向相同,都与永磁块的中心线平行(向心或离心),强度为 $M_j$ 。磁化方向的安排如下式所示:

$$M_j = |M|, \quad \text{如果 } \sin Nj\delta > 0; \quad (2a)$$

$$M_j = -|M|, \quad \text{如果 } \sin Nj\delta < 0. \quad (2b)$$

图1是一个这种磁体的断面示意图。图中箭头表示磁化方向。该图所示是一个 $N=2, n=6$ 的磁体。

在理想情况下, $n \rightarrow \infty$ ,因此各永磁块中各点磁化方向都是沿径向的,没有切线分

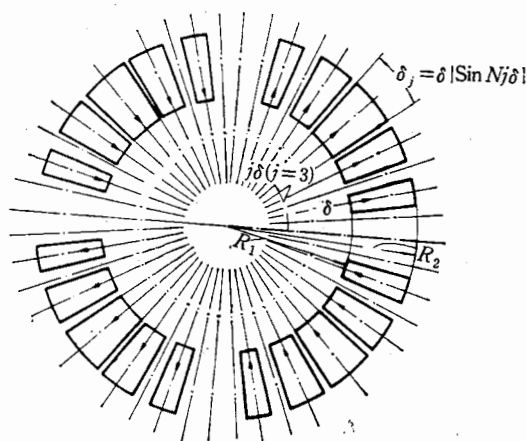


图 1 厚度调变永磁体断面示意图 ( $N = 2, n = 6$ .)

量。实际磁体由有限数目的永磁块构成,每个永磁块中各点的磁化方向相同,都与永磁块的中心线平行。这样,在中心线以外的地方,除了径向磁化强度外,还会有切线方向的磁化强度。

### 2. 理想情况磁体的磁势

文献 [2] 已证明,在二维情况下,永磁磁体内部  $r, \theta$  点的磁势为:

$$V(r, \theta) = \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} -2M_{r'} \left[ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{r}{r'} \right)^m \cos m(\theta - \theta') \right] dr' d\theta' + \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} 2M_{\theta'} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{r}{r'} \right)^m \sin m(\theta - \theta') dr' d\theta', \quad (3)$$

式中  $M_{r'}$  及  $M_{\theta'}$  分别是在  $r', \theta'$  处永磁材料的径向及切向磁化强度,  $R_1$  及  $R_2$  为圆柱形永磁体的内径及外径,积分是在整个永磁材料面积内进行的。在理想情况下,  $n \rightarrow \infty$ ,  $M_{\theta'} = 0$ 。便得到<sup>[2]</sup>:

$$V(r, \theta) = -2\pi |M| r \ln \frac{R_2}{R_1} \sin N\theta \quad N = 1; \quad (4)$$

或

$$V(r, \theta) = -2\pi |M| \frac{r^N}{1-N} \left( \frac{1}{R_2^{N-1}} - \frac{1}{R_1^{N-1}} \right) \sin N\theta, \quad N \neq 1. \quad (5)$$

上式表明,在理想情况下,这种永磁体能产生纯  $2N$  极磁场。

### 3. 实际磁体的磁势

当磁体由有限数目的永磁块组成时,在第  $i$  个永磁块里,各点的径向磁化强度  $M_{r,i}$  及切向磁化强度  $M_{\theta,i}$  分别为:

$$M_{r,i} = M_i \cos(\theta' - j\delta), \quad (6)$$

$$M_{\theta,i} = -M_i \sin(\theta' - j\delta). \quad (7)$$

这一情况,如图 2 所示。

为求得实际磁体所形成的磁势,把式 (6)、(7) 代入式 (3),化简后得到:

或者

$V($

把式

显然

$m =$

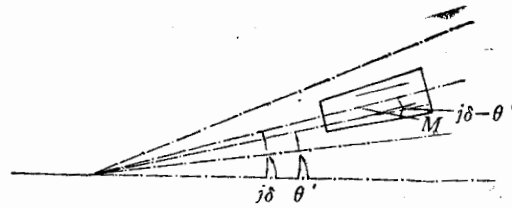


图 2 永磁块中磁化强度分布图

$$V(r, \theta) = -2 \sum_{j=0}^{2Nn-1} \int_{j\delta - \frac{\delta_j}{2}}^{j\delta + \frac{\delta_j}{2}} M_j \left[ (R_2 - R_1) \cos(\theta' - j\delta) + r \ln \frac{R_2}{R_1} \cos(\theta - 2\theta' + j\delta) + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{r^m}{1-m} \cdot \left( \frac{1}{R_2^{m-1}} - \frac{1}{R_1^{m-1}} \right) \times \cos(m\theta - m\theta' - \theta' + j\delta) \right] d\theta' \quad (8)$$

或者,

$$V(r, \theta) = -2 \sum_{j=0}^{2Nn-1} M_j \left[ 2(R_2 - R_1) \sin \frac{\delta_j}{2} + r \ln \frac{R_2}{R_1} \cos(\theta - j\delta) \sin \delta_j + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{r^m}{1-m} \frac{2}{1+m} \left( \frac{1}{R_2^{m-1}} - \frac{1}{R_1^{m-1}} \right) \cos m(\theta - j\delta) \sin \frac{m+1}{2} \delta_j \right]. \quad (9)$$

把式 (1) 和式 (2) 代入上式, 便得到:

$$V(r, \theta) = -2 |M| \left[ 2(R_2 - R_1) \sum_{j=0}^{2Nn-1} \sin \left( \frac{\delta}{2} \sin N_j \delta \right) + r \ln \frac{R_2}{R_1} \sum_{j=0}^{2Nn-1} \cos(\theta - j\delta) \sin(\delta \sin N_j \delta) + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{2}{m+1} \frac{r^m}{1-m} \left( \frac{1}{R_2^{m-1}} - \frac{1}{R_1^{m-1}} \right) \cdot \sum_{j=0}^{2Nn-1} \cos m(\theta - j\delta) \sin \left( \frac{m+1}{2} \delta \sin N_j \delta \right) \right]. \quad (10)$$

为了简化式 (10), 我们先分析下式:

$$\sum_{j=0}^{2Nn-1} \cos m(\theta - j\delta) \sin \left( \frac{m+1}{2} \delta \sin N_j \delta \right) \quad (11)$$

显然, 式 (11) 中如  $m = 0$ , 则化为  $\sum_{j=0}^{2Nn-1} \sin \left( \frac{\delta}{2} \sin N_j \delta \right)$ , 即式 (10) 右侧的第一项; 当

$m = 1$  时, 即为式 (10) 右侧的第二项; 当  $m \geq 2$  时则为第三项.

利用下列二个展开式,

$$\sin \left( \frac{m+1}{2} \delta \sin N_j \delta \right) = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{1}{(2l+1)!} \left( \frac{m+1}{2} \delta \right)^{2l+1} (\sin N_j \delta)^{2l+1}, \quad (12)$$

$$(\sin N_j \delta)^{2l+1} = \frac{1}{2^{2l}} \sum_{k=0}^l (-1)^{l+k} \binom{2l+1}{k} \sin(2l+1-2k)N_j \delta. \quad (13)$$

与永磁块  
方向的磁

$R_2$  为圆柱  
 $n \rightarrow \infty$ ,

磁度  $M_j \delta$

上式中  $\binom{2l+1}{k}$  为:

$$\binom{2l+1}{k} = \frac{(2l+1)(2l)(2l-1)\cdots(2l+1-k+1)}{k!} \quad (14)$$

把式 (12), (13) 代入式 (11), 化简后可得:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{2Nn-1} \cos m(\theta - j\delta) \sin \left( \frac{m+1}{2} \delta \sin Nj\delta \right) \\ &= \sum_{j=0}^{2Nn-1} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^l (-1)^{2l+k} \frac{1}{(2l+1)!} \left( \frac{m+1}{2} \delta \right)^{2l+1} \\ & \quad \cdot \frac{1}{2^{2l}} \binom{2l+1}{k} \cos m(\theta - j\delta) \sin(2l+1-2k)Nj\delta, \end{aligned}$$

或者

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{2Nn-1} \cos m(\theta - j\delta) \sin \left( \frac{m+1}{2} \delta \sin Nj\delta \right) \\ &= \sum_{j=0}^{2Nn-1} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^l (-1)^k \frac{1}{(2l+1)!} \left( \frac{m+1}{2} \delta \right)^{2l+1} \frac{1}{2^{2l}} \binom{2l+1}{k} \\ & \quad \cdot [\cos m\theta \cos mj\delta \sin(2l+1-2k)Nj\delta \\ & \quad + \sin m\theta \sin mj\delta \sin(2l+1-2k)Nj\delta]. \end{aligned} \quad (15)$$

在上式中,

$$\sum_{j=0}^{2Nn-1} \cos mj\delta \sin(2l+1-2k)Nj\delta = 0. \quad (16)$$

而

$$\sum_{j=0}^{2Nn-1} \sin mj\delta \sin(2l+1-2k)Nj\delta = Nn, \quad (17)$$

当

$$m - (2l+1-2k)N = 2qN_n \quad (18)$$

或

$$m + (2l+1-2k)N = 2rN_n \quad (19)$$

时, 上二式中,  $q, r$  为任意整数. 在其它情况下, 式 (17) 也等于零.

从式 (18) 和 (19) 可知, 只有当

$$m = (2p+1)N \quad (20)$$

并且满足:

$$2p+1 - (2l+1-2k) = 2qn, \quad (21)$$

或者

$$2p+1 + 2l+1 - 2k = 2rn \quad (22)$$

时, (17) 式才成立 ( $p$  为正整数). 亦即要求

$$k = l - p + qn, \quad (23)$$

或者

$$k = l + p + 1 - rn. \quad (24)$$

又考虑到:

$$l \geq k \geq 0,$$

(14)

所以  $q, r$  必须满足以下条件:

$$\frac{p}{n} \geq q \geq \frac{p-l}{n}, \quad (25)$$

$$\frac{l+p+1}{n} \geq r \geq \frac{p+1}{n}. \quad (26)$$

利用式 (15)、(16)、(17)、(18)、(19)、(23)、(24) 及 (25)、(26), 可知:

$$\sum_{j=0}^{2Nn-1} \sin\left(\frac{\delta}{2} \sin Nj\delta\right) = 0. \quad (27)$$

如果  $N \neq 1$ , 则

$$\sum_{j=0}^{2Nn-1} \cos(\theta - j\delta) \sin(\delta \sin Nj\delta) = 0. \quad (28)$$

当  $N = 1$  时,

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{2n-1} \cos(\theta - j\delta) \sin(\delta \sin j\delta) \\ (15) \quad &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)!} \left(\frac{\pi}{n}\right)^{2l+1} \frac{1}{2^{2l}} \left[ \sum_q (-1)^{l+qn} \binom{2l+1}{l+qn} \right. \\ (16) \quad & \left. + \sum_r (-1)^{l+1-rn} \binom{2l+1}{l+1-rn} \right] n \sin \theta. \end{aligned} \quad (29)$$

式中  $q, r, l$  应满足下列条件:

$$0 \geq q \geq -\frac{l}{n}, \quad (30)$$

$$\frac{l+1}{n} \geq r \geq \frac{1}{n}. \quad (31)$$

另外,

$$\begin{aligned} (19) \quad & \sum_{j=0}^{2Nn-1} \cos m(\theta - j\delta) \sin\left(\frac{m+1}{2} \delta \sin Nj\delta\right) \\ (20) \quad &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{Nn}{(2l+1)!} \left(\frac{m+1}{2} \frac{\pi}{Nn}\right)^{2l+1} \frac{1}{2^{2l}} \left[ \sum_q (-1)^{l-p+qn} \binom{2l+1}{l-p+qn} \right. \\ (21) \quad & \left. + \sum_r (-1)^{l+p+1-rn} \binom{2l+1}{l+p+1-rn} \right] \sin(2p+1)N\theta. \end{aligned} \quad (32)$$

在上式中  $m = (2p+1)N$ .  $q, r$  应满足式 (25) 和 (26).

把式 (27)、(29) 和 (32) 代入式 (10), 便得到下述结果:

当  $N = 1$  时,

$$V(r, \theta) = -2|M| \left[ r \ln \frac{R_2}{R_1} C_0 \sin \theta + \sum_{p=1}^{\infty} C_p r^{2p+1} \sin(2p+1)\theta \right]. \quad (33)$$

当  $N \neq 1$  时,

$$V(r, \theta) = -2|M| \left[ \frac{r^N}{1-N} \left( \frac{1}{R_2^{N-1}} - \frac{1}{R_1^{N-1}} \right) C_0 \sin N\theta \right. \\ \left. + \sum_{p=1}^{\infty} C_p r^{(2p+1)N} \sin(2p+1)N\theta \right]. \quad (34)$$

[1]  
[2]

上二式中  $C_0$  和  $C_p$  分别为:

$$C_0 = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)!} \left( \frac{\pi}{Nn} \right)^{2l+1} \frac{1}{2^{2l}} \left[ \sum_q (-1)^{l+qn} \binom{2l+1}{l+qn} \right. \\ \left. + \sum_r (-1)^{l+1-rn} \binom{2l+1}{l+1-rn} Nn \left( \frac{N+1}{2} \right)^{2l} \right], \quad (35)$$

$$C_p = \frac{Nn}{1-(2p+1)N} \left[ \frac{1}{R_2^{(2p+1)N-1}} - \frac{1}{R_1^{(2p+1)N-1}} \right] \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)!} \\ \times \left[ \frac{(2p+1)N+1}{4} \right]^{2l} \left( \frac{\pi}{Nn} \right)^{2l+1} \left[ \sum_q (-1)^{l-p+qn} \binom{2l+1}{l-p+qn} \right. \\ \left. + \sum_r (-1)^{l+p-rn+1} \binom{2l+1}{l+p-rn+1} \right]. \quad (36)$$

在式 (35) 中由于  $p=0$ ,  $q, r$  应满足式 (30) 及 (31). 在式 (36) 中,  $q, r$  应满足式 (25) 和 (26).

在式 (33) 和 (34) 中, 等号右侧的第一项是要求建造的磁场, 即  $2N$  极磁场, 而第二项是由于磁体结构不是理想情况所产生的一些谐波场. 从公式可知, 它们都是主磁场的奇次谐波, 即  $2(p+1)N$  极磁场. 它们的幅值与主磁场幅值之比为:

$$r \ln \frac{R_2}{R_1} C_0 / C_p r^{2p+1}, \quad \text{当 } N=1; \quad (37)$$

或

$$\frac{r^N}{1-N} \left( \frac{1}{R_2^{N-1}} - \frac{1}{R_1^{N-1}} \right) C_0 / C_p r^{(2p+1)N} \quad \text{当 } N \neq 1. \quad (38)$$

从式 (36) 可知, 最严重的谐波是低次谐波, 如三次、五次或七次谐波场. 对那些谐波, 在表示式 (36) 中, 最主要是  $l=p$ ,  $q=0$  的项, 因此, 谐波场幅值的系数  $C_p$  可近似为:

$$C_p = \frac{\pi}{1-(2p+1)N} \left[ \frac{1}{R_2^{(2p+1)N-1}} - \frac{1}{R_1^{(2p+1)N-1}} \right] \frac{1}{(2p+1)!} \\ \times \left[ \frac{(2p+1)N+1}{4} \right]^{2p} \left( \frac{\pi}{nN} \right)^{2p} \quad (39)$$

对式 (1) 进行修正, 即可抵消某些主要的不需要的谐波, 例如, 如果令

$$\delta_j = \delta |\sin Nj\delta| + \frac{1}{3!} \left( \frac{3N+1}{2} \right)^2 \delta^3 |\sin Nj\delta|^3 \quad (40)$$

在  $N=2$  及  $n=6$  的条件下, 即可把三次谐波减少  $1/2$ . 如果在式 (40) 右侧增加更多的项, 则可以更有效地减弱谐波场.

另外, 调节永磁块的径向位置, 同样能减弱谐波场, 改善磁场分布的均匀性.

STU

nent  
the re  
In 2-c  
sions  
thods  
also c

## 参 考 文 献

- (34) [1] 徐建铭等, 一种永磁多极磁体的新型设计专利申请号 85106663, 申请日期 85 年 9 月 4 日.  
 [2] 徐清等, 原子能科学技术, Vol. 20, No. 6 (1986).

## STUDIES OF THE FIELD DISTRIBUTION OF THE MODULATING WIDTH MULTIPOLE PERMANENT MAGNETS

(35)

XU JIAN-MING XU QING

*(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica)*

## ABSTRACT

(36) In this paper, the magnetic field distribution of the modulating width multipole permanent magnets is analyzed. Only radially magnetized permanent magnet segments are used and the required magnetic field is formed by modulating the widths of the segments in this project. In 2-dimensional ideal case pure  $2N$ -pole magnetic field can be formed. The spatial expressions of the scalar potential for the ideal and real 2-dimensional cases are given. And the methods for reducing the undesirable higher harmonics of the magnetic field in the real case are also discussed.

足式 (25)  
 而第二  
 主磁场的

(37)

(38)

对那些谱  
 可近似

(39)

(40)

更多的