

反对称化算子中重配对环结构 及一种玻色映象理论

鲍 诚 光¹⁾

(中 山 大 学)

王如琳¹⁾ 潘缉智¹⁾

(中国科学院高能物理研究所)

摘 要

本文导出反对称化算子的严格的玻色表象。反对称化效应表现为玻色空间的多体力。估计了多体力的重要性。并在考虑了三玻色力的情况下，用玻色表象计算了在 $j = 13/2$ 壳上的六费米子系统的能谱。得到了和严格解全同的结果，并发现当费米空间拥挤时，三玻色力有不可忽略的重要性。

一、引 言

微观相互作用玻色子模型^[1-4]的核心问题是费米空间到玻色空间的映象。

本文借助于一组具有特殊置换性质的基矢，导出了反对称化算子的玻色表象^[5]，得到了作用于玻色空间的等效哈密顿量 $\mathcal{H}_{\text{eff}}^{[6]}$ ；从而建立了一个严格的映象理论，其特点是存在着有限类型的多种多体力。

Faessler 和 Morrison^[6]曾利用辛弱数守恒映象 (Seniority conserving mapping) 计算了 $j = 13/2$ 壳上四费米子和六费米子系统的能谱。冯达旋和吴成礼等^[7]利用他们提出的复合粒子表象也在该壳上作了计算。为了更好地进行比较，我们用导得的反对称化算子映象方法，也对 $j = 13/2$ 壳上的六费米子系统作了计算。

二、反对称化算子的映象方法

假定费米子两两配对，组成对态 φ_K

$$\varphi_K(1,2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta}^K (f_\alpha(1)f_\beta(2) - f_\beta(1)f_\alpha(2)). \quad (1)$$

式中 f_α 是以量子数 α 为标志的费米子状态。 $C_{\alpha\beta}^K$ 称之为结构常数，它需保证 $\varphi_K(1,2)$ 的

1) 中国高等科学技术中心理论物理分中心协联成员。

本文 1986 年 3 月 20 日收到。

正交归一性和费米子交换的反对称性。

定义一组完备的基矢,其中每一个基是一组对态积,对于一对费米子作为整体与另一对费米子之间的交换是对称的。

$$\Phi_{[u]} \equiv \Phi_{K_1 K_2 \dots K_m} = \frac{1}{\sqrt{m!}} \sum_p \varphi_{p_1}(1,2) \varphi_{p_2}(3,4) \dots \varphi_{p_m}(N-1,N), \quad (2)$$

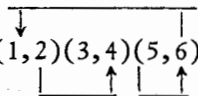
其中 $K_1 K_2 \dots K_m$ 为 m 个对态分别所处的状态, $p_1, p_2 \dots p_m$ 为 $K_1 K_2 \dots K_m$ 的一种排列, \sum_p 表示对 $m!$ 种排列求和。

显然,为了描写费米系统,波函数 $\Phi_{[u]}$ 有必要进行反对称化。

$$\Psi = \mathcal{A} \Phi_{[u]}. \quad (3)$$

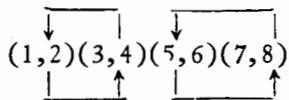
反对称化算子 \mathcal{A} 对 $\Phi_{[u]}$ 的作用,就是改变 $\Phi_{[u]}$ 中原有的配对方式,这种重配对的情况可利用杨图来加以分类。

以 8 费米子系统为例,设原有的配对方式为: (1,2)(3,4)(5,6)(7,8)



经反对称化算子作用后,一种可能的粒子置换为,粒子 2,4,6 分别跑到箭头所指的位置,这时原第一对内有一粒子跑到第二对,原第二对内有一粒子跑到第三对,原第三对内又有一粒子跑回第一对,构成一个长度等于三的重配对的环。三表示牵涉到的对的数目。

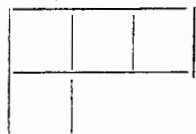
另一种置换粒子的新位置如下面所示:



这时有两个重新配对的环。一般说来,对于一个 $N = 2m$ 费米子系统,每一种粒子置换均对应于若干个重新配对的环,因而可用一个 m 格的杨图 λ 表示,杨图中的每一行对应于一个重新配对环。即 λ 表示一种重新配对的方式,它代表一组正整数 n_1, n_2, \dots, n_m , 记为

$$\lambda[n_1, n_2, \dots, n_m],$$

满足 $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_m \geq 0$, 且 $n_1 + n_2 + \dots + n_m = m$. n_i 是杨图第 i 行的方格数,也就是第 i 个重新配对环中粒子对的数目。上面提到的两种重新配对方式可分别用杨图表示为



$\lambda[3,1]$



$\lambda[2,2]$

与杨图 λ 相对应的置换有多少个呢? 可以证明这个数目是

$$2^m (m!)^2 \prod_{i=1}^m \frac{1}{g_i!} \left(\frac{2^{i-1}}{i} \right)^{g_i},$$

其中 g_i 是长度为 i (即有 i 个格) 的重配对环数。

令 \mathcal{A}_λ 为具有重新配对方式为 λ 的所有置换(连同其杨因子)之和, 利用恒等式

$$2^m(m!)^2 \sum_{g_1, \dots, g_m} \prod_{i=1}^m \frac{1}{g_i!} \left(\frac{2^{i-1}}{i}\right)^{g_i} \equiv (2m)!,$$

$$\left(\sum_i i g_i = m\right)$$

不难得到

$$\mathcal{A} = \sum_\lambda \mathcal{A}_\lambda. \quad (4)$$

这一公式给出了反对称算子的分解.

如(2)式, 令 p_1, p_2, \dots, p_m 为 K_1, K_2, \dots, K_m 的某种排列, \sum_p 为对这些排列求和, 经推导可得

$$\mathcal{A}_\lambda \Phi_{K_1 K_2 \dots K_m} = \frac{1}{\prod_{i=1}^m i^{\varepsilon_i} g_i!} \sum_p \sum_{K'_1 K'_2 \dots K'_{m-g_1}} T_{p_1 p_2 \dots p_{n_1} K'_1 K'_2 \dots K'_{n_1}}^{(n_1)} \quad (5)$$

$$\times T_{p_{n_1+1} p_{n_1+2} \dots p_{n_1+n_2} K'_{n_1+1} K'_{n_1+2} \dots K'_{n_1+n_2}}^{(n_2)} \dots \Phi_{K'_1 \dots K'_{m-g_1} p_{m-g_1+1} \dots p_m},$$

其中上标 n_i 标志长度为 n_i 的环;

$$T_{p_1 \dots p_n, K'_1 \dots K'_n}^{(n)} = (-)^{n-1} \frac{2^{2n-1}}{(n!)^2} \sum_{\substack{a_1, \dots, a_n \\ \beta_1, \dots, \beta_n}} \sum_Q C_{a_1 \beta_1}^{q_1} C_{a_2 \beta_2}^{q_2} \dots C_{a_n \beta_n}^{q_n} \\ \times \sum_{Q'} C_{a_1 \beta_n}^{q'_1} C_{a_2 \beta_1}^{q'_2} \dots C_{a_n \beta_{n-1}}^{q'_n}, \quad (6)$$

其中 $p_1 p_2 \dots p_n$ 和 $K'_1 K'_2 \dots K'_n$ 的某种重排列分别记为 $q_1 q_2 \dots q_n$ 和 $q'_1 q'_2 \dots q'_n$, \sum_Q 和

$\sum_{Q'}$ 分别表示对这些排列的求和.

令 A_i^+, A_i 分别为玻色子的产生和消灭算符, 满足

$$[A_i, A_i^+] = \delta_{ii'}.$$

令 $| \rangle$ 为玻色空间的真空态.

$$A_i | \rangle = 0.$$

在玻色空间中定义一个基矢

$$| A_{K_1}^+ A_{K_2}^+ \dots A_{K_m}^+ | \rangle \equiv (A^+)^m | \rangle. \quad (7)$$

若定义

$$\mathcal{A}_\lambda^{[B]} = \sum_{\substack{K_1 K_2 \dots K_{m-g_1} \\ K'_1 K'_2 \dots K'_{m-g_1}}} T_{K_1 K_2 \dots K_{m-g_1}, K'_1 K'_2 \dots K'_{m-g_1}}^1 A_{K_1}^+ A_{K_2}^+ \dots A_{K_{m-g_1}}^+ \quad (8)$$

$$\times A_{K'_1} A_{K'_2} \dots A_{K'_{m-g_1}},$$

$$T_{K_1 K_2 \dots K_{m-g_1}, K'_1 K'_2 \dots K'_{m-g_1}}^1 = \frac{1}{\prod_{i=2}^m i^{\varepsilon_i} g_i!} T_{K'_1 K'_2 \dots K'_{n_1}, K_1 K_2 \dots K_{n_1}}^{(n_1)}$$

$$\times T_{K'_{n_1+1} K'_{n_1+2} \dots K'_{n_1+n_2}, K_{n_1+1} K_{n_1+2} \dots K_{n_1+n_2}}^{(n_2)} \dots \quad (9)$$

(9)式中 ig_i 与 $T^{(n)}$ 与(5)式(6)式中相同.

不难得出,对于任何 $[u]$ 和 $[u']$

$$\langle \Phi_{[u']} | \Phi_{[u]} \rangle = \langle |(A)_{[u']}^m (A^+)_{[u]}^m| \rangle \quad (10)$$

成立.

同样对于任何 $[u]$ 和 $[u']$ 可证

$$\langle \Phi_{[u']} | \mathcal{A}_\lambda | \Phi_{[u]} \rangle = \langle |(A)_{[u']}^m \mathcal{A}_\lambda^{[B]} (A^+)_{[u]}^m| \rangle. \quad (11)$$

因而 $\mathcal{A}_\lambda^{[B]}$ 可以认为是 \mathcal{A}_λ 在玻色空间的象.

一般说来,对于任何坐标空间的算符 \hat{O} , 都可在玻色空间中定义一个它的象 $\hat{O}^{[B]}$, 使在其各自的空间内相应的跃迁矩阵元相等.

以哈氏函数 H

$$H = \sum_{i=1}^N h_i + \sum_{i>j}^N V_{ij}, \quad (12)$$

为例,可以证明它的象为

$$H^{[B]} = \sum_{KK'} (W_{KK'} + U_{KK'}) A_K^+ A_{K'} + \frac{1}{4} \sum_{\substack{K_1 K_2 \\ K'_1 K'_2}} X_{K_1 K_2 K'_1 K'_2} A_{K_1}^+ A_{K_2}^+ A_{K'_1} A_{K'_2}, \quad (13)$$

满足

$$\langle \Phi_{[u']} | H | \Phi_{[u]} \rangle = \langle |(A)_{[u']}^m H^{[B]} (A^+)_{[u]}^m| \rangle, \quad (14)$$

(13)式中

$$W_{KK'} = \langle \varphi_{K'}(12) | h_1 + h_2 | \varphi_K(12) \rangle,$$

$$U_{KK'} = \langle \varphi_{K'}(12) | V_{12} | \varphi_K(12) \rangle,$$

$$X_{K_1 K_2 K'_1 K'_2} = \langle \varphi_{K'_1}(12) \varphi_{K'_2}(34) | V_{13} + V_{14} + V_{23} + V_{24} | \varphi_{K_1}(12) \varphi_{K_2}(34) \\ + \varphi_{K_2}(12) \varphi_{K_1}(34) \rangle,$$

找到了 H 和 \mathcal{A} 的象之后,可以找到费米系统的薛定谔方程在玻色空间的等效方程,即可定义一个等效哈氏函数 $\mathcal{H}_{\text{eff}}^{[B]}$, 使之对于任意的 $[u']$ 和 $[u]$ 有

$$\langle \Phi_{[u']} | (E - H) \mathcal{A} | \Phi_{[u]} \rangle = \langle |(A)_{[u']}^m (E - \mathcal{H}_{\text{eff}}^{[B]}) (A^+)_{[u]}^m| \rangle. \quad (15)$$

可证

$$\mathcal{H}_{\text{eff}}^{[B]} = -E \sum_{\lambda} \mathcal{A}_{\lambda}^{[B]} + \frac{1}{2} \left(H^{[B]} \sum_{\lambda} \mathcal{A}_{\lambda}^{[B]} + \sum_{\lambda} \mathcal{A}_{\lambda}^{[B]} H^{[B]} \right), \quad (16)$$

式中 \sum_{λ}' 表示在对 λ 求和时不包括 $\mathcal{A}_0^{[B]}$, \mathcal{A}_0 是指不破坏原配对的项. 今后将在 \mathcal{A} 中引进某种规一化,使得

$$\mathcal{A}_0^{[B]} (A^+)_{[u]}^m | \rangle = (A^+)_{[u]}^m | \rangle.$$

$\mathcal{H}_{\text{eff}}^{[B]}$ 中最大的特点是包括了作用在玻色子之间的各种多体力. 这些多体力包括了因费米子间的相互作用及因费米子反对称化而引起的玻色子间的全部关联.

既然哈氏函数表现为多体力,那么在定量计算之前,对多体力作一个定性的估计就变得十分重要. 在零级能退化的近似下,我们发现所有 $\mathcal{A}_{\lambda}^{[B]}$ 的矩阵元均不正比于 $\left(-\frac{2m}{Q}\right)^{h_{\lambda}}$. 其中 $2m/Q$ 是粒子数与状态数之比,显然是密度的度量. h_{λ} 是与 λ 对应的

杨路
体力

的影

将(

引起的反

—
—
h

不管
此数

其中
量.

s, d,
个基

式中

此数

杨图中去掉第一列后的方格数,是多体力的“阶”的度量。由此可知当密度不大时,高阶多体力极不重要;反之,当密度较大时,多体力的效应应予考虑。

三、 $j=13/2$ 壳上的三玻色子能谱和伪态的清除

以下讨论一个 6 个费米子在单 j 壳, $j = 13/2$, 内运动的模型; 以此检验一下所提出的映象理论。

选二体费米子相互作用形式为:

$$V_{12} = x \sum_{m=-2}^2 (-)^m Y_{2-m}(\uparrow) Y_{2m}(\downarrow). \quad (17)$$

将(17)式代入(16)式,可得等效哈密顿量并可在玻色空间内求解。

在微观相互作用玻色子的研究中,一个十分棘手的问题,就是要去掉由于泡里原理所引起的伪态^[7]。对于给定的总角动量为 J 的六费米子态,我们的办法是先求出线性独立的反对称化的基的数目 h_J 如表 1:

表 1

| J | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ... |
|-------|---|---|---|---|----|---|----|-----|
| h_J | 4 | 1 | 7 | 5 | 11 | 7 | 13 | ... |

不管我们用什么表象,例如用玻色表象, h_J 是所用线性独立基数目的极限值。如果超越此数,就会违背泡里原理而致伪态成分的混入。

因而,在具体计算中,我们把 $\mathcal{A}_{\text{eff}}^{[B]}$ 的解 ψ 展成

$$\psi = \sum_{i=1}^{h_J} c_i \psi_i \equiv \sum_{i=1}^{h_J} c_i [A_{J_1 i}^\dagger, A_{J_2 i}^\dagger, A_{J_3 i}^\dagger] |J_M\rangle, \quad (18)$$

其中 J_{1i}, J_{2i}, J_{3i} 分别为三个玻色子的角动量,耦合成总角动量 J 。 L_i 是中间耦合角动量。

在规定了基的限额之后,另一个问题是保证所用基矢的线性独立性,即如何从一群由 s, d, g 等玻色子组成的基中选出 h_J 个线性独立的基来? 一个必要和充分的判据是这 h_J 个基应满足

$$\text{Det} = \|\langle \psi_i | \mathcal{A}^{[B]} | \psi_j \rangle\| \neq 0, \quad (19)$$

式中 $\mathcal{A}^{[B]}$ 是反对称化算子的玻色映象,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{[B]} = 1 + & \sum_{\substack{K_1 K_2 \\ K_1' K_2'}} T_{K_1 K_2, K_1' K_2'}^\pi A_{K_1}^\dagger A_{K_2}^\dagger A_{K_1'} A_{K_2'} \\ & + \sum_{\substack{K_1 K_2 K_3 \\ K_1' K_2' K_3'}} T_{K_1 K_2 K_3, K_1' K_2' K_3'}^\pi A_{K_1}^\dagger A_{K_2}^\dagger A_{K_3}^\dagger A_{K_1'} A_{K_2'} A_{K_3'} \end{aligned} \quad (20)$$

我们尽量选用 s, d 等角动量小的玻色子组成 h_J 个基矢,并使之经受(30)的检验。由此得到一个不受伪态玷污的玻色空间,在这空间内求解等效的薛定谔方程。

核力参数取为 $x = -10$ 。我们计算了包含 s, d 玻色子和包含 s, d, g 玻色子两种情

况的 $J=0$ 和 2 的能谱, 并和用费米表象求得的严格解(见图 1 (c))作比较。当包括 s, d, g 玻色子时, 所得的结果(见图 1 (b))与严格解完全一致。这说明只要把反对称效应处理好, 费米系统是完全可以玻色表象求解的。当仅包括 s, d 玻色子时, 最下面四条能级仍然和严格解符合得相当好(见图 1 (a))。这说明在所考虑的具体模型中, 由 s, d 玻色

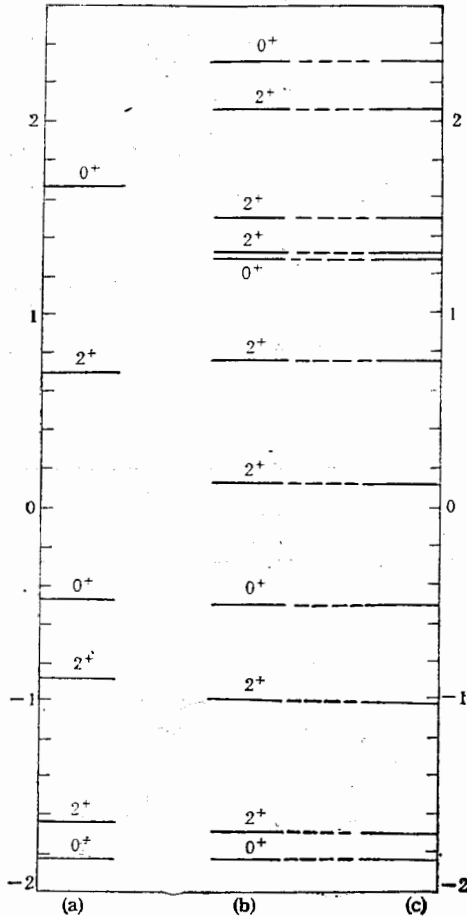


图 1

子构成的子空间对于低激发态来说是一个相当好的子空间。原因是强大的泡里排斥使得 h_j (即容许的态数) 是一个很小的数目, 因而种类很少的玻色子 (s 和 d) 已足以建造一个够大的满足反对称化要求的子空间, 从而能给出低激发态好的近似解。

另一方面, 在计算中发现必需包括三玻色力, 否则得不到合理的结果。这显然是因为三对核子间的波函数在这个狭窄的单 j 壳空间内有相当大的重叠, 因而处于不同对的核子间的交换(见图 2), 包括对应于长度为 3 的重配对环的交换, 是不可忽略的。

图 2: 三玻色力的一个可能的图形。图中圆圈表示玻色子(或“对”态), 直线是费米子线, 波折线表示费米子间的相互作用。

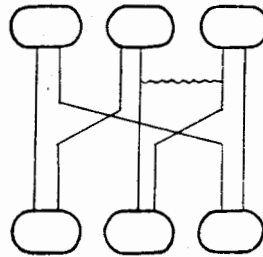


图 2

四、结 束 语

本文提出了一种映象理论, 其特点是在对波函数进行全反对称化之前就进行映象。因而本文的玻色子仅仅是一对独立的配对粒子(简称为“对”)的像, 而未计及环境(即其它费米子的存在)对它的影响。实际上, 由于全反对称化, 引起了“对”与“对”之间的多种关联, 再加上本来就有的费米子-费米子相互作用, 在我们的理论框架中表现为多种类型的多玻色力。

在推导这些多体力的解析表达式时, 引进了一个重要的理论概念即重配对环。 $n!$ 个置换中的每一个都有与之相对应的重配对环结构、对应于一个“杨图”。据此, 所有置换可

舌_s、
立处
能级
玻色
相当
导_h、
种类
大的
低激

玻色
为三
司内
司的
配对

图中
线、

按与之对应的“杨图”来分类(这里只是借用了 S_n 置换群理论中杨图的名字,其内容是不一样的。我们用的是有 $m = n/2$ 格的“杨图”,每一格放一对粒子;这有别于 S_n 群理论中的 n 格杨图)。并进而导出反对称化算子的玻色表象。从而最终导出费米系统的薛定谔方程在玻色空间的等价表示。

引进上述分类法则的物理背景是因为在许多现实的情况下,许多核子挤在一起的几率是小的。相应地,同时牵涉到许多核子的置换(对应于一个长的重配对环)所引起的效应也是小的。因而,在这种情况下,根据重配对环结构进行的分类同时也把重要的项和不重要的项区分开来。从而为在玻色表象中找出近似的处理方法提供依据。其实,若打算对反对称化效应严格地处理,是没有必要引进玻色表象的。之所以引进正是为了找出有效的,能抓住重要的物理效应的近似方法。

若以本文的映象理论和 OAI 映象理论^[2]比较,有一点共同之处:即均保证所有力学量的矩阵元在表象变换中不变。在 OAI 理论中,引进了“源”的概念并予以对基矢进行分类。当从退化的壳层推广到不退化的多 i 壳层时,会遇到额外的理论上的困难。与之相反,本文的框架能方便地应用于多 i 壳层的情况;即便在“源”混杂很严重的情况(如转动核),本文的应用也不受限制。再者,由于利用了重配对环的概念,我们能得到多玻色力的解析表达式。反之,在 OAI 理论中,多体力会有一系列待定参数,需要通过繁琐的递推程序逐级解决。

事实上,本文的框架较为灵活。在必要时可以把不同种类的玻色子(如 g 玻色子, s, d 玻色子的内部激发态等)容易地包括进来;也可以通过引进多玻色力来改善单靠一体力 and 二体力取得的结果。

参 考 文 献

- [1] A. Arima and F. Iachello, *Annals of Phys.*, **99**(1976), 253.
- [2] T. Otsuka, A. Arima and F. Iachello, *Nucl. Phys.*, **A309** (1978), 1.
- [3] L. M. Yang, *Nucl. Phys.*, **A421** (1984), 229c.
- [4] C. L. Wu and D. H. Feng, *Annals of Phys.*, **135**(1981), 166; *Phys. Rev.*, **C24**(1981), 727; *Nucl. Phys.*, **A421**(1984), 249c.
- [5] C. G. Bao, *Nucl. Phys.*, **A425**(1984), 12;
R. L. Wang, J. Z. Pan and C. G. Bao, *Phys. Rev.*, **C33**(1986), 1775.
- [6] A. Faessler and I. Morrison, *Nucl. Phys.*, **A423**(1984), 320.
- [7] P. H. Feng, K. X. Wang, A. L. Wang and C. L. Wu, *Phys. Lett.*, **155B** (1985), 203; C. L. Wu, W. X. Tang and D. H. Feng, *Phys. Lett.*, **155B** (1985), 208.

2. 因
它费
能联。
多玻

11 个
换可

REGROUPING CYCLE STRUCTURE IN THE ANTISYMMETRIZER AND A THEORY OF BOSON MAPPING

BAO CHENG-GUANG

(Center for Theoretical Physics, CCAST (World Laboratory))

and

(Zhongshan University, Guangzhou)

WANG RU-LIN PAN JI-ZHI

(Center for Theoretical Physics, CCAST (World Laboratory))

and

(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica, Beijing)

ABSTRACT

In this paper, an exact boson representation of the antisymmetrizer has been derived. The effect of the antisymmetrization is expressed by different kinds of many-body forces in boson space. An estimation to the importance of many-boson forces has been made. With the inclusion of the three-boson force, a calculation of the spectrum of a six fermions system in $j=13/2$ shell has been carried out in boson space and exact coincidence with the exact spectrum is recovered. We found that the 3-boson force is indispensable when the fermion space is crowded.

仅是
成核
环)的
测 L
湮灭
子结
20%
灭到
而这
两个
所取
个介
取核
发表
与其