第12卷 第1期　　高能物理与核物理　　Vol. 12, No. 1
1988年1月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Jan., 1988

单能级模型中的α关联[1)]

任　中　洲
(南京大学物理系)

徐　躬　耦
(南京大学物理系　兰州大学现代物理系)

摘　　要

本文讨论了与自旋同位旋无关的成对力作用下的单能级模型中的 α 关联. 利用玻色子-费密子复合表示求得了问题的解析解,给出了 α 关联能和 α 转移几率的解析表达式,并讨论了这些结果的意义.

一、引　　言

存在着大量实验事实足以说明重核中的确也存在 α 结团或 α 关联效应. 重核的自发 α 衰变现象也许是最有说服力的证据. 直接反应中 α 结团的转移[1]以及复合核达到平衡前发射 α 粒子[2]都必须用 α 关联来解释. 近年来的研究指出,一些重的变形核因存在 α 结团的激发而呈现偶极振动模式的现象[3],受到大家重视.

然而重核的 α 结团的理论研究还不很成熟. 本文作为研究 α 关联的第一步,先考虑一个成对力作用下的单 l 能级模型,假定成对力与自旋同位旋无关,属 Wigmer 力. 这种模型虽则过于简化,但因为可以得到解析解,有助于深入理解 α 关联的实质并可用来作进一步的计算. 在 § 2 中我们给出了这个模型的玻色子-费密子复合表示;在 § 3 中我们讨论了它的本征解以及 α 关联能, α 转移几率等;最后在 § 4 中,扼要讨论了所得结果的意义.

二、单 l 能级成对力模型的玻色子-费密子复合表示

假定单 l 能级以及与自旋、同位旋无关的成对力,哈密顿量为:

$$H=\varepsilon\sum_{mm_sm_t}a^+_{mm_sm_t}a_{mm_sm_t}+2\lambda\left[\sum_{\alpha}B^+_{\alpha}(\sigma)B_{\alpha}(\sigma)+\sum_{\mu}B^+_{\mu}(\tau)B_{\mu}(\tau)\right]. \tag{1}$$

其中 ε 为单粒子能量, $B^+_\alpha(\sigma)$, $B_\alpha(\sigma)$, $B^+_\mu(\tau)$, $B_\mu(\tau)$ 为核子对的产生、消灭算子.

---

1) 国家教委科学基金资助的课题.

本文 1986 年 7 月 15 日收到.

$$B_\alpha^+(\sigma)=\sqrt{\frac{1}{2}}\,[a^+a^+]^{L=0}_{M=0}\ {}^{S=1}_{M_S=\alpha}\ {}^{T=0}_{M_T=0},\ B_\alpha(\sigma)=(B_\alpha^+(\sigma))^+, \tag{2a}$$

$$B_\mu^+(\tau)=\sqrt{\frac{1}{2}}\,[a^+a^+]^{L=1}_{M=0}\ {}^{S=0}_{M_S=0}\ {}^{T=1}_{M_T=\mu},\ B_\mu(\tau)=(B_\mu^+(\tau))^+. \tag{2b}$$

2λ 为成对力强度，与自旋同位旋无关，吸引时取负值.

由 a^+, a 的双线性式可构成十六个轨道角动量 $L=0$ 的算子，它们构成 $U(4)$ 代数. (2) 式所示十二个算子和这十六个算子一起则构成 $SO(8)$ 代数.

这一问题本可以直接用群论方法求解，但本文采用了玻色子-费密子复合表示，以后将看到这能使问题表述得更为清楚. 构成轨道角动量为零的核子对用玻色子来表示；不构成轨道角动量为零的对的核子集团仍用费密子表示. 我们用 $|v\gamma LM\rangle$ 表示这种未成对的核子集团的态矢：核子数为 v，轨道角动量及其沿 z 轴投影分别为 LM，γ 则表示其它量子数的集合. 这种态矢满足条件

$$B_\alpha(\sigma)|v\gamma LM\rangle=0, \tag{3a}$$

$$B_\mu(\tau)|v\gamma LM\rangle=0. \tag{3b}$$

复合空间中的任意态矢则可表为

$$|F))=F(b_\alpha^+(\sigma),b_\mu^+(\tau);(h_i)_F)|0)|v\gamma LM\rangle, \tag{4}$$

其中 $(h_i)_F$ 是 $U(4)$ 子代数中的算子.

显然

$$B_\alpha(\sigma)|F))=0,\ \ B_\mu(\tau)|F))=0. \tag{5}$$

这种复合空间中的态矢与原来费密子空间中的态矢由下式联系[4]

$$\left.\begin{aligned}&|\Psi\rangle=(0|UP|F)),\\&U=\exp\left[\sum_\alpha b_\alpha(\sigma)B_\alpha^+(\sigma)+\sum_\mu b_\mu(\tau)B_\mu^+(\tau)\right].\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

在以上诸式中 $|0)$ 是玻色子真空态，$b_\alpha^+(\sigma)$, $b_\alpha(\sigma)$, $b_\mu^+(\tau)$, $b_\mu(\tau)$ 是相应于前述核子对的产生、消灭算子，$\mathscr{P}$ 为投影算子，保证 (6) 式不给出为零的结果.

费密子空间中的算子 G 在复合空间中的 Dyson 表示 $\mathscr{G}^{(D)}$ 则由下述关系决定[4]：

$$\langle\Psi_1|\Psi_2\rangle=\langle(F_1|\mathscr{P}\mathscr{N}\mathscr{P}|F_2)\rangle \tag{7}$$

$$\langle\Psi_1|G|\Psi_2\rangle=\langle(F_1|\mathscr{P}\mathscr{G}^{(0)}\mathscr{N}\mathscr{P}|F_2)\rangle \tag{8}$$

算子

$$\left.\begin{aligned}&C^+=\frac{1}{2}\{[B^+(\sigma)B^+(\sigma)]^{00}-[B^+(\tau)B^+(\tau)]^{00}\}\\&C=(C^+)^+\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

是 $S=0$　$T=0$ 对任意两个核子的空间坐标置换对称的四核子结团（α 结团）的产生消灭算子. 经具体计算，求得它们的玻色子-费密子复合表示如下：

$$\mathscr{C}^{(D)}=\alpha \tag{10a}$$

$$\mathscr{C}^{+(D)}=\alpha^+\left\{\left(1-\frac{2n_B+n_F}{2(2l+1)}\right)\left(1+\frac{4-n_F}{2(2l+1)}\right)+\frac{3}{(2l+1)^2}\alpha^+\alpha\right\}$$

$$+\alpha^+\frac{(-1)}{2l+1}\sum_{h_i\in SU(4)}(h_i)_B^{(D)}(h_i^+)_F^{(D)}$$

$$+\frac{1}{2}\{[(B^{+}(\sigma))^{(D)}_{BF}(B^{+}(\sigma))^{(D)}_{BF}]^{00}-[(B^{+}(\tau))^{(D)}_{BF}(B^{+}(\tau))^{(D)}_{BF}]^{00}\}, \tag{10b}$$

其中

$$n_B=\sum_{\alpha} b^{+}_{\alpha}(\sigma)b_{\alpha}(\sigma)+\sum_{\mu} b^{+}_{\mu}(\tau)b_{\mu}(\tau) \tag{11a}$$

$$n_F=\sum_{mm_sm_t} a^{+}_{mm_sm_t}a_{mm_sm_t} \tag{11b}$$

$$\alpha^{+}=\frac{1}{2}\{[b^{+}(\sigma)b^{+}(\sigma)]^{00}-[b^{+}(\tau)b^{+}(\tau)]^{00}\} \tag{12a}$$

$$\alpha=(\alpha^{+})^{+} \tag{12b}$$

$$\begin{aligned}\sum_{h_i\in SU(4)}(h_i)^{(D)}_{B}(h_i^{+})^{(D)}_{F}=&\sqrt{\frac{2}{2l+1}}\sum_{\alpha}[b^{+}(\sigma)\tilde{b}(\sigma)]^{1\,0}_{\alpha\,0}[a^{+}\tilde{a}]^{1\,0}_{\tilde{\alpha}\,0}\\&+\sqrt{\frac{2}{2l+1}}\sum_{\mu}[b^{+}(\tau)\tilde{b}(\tau)]^{0\,1}_{0\,\mu}[a^{+}\tilde{a}]^{0\,1}_{0\,\tilde{\mu}}\\&-\sqrt{\frac{1}{2l+1}}\sum_{\alpha\mu}[b^{+}_{\alpha}(\sigma)b_{\tilde{\mu}}(\tau)+b_{\tilde{\alpha}}(\sigma)b^{+}_{\mu}(\tau)][a^{+}\tilde{a}]^{1\,1}_{\tilde{\alpha}\,\tilde{\mu}}\end{aligned} \tag{13}$$

$$(B^{+}_{\alpha}(\sigma))^{(D)}_{BF}=\sqrt{\frac{1}{2l+1}}\left\{(-\sqrt{2})[b^{+}(\sigma)[a^{+}\tilde{a}]^{10}]^{1\,0}_{\alpha\,0}+\sum_{\mu}b^{+}_{\mu}(\tau)[a^{+}\tilde{a}]^{1\,1}_{\tilde{\alpha}\,\tilde{\mu}}\right\}, \tag{14a}$$

$$(B^{+}_{\mu}(\tau))^{(D)}_{BF}=\sqrt{\frac{1}{2l+1}}\left\{(-\sqrt{2})[b^{+}(\tau)[a^{+}\tilde{a}]^{01}]^{0\,1}_{0\,\mu}+\sum_{\alpha}b^{+}_{\alpha}(\sigma)[a^{+}\tilde{a}]^{1\,1}_{\tilde{\alpha}\,\mu}\right\}. \tag{14b}$$

对于 (1) 式所示的哈密顿量,经具体计算,求得其玻色子-费密子表示如下:

$$\begin{aligned}\mathscr{H}^{(D)}=&2\left(\varepsilon+\lambda+\frac{\lambda}{2l+1}\right)n_B-\frac{2\lambda}{2l+1}n_B^2+\frac{12\lambda}{2l+1}\alpha^{+}\alpha+\varepsilon n_F\\&-2\lambda\left\{\sum_{h_i\in SU(4)}(h_i)^{(D)}_{B}(h_i^{+})^{(D)}_{F}+\frac{n_Bn_F}{2(2l+1)}\right\}\end{aligned} \tag{15}$$

因为算子 $\alpha^{+}\alpha$ 与四核子结团存在几率成比例,故在吸引的成对力的情形,形成这种四核子结团时,系统的能量降低.

在 Dyson 表示下,薛定谔方程

$$(H-E)|\Psi\rangle=0 \tag{16}$$

化为

$$\begin{aligned}&(\mathscr{H}^{(D)}P-E)\mathscr{N}P|F)\rangle=0,\\&(P\mathscr{H}^{(D)+}-E)P|F)\rangle=0.\end{aligned} \tag{17}$$

本文将直接在 Dyson 表示中求解. 此时归一化中会涉及相乘因子的不确定性. 这种相乘因子的不确定性和位相因子的不确定性一样,并不影响可观测量的计算结果[5].

三、哈密顿量的本征解、α 关联能和 α 转移几率

在一般情况下，自旋 S 和同位旋 T 由玻色子和费密子共同贡献，如果费密子对 S 和 T 无贡献，仅玻色子对 S 和 T 有贡献，情况比较简单．如费密子和玻色子对 S 和 T 的贡献直接相加，情况也比较简单．对于这两种情况，基矢可统一地写为

$$\begin{aligned}|n_B;\ ASTM_SM_Tv\gamma S(v)T(v)LM)\rangle &= (\alpha^+)^{n_\alpha}(\beta^+)^{n_\beta}(S_+)^{S+M_S}(T_+)^{T+M_T}(b^+_{-1}(\sigma))^{S-S(v)}(b^+_{-1}(\tau))^{T-T(v)}|0)|v\gamma S(v)T(v)\\ &\quad -S(v)-T(v)LM\rangle \end{aligned} \tag{18}$$

其中 $|v\gamma S(v)T(v)-S(v)-T(v)LM\rangle$ 是未成对核子集团的态矢，核子数为 v，自旋及其投影为 $S(v)$，$-S(v)$，同位旋及其投影为 $T(v)$，$-T(v)$，轨道角动量及其投影为 LM，γ 则表示其它量子数的集合．上式中

$$S_+ = S^{(D)}_{+B} + S^{(D)}_{+F} = -\sqrt{2l+1}\,(S^{(D)}_{1B} + S^{(D)}_{1F}), \tag{19}$$

$$T_+ = T^{(D)}_{+B} + T^{(D)}_{+F} = -\sqrt{2l+1}\,(T^{(D)}_{1B} + T^{(D)}_{1F}), \tag{20}$$

是自旋、同位旋的升算子，而

$$\beta^+ = \frac{1}{2}\{[b^+(\sigma)b^+(\sigma)]^{00} + [b^+(\tau)b^+(\tau)]^{00}\} \tag{21}$$

是产生另一种 $S=0$，$T=0$ 的结团的算子，β^+ 与 α^+ 彼此独立．上式中

$$4(n_\alpha+n_\beta)+2(S-S(v)+T-T(v))+v=A, \tag{22}$$

对于给定体系，A 取确定值．　上式中所示基矢是一组非正交基矢，与 $|n_\beta;\cdots)\rangle$ 相应有 $\overline{|n_\beta;\cdots)\rangle}$，它们合在一起构成双正交系，在计算中实际上只用到这种双正交系的一般性质，所以毋需给出 $\overline{|n_\beta;\cdots)\rangle}$ 的具体表达式．

根据哈密顿量的性质，知 $STM_SM_Tv\gamma S(v)T(v)LM$ 等都是守恒量，所以 $\mathscr{H}^{(D)}\mathscr{P}$ 及 $\mathscr{P}\mathscr{H}^{(D)+}$ 的本征解可写为

$$\mathscr{N}\mathscr{P}|F(n;\ ASTM_SM_Tv\gamma S(v)T(v)LM)\rangle = \sum_{n_\beta=0}^{n} c^{(n)}_{n_\beta}|n_\beta;\ ASTM_SM_Tv\gamma S(v)T(v)LM)\rangle, \tag{23a}$$

$$\mathscr{P}\overline{|F(n;\ ASTM_SM_Tv\gamma S(v)T(v)LM)\rangle} = \sum_{n_\beta=n}\bar{c}^{(n)}_{n_\beta}\overline{|n_\beta;\ ASTM_SM_Tv\gamma S(v)T(v)LM)\rangle}, \tag{23b}$$

采用这种双正交基矢，不难具体算出 $\langle\overline{(n'_\beta}|H^{(D)}\mathscr{P}|n_\beta)\rangle$，因为它是一个三角形矩阵，很容易求出它的本征解．所得结果是

$$\begin{aligned}E(n;AST v\gamma S(v)T(v)L) &= \left(\varepsilon+\lambda+\frac{3\lambda}{2l+1}\right)(A-v) - \frac{\lambda}{4(2l+1)}(A-v)^2 + \varepsilon v\\ &\quad - \frac{\lambda}{2l+1}[T-T(v)+S-S(v)+2n][T-T(v)+S-S(v)+2n+4]\\ &\quad - \frac{\lambda}{2(2l+1)}v(A-v) - \frac{2\lambda}{2l+1}[S(v)(S-S(v))+T(v)(T-T(v))]. \end{aligned} \tag{24}$$

相应于一定的 v，

$$T+S+2n=T(v)+S(v)$$

$$+\begin{cases}0,2,4,\cdots\left[\dfrac{A-v}{2},2(2l+1)-\dfrac{A-v}{2}\right]_<,\ \dfrac{A-v}{2}\ \text{为偶数}\\[2mm] 1,3,5,\cdots\left[\dfrac{A-v}{2},2(2l+1)-\dfrac{A-v}{2}\right]_<,\ \dfrac{A-v}{2}\ \text{为奇数.}\end{cases} \tag{25a}$$

$$v=0,1,2,\cdots,A \tag{25b}$$

$$T(v),S(v)\leqslant\frac{v}{2} \tag{25c}$$

对于吸引的成对力，$\lambda<0$，在原子核的基态，v，n，$T+S$ 应取尽可能小的数值.

$v=0$ 时给定体系的激发能仅决定于 $T+S+2n$，它是一个主量子数，如把核子数不同的体系放在一起考虑，则 $T+S+2n$ 相同的那些能级构成规范空间的转动带，如图 1 所示.

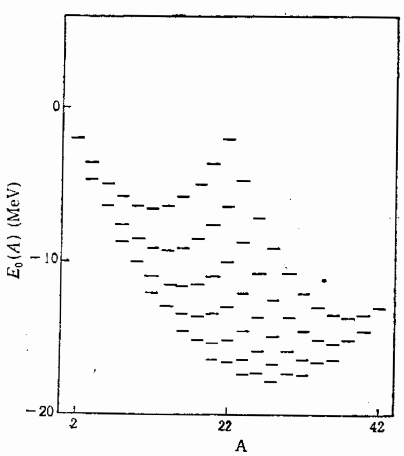

图 1　$v=0$ 时的能谱
$\varepsilon=0$，$\lambda=-1.0$MeV，$l=5$

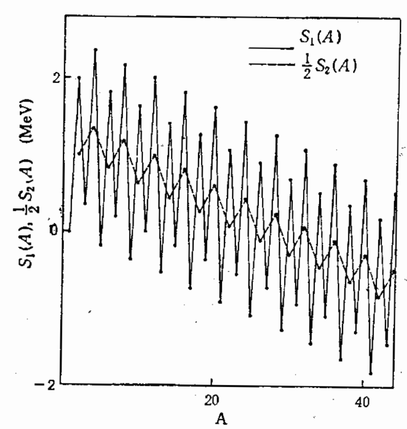

图 2　最后一个核子的分离能 $S_1(A)$ 及最后一对核子的分离能 $S_2(A)$，
$\varepsilon=0$，$\lambda=-1.0$MeV，$l=5$

$v=1$ 时应区分两类情形. 第一类情形 $[Z,N]_<$ 是偶数，基态 $(T+S=1)$ 的能量可直接从 (24) 式算出. 第二类情形 $[Z,N]_>$ 是偶数，基态 $(T+S=1)$ 的能量可用关于空穴的相应的公式求得.

从 $v=0,1$ 的基态能量可求出最后一个核子的分离能，如图 2 所示，可以看到，在奇偶效应之外，还有 α 关联所引起的效应.

从相继的两个核子的分离能 $S_1(A)$ 和 $S_2(A)$ 可得一个核子对的分离能 $S_2(A)$. 从相继的核子对的分离能可得 α 关联能

$$C_\alpha(A)=\frac{1}{4}\{-S_2(A-2,T+S=1)+2S_2(A,T+S=0)-S_2(A+2,T+S=1)\}=-\frac{5\lambda}{2(2l+1)} \tag{26}$$

因为算子 C^+，C 的自旋、同位旋都等于零，所以求得 $v=0$，1 时的约化 α 结团转移几率为

$$
\begin{aligned}
&B(A-4\to A,nSTv\gamma L)\\
&=B(A\to A-4,nSTv\gamma L)\\
&=\langle C^+C\rangle_{AnSTv\gamma L}=K(A;nSTv)\\
&\cdot\left\{\left(1-\frac{A-4}{2(2l+1)}\right)\left(1-\frac{v-4}{2(2l+1)}\right)\right.\\
&-\frac{1}{(2l+1)^2}\left[\frac{v}{2}(S+T-v)\right.\\
&\left.+\left(v+\frac{v^2}{4}\right)\right]\\
&\left.+\frac{3}{(2l+1)^2}K(A-4,nSTv)\right\}. \qquad (27)
\end{aligned}
$$

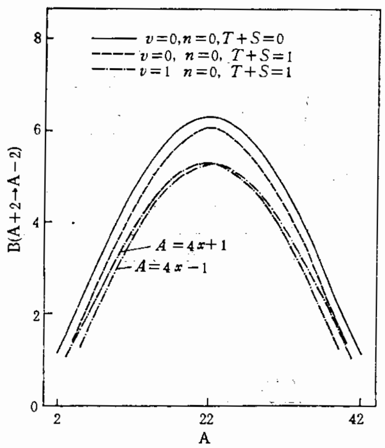

图 3　约化 α-结团转移几率 $B(A+2\to A-2)$

$\varepsilon=0$，$\lambda=-1.0\mathrm{MeV}$，$l=5$

其中

$$
K(A;nSTv)=\frac{1}{12}\left[\left(\frac{A-v}{2}\right)^2+4\cdot\frac{A-v}{2}-(S+T-v+2n)\right.
\left.\cdot(S+T-v+2n+4)\right] \qquad (28)
$$

是 $\alpha^+\alpha$ 的本征值．基态的约化 α 结团转移几率如图 3 所示．图中给出了相应于 $v=0$，$n=0$，$T+S=0$，1 及 $v=1$，$n=0$，$T+S=1$ 的三种曲线．

四、讨　　论

本文指出，由于同类核子间和异类核子间均有成对力，故可导致 α 关联．两个质子和两个中子构成 α 结团时能量最为有利．而 α 结团的转移几率和 α 结团的存在几率有关．

存在未成对核子时，由于 Pauli 原理的影响，可资利用的状态数减少，α 关联效应有所减弱，但主要特征仍和先辈数 $v=0$ 时的情况基本相同．

在重核，质子的费密面和中子的费密面分属于不同大壳．为使一对质子或一对中子发生跨壳激发，需要提供能量．但如本文所指出的，发生这种跨壳激发后可以形成 α 结团，释放能量．在这两种因素的竞争下，重核的基态也可能含有存在 α 结团的激发组态．此时 α 结团的出现几率很小，对原子核结合能不发生多大影响[6]，但可解释 α 衰变和 α 转移等．随激发能增高，原子核中出现 α 结团的几率增大，核反应中 α 粒子的平衡前发射几率也会随之增大，而且在原子核激发态，核表面出现 α 粒子时，有可能观测到偶极振动模式的激发．

本文虽只考虑了一个单能级模型中的 α 关联，但利用本文所给出的解析解，不难进一步计及存在 α 结团的激发组态的影响．这样的研究正在进行中．

参 考 文 献

[1] K. Bethge, *Ann. Rev. Nucl. Sci.*, **20**(1970), 255; F. D. Becchetti et al., *Phys. Rev.*, **C19**(1979), 1775.

[2] L. Milazzo Colli and G. M. Brage Marcazzan, *Rivista Nuovo Cimento,* **3**(1973), 535; W. Scobel, M. Blann and A. Mignery, *Nucl. Phys.*, **A287**(1977), 301.

[3] F. Iachello and J. D. Jackson, *Phys. Lett.*, **108B**(1982), 151. H. J. Daley and F. Iachello, *Ann. Phys.* (*N.* Y), **167**(1986), 181.

[4] 徐躬耦，李福利，高能物理与核物理，**10**(1986)，235；Chinese Physics, 6(1986), 959.

[5] 徐躬耦，非厄密平均场的动态描述——一个简化模型之例，高能物理与核物理，待发表.

[6] A. S. Jensen, P. G. Hansen and B. Jonson, *Nucl. Phys.*, **A431**(1984), 394.

ALPHA-CORRELATION IN A SINGLE-LEVEL MODEL

REN ZHONG-ZHOU

(*Nanjing University*)

XU GONG-OU

(*Nanjing University, Lanzhou University*)

ABSTRACT

The α-correlation in a single-level model with pairing forces independent of spin and isospin was discussed. With the help of the Boson-Fermion representation, analytical solutions to this problem were obtained, analytical expressions for the α-correlation energy and reduced rate of α-transfer were given, and the significance of the obtained results were discussed.