

H. Tera-
339; H.
and A.

i and D.
cl. Phys.,

chremp,

IS

family-
Apply-
mposite
ervations
mposed
oes not

Z_N 规范理论的改进的 MK 变换*

徐 在 新

(华东师范大学, 上海)

摘 要

本文在改进的 MK 重整化群变换方案下讨论了 $Z_N(N=2\sim 6)$ 格点规范理论的相变结构, 在最一般的相互作用形式下, 得到了这些模型在其全部耦合参数空间中的相变特征, 其中某些结果比现有的 MC 结果更清晰. 本文结果表明, 改进的 MK 变换在讨论规范场理论的非微扰特性方面是方便而有效的.

一、引 言

格点形式对于研究规范理论的非微扰特性是有效的. 在格点规范理论中的一个重要问题是研究其相变结构. 可以采用统计理论中的许多有效方法来研究这种特性. 近些年来, 一些作者试图利用 Migdal-Kadanoff (MK) 变换方法来研究格点规范场理论在自由相和禁闭相之间的中间耦合区域是否存在相变的问题^[1-4]. MK 变换^[5,6]是一种近似的实空间重整化群变换. 重整化群方法表明, 人们可以从一给定格距的格点理论出发, 在较大时空格距中寻找一个近似的等效理论.

为了获得更多的知识, 需要研究具有混合作用的格点规范理论. 但是在这种情况下人们发现原来的 MK 变换方法不能应用于耦合参数空间的某些区域^[1-4]. 而在这些区域中, 其他方法, 例如 Monte Carlo 模拟方法, 已经发现存在丰富的相变结构. 一些作者分析了这个问题, 并在广义反演正定性观念的基础上提出了改进的 MK 方法. 利用这个方法, 他们得到了包含基础表示和伴随表示的 Z_4 , $U(1)$ 和 $SU(2)$ 规范理论在其耦合参数的全部空间中的相变结构^[7-9].

本文讨论了四维时空中 Z_N 规范理论的相变特征. 在 Z_N 模型中, 我们可以考虑最一般类型的相互作用形式. 这是我们采用这个模型来进一步完善和检验改进的 MK 变换方法的理由之一. 另一个理由是 Z_N 理论在原来的 MK 方案失效的某些区域存在非平庸的相变结构.

* 中国科学院科学基金资助的课题.
本文 1986 年 12 月 9 日收到, 1987 年 3 月 3 日收到修改稿.

二、 Z_N 理论的 MK 重整化群方程

我们来讨论具有最一般相互作用形式的 Z_N 规范理论, 其格林函数生成泛函或配分函数可表示为

$$Z = \sum_{U \in Z_N} e^{S(U)}, \quad (1)$$

式中的作用量是单方块作用量 $S_P(U_P)$ 之和:

$$S(U) = \sum_P S_P(U_P). \quad (2)$$

其中 U_P 为方块 P 的四个边周上的链变量之有序乘积. 规范不变性要求

$$S_P(U_P) = S_P(U_P^{-1}). \quad (3)$$

对于规范群, 方块作用量可表示为

$$S_P(g) = \sum_n \beta_n \chi_n(g) \quad (4)$$

其中 χ_n 为群 g 的特征标, β_n 为展开系数. 对于循环群 Z_N , 存在 N 个表示, 且都是一维表示. 因此我们有

$$\begin{aligned} \chi_n &= g^n = e^{2\pi i n/N} \\ (n &= 0, 1, \dots, N-1). \end{aligned} \quad (5)$$

利用特征标的正交性, 由式(4)可得

$$\beta_n = \frac{1}{N} \sum_g g^{-n} S_P(g). \quad (6)$$

为讨论方便起见, 引入如下形式的特征标展开:

$$e^{S_P(g)} = \sum_n b_n g^n, \quad (7)$$

$$b_n = \frac{1}{N} \sum_g g^{-n} e^{S_P(g)}. \quad (8)$$

式(3)的条件可表示为

$$\beta_{N-n} = \beta_n; \quad b_{N-n} = b_n. \quad (9)$$

现在我们将上述理论与建立在较大时空格距上的一个理论相比较. 重整化群理论认为, 格距增加 Δa 所引起的影响可归因于耦合常数的改变 $\beta_n \rightarrow \beta_n + \Delta\beta_n$. 在考虑了键移动 (bond moving) 操作和进位 (dimerization) 操作的影响后, 在改进的 MK 方案中 Z_N 理论的重整化群方程可表示为^[7]:

$$a \frac{d\beta_n}{da} = (d-2)\beta_n + 2 \sum_i \frac{\partial \beta_n}{\partial b_i} b_i \ln |b_i|, \quad (10)$$

其中 d 为时空维数.

从耦合参数空间中的任一点出发, 相继地对式(10)求积分, 便可得到重整化群流线. 单方块自由能为

其
MK
热

块

两

重

其

出

此

在
方
变

于

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda^{2n}} \ln b_0(\lambda^n), \quad (11)$$

其中 $\lambda = 1 + \Delta a$. 在我们的数值计算中, 取 $\lambda = 1.02$. 在作许多次 (60~150) 相继的 MK 变换后, f_n 将收敛为某常定值. 我们先通过数值计算得到 $f(\beta_n)$, 然后算出广义比热 $C(\beta_n) = \beta_n^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \beta_n^2}$. 比热曲线峰值的位置被认为是相边界上的点.

三、 Z_2 和 Z_3 模型

对于这些规范模型, 除自由能标度因子 β_0 外, 只有一个非平庸耦合参数. 对于 Z_2 , 方块作用量可表示为

$$S_P = \beta_0 + \beta_1 g. \quad (12)$$

两种特征标展开系数之间的关系为

$$b_0 = \frac{1}{2} e^{\beta_0} (e^{\beta_1} + e^{-\beta_1}), \quad (13)$$

$$b_1 = \frac{1}{2} e^{\beta_0} (e^{\beta_1} - e^{-\beta_1}).$$

重整化群方程为

$$\begin{aligned} a \frac{d\beta_0}{da} &= 2\beta_0 + \frac{2}{b_0^2 - b_1^2} (b_0^2 \ln b_0 - b_1^2 \ln |b_1|), \\ a \frac{d\beta_1}{da} &= 2\beta_1 + \frac{2b_0 b_1 \ln |b_1|}{b_0^2 - b_1^2}, \end{aligned} \quad (14)$$

其中已注意到, 由式(13)可知 b_0 恒大于零, 而 b_1 可能小于零.

在时空标度变换下耦合常数保持不变时, 便存在稳态解或固定点. 对于 Z_2 , 稳态解出现的条件是 $a \frac{d\beta_1}{da} = 0$. 由式(14)可知, 这条件为

$$2\beta_1 + \sinh 2\beta_1 \cdot \ln(\tanh \beta_1) = 0. \quad (15)$$

此式的解为

$$\beta_1 = \frac{1}{2} \ln(\sqrt{2} \pm 1). \quad (16)$$

在我们的数值计算中, 从该稳态解两侧附近的点出发的重整化群流线采取避开这些点的方向. 由 Monte Carlo 结果知道这些都是一级相变点^[10]. 由式(14)还可知, 该模型在变换 $\beta_1 \rightarrow -\beta_1$ 下是对称的.

对于 Z_3 模型, 最普遍的作用形式可表示为

$$S_P = \beta_0 + \beta_1 (g + g^*). \quad (17)$$

于是式(8)可表示为

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{1}{3} e^{\beta_0} (e^{2\beta_1} + 2e^{-\beta_1}), \\ b_1 &= \frac{1}{3} e^{\beta_0} (e^{2\beta_1} - e^{-\beta_1}). \end{aligned} \quad (18)$$

重整化群方程为

$$a \frac{d\beta_0}{da} = 2\beta_0 + \frac{2}{(b_0 - b_1)(b_0 + 2b_1)} [(b_0 + b_1)b_0 \ln b_0 - 2b_1^2 \ln |b_1|],$$

$$a \frac{d\beta_1}{da} = 2\beta_1 + \frac{2b_0 b_1}{(b_0 - b_1)(b_0 + 2b_1)} \ln \frac{|b_1|}{b_0}. \quad (19)$$

由上式可知,对于 Z_3 , 仅存在一个稳态解

$$\beta_1 = \frac{1}{3} \ln(\sqrt{3} + 1). \quad (20)$$

按照 Monte Carlo 结果,这是一级相变.

我们在参考文献[7]中已给出了 Z_4 模型的结果,所以下面我们将讨论 Z_5 .

四、 Z_5 规范模型

对于 Z_5 模型,最一般类型的作用量可表示为

$$S_p = \beta_0 + \beta_1(g + g^*) + \beta_2(g^2 + g^{*2}). \quad (21)$$

利用式(4)和(8),可知两种特征标展开系数之间的关系为

$$b_0 = \frac{1}{5} (x_0 + 2x_1 + 2x_2),$$

$$b_1 = \frac{1}{5} (x_0 + 2c_1 x_1 + 2c_2 x_2), \quad (22)$$

$$b_2 = \frac{1}{5} (x_0 + 2c_2 x_1 + 2c_1 x_2),$$

其中 $c_1 = \cos \frac{2}{5} \pi$, $c_2 = \frac{4}{5} \pi$, 且

$$x_0 = e^{\beta_0 + 2\beta_1 + 2\beta_2},$$

$$x_1 = e^{\beta_0 + 2c_1 \beta_1 + 2c_2 \beta_2}, \quad (23)$$

$$x_2 = e^{\beta_0 + 2c_2 \beta_1 + 2c_1 \beta_2}.$$

重整化群方程为

$$a \frac{d\beta_0}{da} = 2\beta_0 + \frac{4}{5} (A_0 b_0 \ln b_0 + A_1 b_1 \ln |b_1| + A_2 b_2 \ln |b_2|),$$

$$a \frac{d\beta_1}{da} = 2\beta_1 + \frac{2}{5} (A_1 b_0 \ln b_0 + A_3 b_1 \ln |b_1| + A_5 b_2 \ln |b_2|), \quad (24)$$

$$a \frac{d\beta_2}{da} = 2\beta_2 + \frac{2}{5} (A_2 b_0 \ln b_0 + A_5 b_1 \ln |b_1| + A_4 b_2 \ln |b_2|),$$

其中

$$A_0 = \frac{1}{2x_0} + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2},$$

$$A_1 = \frac{1}{x_0} + \frac{\alpha}{x_1} - \frac{\gamma}{x_2},$$

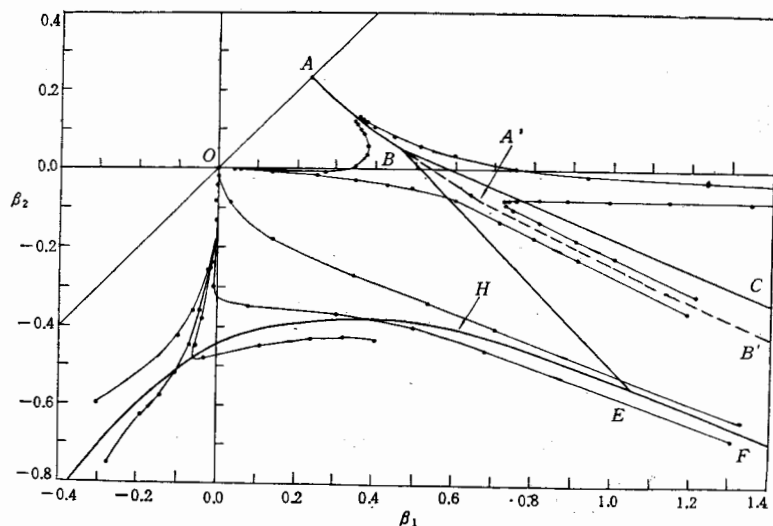
且

表
 β_1
与
结
线
SU
按

式(

$$\begin{aligned}
 A_2 &= \frac{1}{x_0} - \frac{\gamma}{x_1} + \frac{\alpha}{x_2}, \\
 A_3 &= \frac{2}{x_0} + \frac{\alpha^2}{x_1} + \frac{\gamma^2}{x_2}, \\
 A_4 &= \frac{2}{x_0} + \frac{\gamma^2}{x_1} + \frac{\alpha^2}{x_2}, \\
 A_5 &= \frac{2}{x_0} - \frac{\alpha\gamma}{x_1} - \frac{\alpha\gamma}{x_2},
 \end{aligned} \tag{25}$$

$$\text{且 } \alpha = \frac{1-c_1}{c_1-c_2}, \quad \gamma = \frac{1-c_2}{c_1-c_2}.$$

图 1 Z_5 规范理论相变结构及 MK 轨迹

Z_5 理论的 MK 重整化群轨迹和相变结构表示在图 1 中。图中轨迹线上的点分别代表第 1、5、10、20、40、60... 次迭代结果，它们反映了重整化流的速率。理论在变换 $\beta_1 \leftrightarrow \beta_2$ 下是对称的，所以我们仅给出 $\beta_1 > \beta_2$ 的情况。从图中可以看出，重整化群流线与 BE 、 BC 和 GH 相交。但相交时或者沿切线方向；或者流速变慢。按照 Monte Carlo 结果^[11,12]， BE 、 BC 和 GH 是二级相变；而 AB 和 HF 是一级相变。由重整化群流线分布可得，临界点 H 的坐标是 $(\beta_1, \beta_2) \cong (0.61, -0.40)$ 。以上唯象规律对于 $U(1)$ ， $SU(2)$ ， Z_2 、 Z_3 、 Z_4 、 Z_5 以及下面将讨论的 Z_6 等规范场理论都是成立的。这里应当指出，按照现有的 MC 结果 H 点的坐标是不清楚的。

五、 Z_6 规范模型

最一般的单方块作用量可表示为

$$S_P = \beta_0 + \beta_1(g + g^*) + \beta_2(g^2 + g^{*2}) + \beta_3 g^3. \tag{26}$$

式(8)可表示为

$$\begin{aligned}
 b_0 &= \frac{1}{6} (x_0 + 2x_1 + 2x_2 + x_3), \\
 b_1 &= \frac{1}{6} (x_0 + x_1 - x_2 - x_3), \\
 b_2 &= \frac{1}{6} (x_0 - x_1 - x_2 + x_3), \\
 b_3 &= \frac{1}{6} (x_0 - 2x_1 + 2x_2 - x_3),
 \end{aligned} \tag{27}$$

其中

$$\begin{aligned}
 x_0 &= e^{\beta_0 + 2\beta_1 + 2\beta_2 + \beta_3}, \\
 x_1 &= e^{\beta_0 + \beta_1 - \beta_2 - \beta_3}, \\
 x_2 &= e^{\beta_0 - \beta_1 - \beta_2 + \beta_3}, \\
 x_3 &= e^{\beta_0 - 2\beta_1 + 2\beta_2 - \beta_3}.
 \end{aligned} \tag{28}$$

重整化群变换方程为

$$\begin{aligned}
 a \frac{d\beta_0}{da} &= 2\beta_0 + \frac{1}{3} [(A_0 - A_2)b_0 \ln b_0 + 2A_1 b_1 \ln |b_1| \\
 &\quad + 2A_2 b_2 \ln |b_2| + (A_3 - A_1)b_3 \ln |b_3|], \\
 a \frac{d\beta_1}{da} &= 2\beta_1 + \frac{1}{3} [A_1 b_0 \ln b_0 + A_0 b_1 \ln |b_1| \\
 &\quad + A_3 b_2 \ln |b_2| + A_2 b_3 \ln |b_3|], \\
 a \frac{d\beta_2}{da} &= 2\beta_2 + \frac{1}{3} [A_2 b_0 \ln b_0 + A_3 b_1 \ln |b_1| + A_0 b_2 \ln |b_2| \\
 &\quad + A_1 b_3 \ln |b_3|], \\
 a \frac{d\beta_3}{da} &= 2\beta_3 + \frac{1}{3} [(A_3 - A_1)b_0 \ln b_0 + 2A_2 b_1 \ln |b_1| \\
 &\quad + A_1 b_2 \ln |b_2| + (A_0 - A_2)b_3 \ln |b_3|],
 \end{aligned} \tag{29}$$

其中

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \frac{2}{x_0} + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{2}{x_3}, \\
 A_1 &= \frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_3}, \\
 A_2 &= \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}, \\
 A_3 &= \frac{2}{x_0} - \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} - \frac{2}{x_3}.
 \end{aligned} \tag{30}$$

对于 Z_6 模型, 需用三维耦合参数空间中的图形来描述其相变结构. 图 2、3 分别表示 $\beta_1 \sim \beta_2$ 和 $\beta_2 \sim \beta_3$ 平面上的相边界和重整化群变换轨迹; 图 4 给出 $\beta_1 \sim \beta_3$ 平面上的相边界; 图 5 是三维耦合参数空间中的相图. 其中图 2 与 Monte Carlo 模拟^[11,13]及改进

的

β_2

图

β_3

图

其

这
在

的平均场方法^[4]所得到的结果相符。

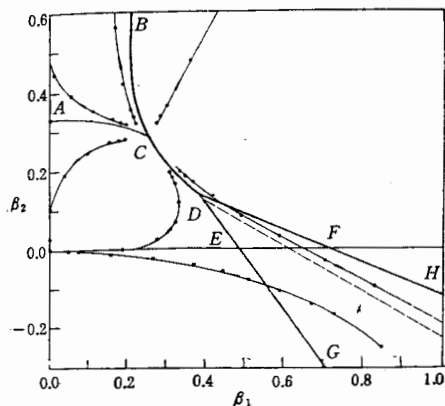


图 2 Z_3 规范理论相变结构及 MK 轨迹 ($\beta_1 \sim \beta_2$ 平面)

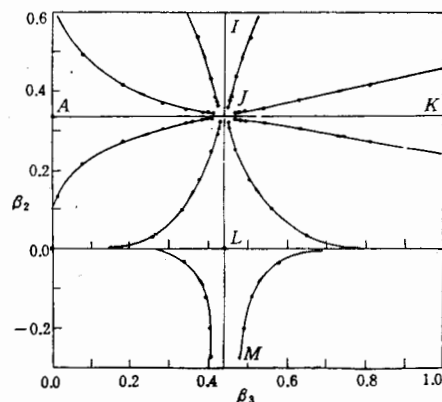


图 3 Z_6 规范理论相变结构及 MK 轨迹 ($\beta_1 \sim \beta_2$)

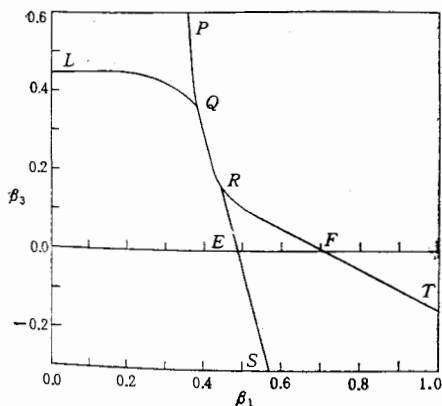


图 4 Z_6 规范理论相变结构 ($\beta_1 \sim \beta_3$ 平面)

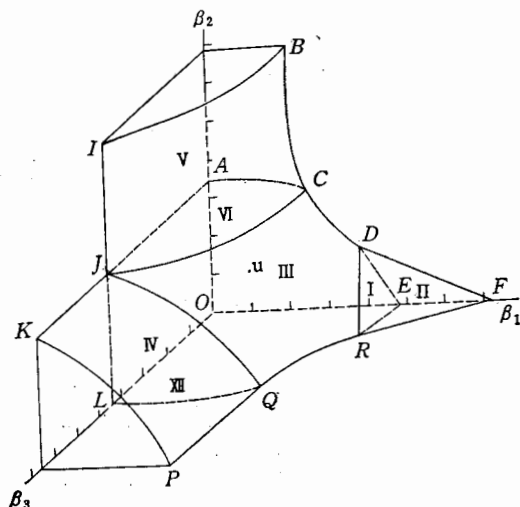


图 5 Z_6 规范理论相变结构

由式(29)可知, Z_6 规范理论在如下变换下是对称的:

$$\beta_1 \rightarrow -\beta_1, \beta_2 \rightarrow \beta_2, \beta_3 \rightarrow \beta_3. \quad (31)$$

其次不难看出, 从平面 $\beta_1 = 0$ 上的任一点出发作 MK 变换时, 有

$$a \frac{d\beta_1}{da} \Big|_{\beta_1=0} = 0.$$

这表明, 这时作 MK 变换并不产生 β_1 耦合. 重整化群轨迹始终限于该平面. 不难证明, 在该平面上的重整化群方程存在如下稳态解:

$$(\beta_2, \beta_3) = (0, 0); \left(0, \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2})\right);$$

$$\left(\frac{1}{3} \ln(1 + \sqrt{3}), 0\right); \left(\frac{1}{3} \ln(1 + \sqrt{3}), \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2})\right). \quad (32)$$

不难看出, 在 $\beta_2 = 0$ 平面内重整化群变换也不会产生 β_2 耦合。但是在 $\beta_3 = 0$ 平面内, 情况并非如此。不过, 我们的数值结果表明在这种情况下所产生的 β_3 耦合是非常弱的 ($\leq 10^{-2}$)。最后, 不难证明

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \frac{1}{6} \ln(1 + \sqrt{6}) \quad (33)$$

也是式(29)的一个稳态解。

六、结 论

我们在改进的 MK 重整化群变换方案下讨论了 $Z_N (N = 2 \sim 6)$ 规范理论在其全部耦合参数空间中的相变特性, 所得结果与利用其他方法, 特别是 Monte Carlo 模拟方法所得到的结果很好相符。且有些结果更为清晰而肯定。

我们还方便地得到了重整化群流线的分布。重整化群流线的分布不仅可用来确定稳态解, 而且可用来分析相变结构及其特性。我们的工作表明, 重整化群流线将避开一级相变边界, 而高阶相变的出现是与流线取向及流速的畸变相联系的。

由此可见, 改进的 MK 方法在研究循环群 Z_N 的相变结构是方便而有效的。进一步的工作应该是讨论 N 更大的情况, 并研究 $N \rightarrow \infty$ 时的情况。人们已经知道 Z_N 模型当 $N \rightarrow \infty$ 时将过渡到 $U(1)$, 即紧致 QED 理论。

致谢: 作者深切感谢 Tan Chung-I 教授的有益的讨论。

参 考 文 献

- [1] S. Caracciolo and P. Menotti, *Nucl. Phys.*, **B180**[FS2] (1981), 428; K. M. Bitar et al., *Phys. Rev.*, **D26** (1982), 2853; *Phys. Lett.*, **121B**(1983), 163; M. Imachi et al., *Prog. Theor. Phys.*, **69**(1983), 1005.
- [2] M. Creutz and L. E. Roberts, *Nucl. Phys.*, **B215**[FS7], (1983), 447.
- [3] K. M. Bitar, D. W. Duke and M. Jadid, *Phys. Rev.*, **D31**(1985) 1470; K. M. Bitar, *Phys. Rev.*, **D32**(1985), 2769.
- [4] M. Imachi, KYUSHU-86-HE-1.
- [5] A. A. Migdal, *JETP*, **42**(1976), 413; **42**(1976), 747.
- [6] L. P. Kadanoff, *Ann. of Phys.*, **100**(1976), 359.
- [7] Chung-I Tan and Zai-Xin Xu, *Phys. Rev.*, **D30**(1984), 455.
- [8] 徐在新, 科学通报, **30**(1985), 1866.
- [9] Zai-Xin Xu, "Modified MK transformation of SU(2) gauge theory" (Commun. of Theor. Phys. 即将发表).
- [10] M. Creutz, I. Jacobs and C. Rebbi, *Phys. Rev. Lett.*, **42**(1979), 1390; *Phys. Rev.*, **D20**(1979), 1915.
- [11] R. C. Edgar, *Nucl. Phys.*, **B200**[ES4] (1982), 345.
- [12] M. Creutz and M. Okawa, *Nucl. Phys.*, **B200**[FS8] (1983), 149.
- [13] M. Fukugita and M. Kobayashi, *Nucl. Phys.*, **B215**[FS7] (1983), 289.
- [14] K. Odaka and M. Fukugita, *Nucl. Phys.*, **B220**[FS8] (1983), 471.

IMPROVED MIGDAL-KADANOFF TRANSFORMATION FOR Z_N LATTICE GAUGE THEORIES

XU ZAIXIN

(*East China Normal University, Shanghai*)

ABSTRACT

In the scheme of the improved MK renormalization group transformation, the phase structures for Z_N ($N=2-6$) lattice gauge theories are discussed. Considering the most general plaquette action, the phase diagrams in whole coupling parameter space are obtained, and some results are more elucidating than those obtained by Monte Carlo simulation. The results of this work show that the improved MK transformation is convenient to non-perturbative studies of gauge fields.