第14卷 第2期　　高能物理与核物理　　Vol. 14, No. 2
1990年2月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Feb., 1990

运动参照系中的 Berry 相因子及其可观测物理效应

孙昌璞　张林芝
（东北师范大学物理系，长春）

摘　要

本文在非相对论情况下，讨论了运动参照系中 Schrödinger 方程绝热近似解的性质和 Berry 相因子在坐标变换下的行为，对转动和平动参照系两种具体情况作了较为详尽的分析。这些讨论表明了 Berry 相因子的出现与参照系的选择有关。对于涉及到平动参照系的 Bitter 和 Dubbers 的中子极化问题，我们不仅在零级近似下给出理论和实验相符合的结果，而且还进一步分析了绝热条件破坏时可能出现的高阶效应。

一、引　言

Berry 相因子的发现[1]不仅是量子力学的一个有意义的发展，而且为深入理解反常等量子场论问题开拓了视野[2]。虽然 Berry 相因子作为不可积拓扑相因子是一个较为抽象的概念，但它已在许多实验中得到证实[3-5]；这一事实是相当引人注目的。

Suter 等人利用核磁共振方法完成的实验[3]是验证 Berry 相的典型实验之一。他们注意到，在核磁共振发生时，作为外场变化部分的射频场的频率等于或接近 Larmor 进动的频率，这时绝热条件破坏，Berry 相因子不会出现。但是，在角频率接近于射频场频率的转动参照系中观察，外磁场是缓变的，绝热条件满足，Berry 相因子就出现，且具有可观察的效应。另一个涉及到运动参照系的 Berry 相因子实验是由 Bitter 和 Dubbers 完成的[4]。他们认为，在螺旋状空间分布的静磁场中，运动的慢中子将"看"到一个圆偏振的缓变磁场。因此，虽然在实验室坐标系中的静场中 Berry 相不出现，但在随慢中子平动的运动参照系中，将出现 Berry 相，并导致可观测效应。

上述分析告诉我们：Berry 相因子是否存在与参照系的选择有关，我们有必要从理论上进一步分析此类问题。目前，涉及到参照系和 Berry 相因子关系的讨论还很初步[6,7]，主要涉及的是经典情况和 Berry 相在么正变换下的可消除性。本文将结合上述两个实验，在比较一般的前提下分析粒子绝热演化动力学行为与参照系变换的联系，以及 Berry 相因子的出现条件和性质。我们还结合本文作者之一最近建议的高级绝热近似方法[8-11]，分析了绝热条件破坏时在 Bitter 和 Dubbers 实验中出现的高级效应。

本文1989年5月3日收到。

二、参照系变换下的 Berry 相因子

在实验室坐标系 s 中，粒子(或体系)的哈密顿量 $\hat{H} \equiv \hat{H}[R(t)]$ 通过参数

$$R \equiv R(t) = [R_1(t),\ R_2(t),\ \cdots,\ R_N(t)]$$

缓慢地依赖于时间．设 $|n[R]\rangle$ 和 $\varepsilon_n[R]$ $(n = 1,\ 2,\ \cdots,\ D)$ 分别是 $\hat{H}$ 非简并的本征函数和相应的本征值．根据文献[8—11]或[12]，当绝热条件

$$\left|\frac{\hbar\left\langle n[R]\,\middle|\,\frac{d}{dt}m[R]\right\rangle}{\varepsilon_n[R]-\varepsilon_m[R]}\right| \ll 1, \quad n \neq m \tag{1}$$

成立时，Schrödinger 方程 $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t) = \hat{H}[R(t)]\Phi(t)$ 有绝热近似解

$$|\phi(t)> = \sum C_n(0)\cdot e^{i\nu_n(t)}\cdot \exp\left[\frac{1}{i\hbar}\int_0^t \varepsilon_n[R(t')]\,dt'\right]|n[R]\rangle. \tag{2}$$

其中

$$\begin{aligned}\nu_n(t) &= i\int_0^t \left\langle n[R(t')]\,\middle|\,\frac{d}{dt'}n[R(t')]\right\rangle dt' \\ &= i\int_{R(t)} \left\langle n[R]\,\middle|\,\frac{d}{dR_\mu}n[R]\right\rangle > dR_\mu\end{aligned} \tag{3}$$

就是 Berry 拓朴相．当 $|n[R]\rangle$ 是实函数时，$\nu_n(t) = 0$．

由上述可知，Berry 相 $\nu_n(t)$ 存在的条件是．(I) $\frac{\partial\hat{H}}{\partial t} \neq 0$；(II) 条件 (1) 成立；(III) $|n[R]\rangle$ 是实的．一般地说，条件 (III) 是由量子体系本身属性决定的，但条件 (I) 和 (II) 依赖于各种参照系的选取．事实上，当观察者从实验系 S 变换到一个相对于 S 运动的参照系 S' 时，体系的状态 $|\phi(t)\rangle$ 将经历一个时间相关的么正变换：

$$|\phi(t)\rangle \to |\phi'(t)\rangle = U(t)|\phi(t)\rangle. \tag{4}$$

如果 $|\phi(t)\rangle$ 满足 Schrödinger 方程 $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\phi(t)\rangle = \hat{H}|\phi(t)\rangle$，则 $|\phi(t')\rangle$ 满足等效 Schrödinger 方程

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\phi'(t)\rangle = \hat{H}_{eq}|\phi'(t)\rangle \tag{5}$$

其中

$$\hat{H}_{eq} = \hat{H}_{eq}[t, R(t)] = U_{(t)}\hat{H}_{[R(t)]}U^{+}_{(t)} + i\hbar\frac{\partial U}{\partial t}\cdot U^{+} \tag{6}$$

是 S' 中的等效哈密顿量，其中非线性项 $i\hbar\frac{\partial U}{\partial t}\cdot U^{+}$ 是由坐标变换的时间相关性引起的．

由(6)看出，即使在 S 中 $\hat{H}$ 不依赖于时间，但在运动参照系 S' 中 $\hat{H}_{eq}$ 也可能依赖于时间．这时，如果绝热条件满足，Berry 相就在运动参照系 S' 中出现．

在 S 系中,如果 $\hat{H}_{[R(t)]}$ 变化较快,绝热条件破坏, Berry 相就不出现. 但我们可以适当地选择运动参照系 S',使得相应的绝热条件

$$\left|\frac{\hbar\left\langle \Phi_n \left| \frac{d}{dt} \Phi_m \right.\right\rangle}{E_n - E_m}\right| = \left|\frac{\hbar\left\langle \Phi_n \left| \frac{\partial \hat{H}_{eq}}{\partial t} \right| \Phi_m \right\rangle}{(E_n - E_m)^2}\right| \ll 1 \tag{7}$$

满足,其中 $\phi_n \equiv \Phi_n[t, R(t)]$ 和 $E_n = E_n[t, R(t)]$ 分别是 $\hat{H}_{eq}[t, R(t)]$ 的本征函数和相应的本征值. 下节我们将用与 Suter 实验相关的例子说明这个结论. 在 S' 中, Berry 相因子

$$\begin{aligned} \nu_n'(t) &= i\int_0^t \left\langle \phi_n \left| \frac{d}{dt'} \phi_n \right.\right\rangle dt' \\ &= i\int_0^t \left\langle \phi_n' \left| \frac{\partial}{dt'} \phi_n' \right.\right\rangle dt' + i\int_{R(t)} \left\langle \phi_n \left| \frac{\partial}{\partial R_\mu} \phi_n \right.\right\rangle dR^\mu \end{aligned} \tag{8}$$

一般不是纯几何的,非几何部分 $i\int_0^t \left\langle \phi_n' \left| \frac{\partial}{\partial t} \phi_n' \right.\right\rangle dt'$ 是由坐标变换 $U(t)$ 引起的; 纯几何部分是 $i\int_{R(t)} \left\langle \phi_n \left| \frac{\partial}{\partial R_\mu} \right| \phi_n \right\rangle dR^\mu$, 其中 $\Phi_n' = \Phi_n[t', R(t')]$. 当然, 如果我们引入的幺正变换 $U(t)$ 是通过 $R(t)$ 依赖于时间的,即 $U(t) \equiv U[R(t)]$, 则整个 $\nu_n'(t)$ 也是纯几何的;或者, 我们引入新的参数 $R'(t)$, 使得 $U = U[R'(t)]$, 则 $\nu_n'(t)$ 对于扩大了的参数空间; $\{R, R'\}$ 是纯几何的.

三、转动参照系中的 Berry 相因子

本节分析联系于 Suter 实验[3]的一般情况. 处于磁场 $\boldsymbol{B}_z = B(t)\cos\theta \boldsymbol{e}_z$ 中的、自旋为 J 的中性粒子, 在调幅射频场 $\boldsymbol{B}_{xy} = B(t)\sin\theta[\cos\beta(t)\boldsymbol{e}_x + \sin\beta(t)\boldsymbol{e}_y]$ 驱动下的有效哈密顿量是

$$\hat{H} \equiv \hat{H}[\boldsymbol{B}(t)] = g\hat{J} \cdot \boldsymbol{B}(t), \boldsymbol{B}(t) = \boldsymbol{B}_z + \boldsymbol{B}_{xy} \tag{9}$$

$\dot{\beta}(t)$ 是射频场的即时频率, Suter 实验只是 $J = \frac{1}{2}$, $\dot{\beta}(t) =$ 常数 $B(t) =$ 常数的特殊情况.

根据标准的角动量理论,由$(\hat{J}^2, \hat{J}_z)$的共同本征函数 $|JM\rangle (M = J, J-1, \cdots, -J)$ 构造出 $\hat{H}$ 的本征函数

$$|JM(\theta, \beta(t))\rangle = \exp\left[\frac{-iJ_z\beta(t)}{\hbar}\right] \cdot \exp\left[\frac{-iJ_y\theta}{\hbar}\right] \exp\left[\frac{iJ_z\beta(t)}{\hbar}\right] \cdot |JM\rangle, \tag{10}$$

相应的本征值是 $E_M = MgB\hbar \equiv M\hbar\omega_0$. 在实验室坐标系 s 中,粒子演化的绝热条件是

$$\begin{aligned} &\left|\frac{\hbar\left\langle JM'(\theta, \beta) \left| \frac{d}{dt} \right| JM(\theta\beta) \right\rangle}{E_{M\pm1} - E_M}\right| \\ &= \frac{\sin\theta|\dot{\beta}(t)|}{2\omega_0} \cdot [(J \pm M)(J \mp M + 1)]^{\frac{1}{2}} \cdot \delta_{M', M\pm1} \ll 1 \end{aligned} \tag{11}$$

(11)成立的充分条件是

$$\frac{|\dot{\beta}(t)|\cdot\sin\theta}{\omega_0}\ll I. \tag{12}$$

当射频场频率 $[\dot{\beta}(t)]$ 接近 ω_0，发生核磁共振时，绝热条件(11)或(12)被破坏，Berry 相不出现.

现在，在相对于 S 以角速度 $\omega(t)\sim-\dot{\beta}(t)$ 绕 z-轴转动的参照系 S' 中观察. 从 S 到 S' 变换的么正算符是

$$U_{(t)}=\exp\left[\frac{i}{\hbar}\cdot\hat{J}_z\int_0^t\omega(t')dt'\right], \tag{13}$$

相应的 S' 中等效哈密顿量是

$$\begin{aligned}\hat{H}_{eq}&=U_{(t)}\hat{H}U_{(t)}^{+}+i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U_{(t)}\cdot U_{(t)}^{+}\\&\equiv g\hat{J}\cdot\boldsymbol{B}_{eq}(t)\end{aligned}$$

等效磁场为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}_{eq}=&\,B(t)\sin\theta\left[\cos\left[\beta(t)-\int_0^t\omega(t')dt'\right]\boldsymbol{e}_x\right.\\&\left.+\sin\left[\beta(t)-\int_0^t\omega(t')dt'\right]\boldsymbol{e}_y\right]+[B(t)\cos\theta-\omega(t)/g]\boldsymbol{e}_z\\\equiv&\,B_{eq}(t)\left[\sin\theta_{eq}\cdot\cos\left[\beta(t)-\int_0^t\omega(t')dt'\right]\boldsymbol{e}_x\right.\\&\left.+\sin\theta_{eq}\cdot\sin\left[\beta(t)-\int_0^t\omega(t')dt'\right]\boldsymbol{e}_y+\cos\theta_{eq}\cdot\boldsymbol{e}_z\right\}.\end{aligned} \tag{14}$$

其中

$$\begin{aligned}B_{eq}(t)&=[B(t)^2+\omega^2(t)/g^2-2\omega(t)\cdot B(t)\cdot\cos\theta/g]^{\frac{1}{2}},\\\theta_{eq}&\equiv\theta_{eq}(t)=\mathrm{arctg}\{B(t)\cdot\sin\theta/[B(t)\cos\theta-\omega(t)/g]\}.\end{aligned} \tag{15}$$

令

$$\phi(t)=\beta(t)-\int_0^t\omega(t')dt',$$

不难算得 $\hat{H}_{eq}$ 的本征值和相应的本征函数分别是 $E'_M=MgB_{eq}(t)\hbar$ 和 $|JM(\theta_{eq}(t),\phi(t))\rangle$. 利用(1)或(7)，得到绝热近似(或 Berry 相因出现)的充分条件为：

$$\sin\theta|\dot{\beta}(t)-\omega(t)|/\omega_0(t)\ll 1; \tag{16-1}$$

$$\sin\theta|\dot{\omega}(t)|/\omega_0(t)\ll 1; \tag{16-2}$$

$$\sin\theta\cdot\omega(t)\cdot|\dot{B}(t)|/[\omega_0^2(t)B(t)]\ll 1; \tag{16-3}$$

条件(16-2)和(16-3)可以通过控制 S' 的转动角速度 $\omega(t)$ 和场强 $B(t)$ 的变化率得以满足，例如可取 $B(t)=$ 常数，$\omega(t)=$ 常数，(16-2,3)自然满足. 在 $\ddot{\beta}(t)$ 不是很大的情况下，使 S' 的转动角速度 $\omega(t)$ 接近 $\dot{\beta}(t)$ 便能满足(16-1). 因此在适当选择的转动参照系中，Berry 相因子出现. 这时，Berry 相表达为

$$\nu_M(t)=i\int_0^t\left\langle JM(\theta_{eq}(t'),\phi(t'))\left|\frac{d}{dt'}\right|JM(\theta_{eq}(t'),\ \phi(t'))\right\rangle dt'$$

$$= -M\int_0^t (1-\cos\theta_{eq}(t'))\dot{\phi}(t')dt' \tag{17}$$

特别是当 $\omega(t)=$ 常数 ω，$B(t)=$ 常数 B，且 $\boldsymbol{B}(t)$ 经历一个循环演化 $\{\boldsymbol{B}(t)|\boldsymbol{B}(0)=\boldsymbol{B}(T)\}$ 时，(17)给出 Berry 相：

$$\nu_M(T) = -M(1-\cos\theta_{eq})2\pi + \omega TM(1-\cos\theta_{eq}) \tag{18}$$

它可分为与 $\boldsymbol{B}(t)$ 变化周期 T 无关的纯几何部分 $G=-M(1-\cos\theta_{eq})2\pi$ 和与 T 相关的非几何部分 $M(1-\cos\theta_{eq})\omega T$. G 在几何上是有效磁场 $\boldsymbol{B}_{eq}(t)$ 在演化过程中张成的立体角 $\Omega=(1-\cos\theta_{eq})2\pi$ 的整数倍，它与具体的动力学属性(如周期)无关.

当 $J=\frac{1}{2}$、$\omega(t)=$ 常数、$B(t)=$ 常数时，上述讨论正好回到 Sutter 等人实验的结果.

四、平动参照系中的 Berry 相因子

在以下的各节中，我们讨论速度远小于光速 C 的平动参照系中粒子的绝热演化问题. 这些讨论不仅包含了 T. Bitter 和 D. Dubbers 实验的作为零级近似的结果，而且给出了由于磁场不太均匀导致的非绝热效应.

设坐标系 S' 以速度 $\boldsymbol{v}(|\boldsymbol{v}|\ll c)$ 相对于实验室系 S 作匀速平动. 在 S' 中体系的波函数 $|\phi(t)'\rangle$ 与 S 中的波函数 $|\phi(t)\rangle$ 以含时么正变换—伽利略推动 (Boost) $U=U(\boldsymbol{v}, t)$ 相联系[12]:

$$|\phi(t)\rangle \to |\phi(t)'\rangle = U(\boldsymbol{v}, t)|\phi(t)\rangle,$$

$$U(\boldsymbol{v}, t) = \exp\left[-\frac{imv^2t}{\hbar}\right]\cdot\exp\left[\frac{im\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}}{\hbar}\right]\cdot\exp\left[-\frac{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{v}t}{\hbar}\right]. \tag{19}$$

U 是伽利略群的一种投影表示——1-Cocycle，它使得

$$U(\boldsymbol{v}, t)\Psi(\boldsymbol{r}, t) = \exp\left\{[im\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r} - \frac{i}{2}mv^2t]/\hbar\right\}\Psi(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}t, t),$$

$$U(\boldsymbol{v}, t)\boldsymbol{r}U^+(\boldsymbol{v}, t) = \boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}t, \tag{20}$$

$$U(\boldsymbol{v}, t)\boldsymbol{p}U^+(\boldsymbol{v}, t) = \boldsymbol{p}-m\boldsymbol{v}.$$

由(20)和(6)知，当 S 中的哈密顿量是 $\hat{H}\equiv\hat{H}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r})$，则 S' 中的等效哈密顿量是

$$\hat{H}_{eq} \equiv \hat{H}_{eq}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}, t) = \hat{H}(\boldsymbol{p}-m\boldsymbol{v}, \boldsymbol{r}-vt) + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{p} - \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 \tag{21}$$

以下考虑 Dubbers 和 Bitter 的实验. 实验室坐标系 S 中的非均匀磁场

$$\boldsymbol{B} \equiv \boldsymbol{B}_{(z)} = B\sin\theta\left[\cos\frac{2\pi z}{L}\cdot\boldsymbol{e}_x + \sin\frac{2\pi z}{L}\cdot\boldsymbol{e}_y\right] + B\cos\theta\boldsymbol{e}_z \tag{22}$$

是由一个精巧设计的线圈产生的，在此磁场中的中子的哈密顿量是

$$\hat{H} = \hat{p}^2/(2M) + g\boldsymbol{B}_{(z)}\cdot\hat{S} \tag{23}$$

利用(19)式，可得到相对于 S 系以速度 V 沿 z 轴平动的参照系 S' 中的等效哈密顿量为

$$\hat{H}_{eq} = \hat{p}^2/(2M) + g\boldsymbol{B}(z-vt)\cdot\hat{S} \equiv \hat{p}^2/(2M) + \hat{H}_t(z'). \tag{24}$$

其中 $z' = z - vt$. 根据 Bloch 定理[13]，对于给定的 t，具有周期势 $\hat V_s(z) = \hat H_s(z')$ ($\hat V_s(z+L) = \hat V_s(z)$) 的 $\hat H_{eq}$ 的本征函数 Φ 必定是一个由周期函数 $\chi(z)$ 调制的平面波：

$$\phi = \chi(z)\exp[i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}/\hbar] \tag{25}$$

把它代入本征方程 $\hat H_{eq}\Phi = E\Phi$，得到关于自旋部分的有效运动方程：

$$\hat H_{s(z)}\chi_{(z)} - \frac{\hbar}{M}\left[iP_z\frac{\partial}{\partial z} + \hbar\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\chi_{(z)} = \left[E - \frac{P^2}{2M}\right]\chi_{(z)} \tag{26}$$

从物理上看，当 $\boldsymbol{B}(z)$ 是均匀的，中子的空间自由度和自旋自由度完全分开，方程(26)左端第二项消失；由此自然想到，当 $\boldsymbol{B}(z)$"稍稍"依赖于 z 时（以下将说明其定量含义），这一项可视为一个小量，相应的微扰势是

$$\hat H' = -\frac{\hbar^2}{M}\left[iP_z\frac{\partial}{\partial z} + \hbar^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]. \tag{27}$$

利用标准的微扰理论，从(26)的零级近似方程

$$\hat H_s\chi^{[0]} = \left(E^{[0]} - \frac{P^2}{2M}\right)\chi^{[0]}(\equiv \varepsilon^{[0]}\chi^{[0]}) \tag{28}$$

出发，得到零级近似：

$$\chi_1^{[0]} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{2}\cdot\exp\left[-\frac{2\pi z' i}{L}\right] \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}, \quad \chi_2^{[0]} = \begin{bmatrix} \sin\frac{\theta}{2}\cdot\exp\left[-\frac{2\pi z' i}{L}\right] \\ -\cos\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}; \tag{29-1}$$

$$\varepsilon_1^{[0]} = \hbar\omega_0 \equiv \frac{1}{2}gB\hbar, \quad \varepsilon_2^{[0]} = -\hbar\omega_0 \tag{29-2}$$

及其一级修正：

$$\delta\chi_1^{[1]} = \left(\frac{\pi\hbar}{L} - P_z\right)\frac{\pi\sin\theta}{2ML\omega_0}\chi_2^{[0]} \equiv \epsilon\chi_2^{[0]}, \tag{30-1}$$

$$\delta\chi_2^{[1]} = \left(P_z - \frac{\pi\hbar}{L}\right)\frac{\pi\sin\theta}{2ML\omega_0}\chi_1^{[0]} \equiv -\epsilon\chi_1^{[0]}; \tag{30-2}$$

$$\Delta\varepsilon_1^{[1]} = \frac{\pi\hbar}{ML}\left(\frac{\pi\hbar}{L} - P_z\right)2\cos^2\frac{\theta}{2}, \tag{30-3}$$

$$\Delta\varepsilon_2^{[2]} = \frac{\pi\hbar}{ML}\left(\frac{\pi\hbar}{L} - P_z\right)2\sin^2\frac{\theta}{2}. \tag{30-4}$$

由(30)式可以看出，当

$$|P_z\sin\theta/(2LM\omega_0)| \ll 1; |\hbar^2/[ML^2\cdot\hbar\omega_0)| \ll 1. \tag{31}$$

即磁场足够均匀（L 足够大）、足够强 $\left(\omega_0 = \frac{1}{2}gB\text{ 足够大}\right)$ 且中子沿 z 轴的速度足够小时，一级修正可以忽略；只须取零级近似(29). 而 Berry 相因子出现的绝热条件是

$$\left|\frac{\hbar\left\langle\chi_1^{[0]}\middle|\frac{d}{dt}\chi_2^{[0]}\right\rangle}{\varepsilon_1^{[0]} - \varepsilon_2^{[0]}}\right| = \left|\frac{\pi\hbar v\sin\theta}{L\hbar\omega_0}\right| \ll 1. \tag{32}$$

在 S' 随中子同步运动的情况下，$V \sim P_z/M$，(32)与(31)中的第一式是一致的．因此，在不考虑非绝热效应时，只须采用方程(26)的零级近似解(29)进行讨论；这时，Berry 相因子是

$$\nu_1(t) = i\int_0^t \left\langle \chi_1^{[0]} \left| \frac{\partial}{\partial t'} \chi_1^{[0]} \right.\right\rangle dt' = \frac{2\pi V t}{L} \cos^2 \frac{\theta}{2}; \tag{33-1}$$

$$\nu_2(t) = i\int_0^t \left\langle \chi_2^{[0]} \left| \frac{\partial}{\partial t'} \chi_2^{[0]} \right.\right\rangle dt' = \frac{2\pi V t}{L} \sin^2 \frac{\theta}{2}. \tag{33-2}$$

当 $T = L/V$ 时，$\nu_1(T) = 2\pi\cos^2\dfrac{\theta}{2}$ 为参数空间 $\{\boldsymbol{B}\}$ 中的环路 $C\{\boldsymbol{B}(z')|\boldsymbol{B}_{(0)} = \boldsymbol{B}(L)\}$ 对 $\boldsymbol{B} = 0$ 点张成的立体角的一半．

$\nu_2(T) = 2\pi\sin^2\dfrac{\theta}{2}$ 是这个立体角的补角的一半．

五、Bitter 和 Dubbers 实验的非绝热效应

本节将把文献[8—11]中的高级绝热近似方法运用于上一节问题的进一步讨论． 为了分析绝热条件(32)破坏时出现于 Bitter 和 Dubbers 实验中的非绝热效应，取一级近似波函数 $\chi_n^{(1)} = \chi_n^{[0]} + \delta\chi_n^{[1]}$ 和相应的本征值 $\varepsilon_n^{(1)} = \varepsilon_n^{[0]} + \delta\varepsilon_n^{[1]}$．($n = 1, 2$) 作为固定 t 时 $\hat{H}_{eq}$ 的本征函数和本征值．令

$$|\psi'(t)\rangle = \sum_{n=1}^{2} C_n(t)\exp\left[\frac{1}{i\hbar}\int_0^t \varepsilon_n^{(1)} \cdot dt'\right] \cdot \exp[i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}/\hbar]\,|\chi_n^{(1)}(z')\rangle \tag{34}$$

是等效 Schrödinger 方程 $i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}|\psi'(t)\rangle = \hat{H}_{eq}|\psi'(t)\rangle$ 的解，保留到 ϵ 的一阶项有

$$\dot{C}_1(t) + \langle\chi_1^{[0]}|\dot{\chi}_1^{[0]}\rangle C_1(t) = +\epsilon\frac{i\pi v}{L}\cdot\sin\theta\cdot C_1(t)$$

$$-\frac{i\pi v}{2L}\cdot(\sin\theta + 2\epsilon\cos\theta)e^{i\Delta}\cdot C_2(t), \tag{35-1}$$

$$\dot{C}_2(t) + \langle\chi_1^{[0]}|\dot{\chi}_2^{[0]}\rangle C_2(t) = \epsilon\frac{i\pi v}{L}\cdot\sin\theta\cdot C_2(t)$$

$$-\frac{i\pi v}{2L}[\sin\theta + 2\epsilon\cos\theta)e^{-i\Delta}C_1(t) \tag{35-2}$$

其中

$$\Delta(t) = \frac{1}{\hbar}\int_0^t[\varepsilon_2^{(1)} - \varepsilon_1^{(1)}]\,dt'$$

$$= -2\omega_0 t - 2\left(\frac{\pi\hbar}{L} - P_z\right)\frac{\pi}{ML}\cos\theta\cdot t, \tag{36}$$

设

$$C_n(t) = \exp\left[-\int_0^t\langle\chi_n^{[0]}|\dot{\chi}_n^{[0]}\rangle dt'\right]\exp\left[(-1)^{n+1}\cdot i\epsilon\sin\theta\cdot\frac{i\pi v t}{L}\right]\cdot b_n(t), \tag{37}$$

将(37)代入(35)给出 $b_n(t)$ 的方程组

$$\dot{b}_1(t) = \exp\left[2_{i\Delta} + i\frac{2\pi vt}{L}\sin\theta\right]\cdot[\sin\theta + 2\epsilon\cos\theta]\frac{i\pi v}{2L}b_2(t), \tag{38-1}$$

$$\dot{b}_2(t) = \exp\left[-2_{i\Delta} - i\frac{2\pi vt}{L}\sin\theta\right]\cdot[\sin\theta + 2\epsilon\cos\theta]\frac{i\pi v}{2L}b_1(t), \tag{38-2}$$

取(38)的积分形式，并将其右边分部积分一次，保留到 ϵ 的一阶项有

$$b_1(t) = -iO(\epsilon)e^{-2i\Delta}b_2(t) + \text{常数} \tag{39-1}$$

$$b_2(t) = iO(\epsilon)e^{2i\Delta}\cdot b_1(t) + \text{常数} \tag{39-2}$$

其中 $O(\epsilon) = \dfrac{\pi v}{4L\omega_0} \sim \epsilon$ 是一阶小量，令

$$b_n(t) = b_n^{[0]}(t) + b_n^{[1]}(t) + b_n^{[2]}(t) + \cdots \tag{40}$$

是各级近似 $b_n^{[i]}(t) \sim \epsilon^i (i = 0, 1, 2, \cdots)$ 的展开式，代入(39-1,2)比较得到的等式两边的同阶项所得

$$\begin{cases} b_n^{[0]}(t) = \text{常数}\ \alpha_n^0; & (41\text{-}1)\\ b_1^{[1]}(t) = -i\alpha_2^0 O(\epsilon)[e^{-i2\Delta} - \text{常数}\ \beta_1]; & (41\text{-}2)\\ b_2^{[1]}(t) = i\alpha_1^0 O(\epsilon)[e^{2i\Delta} - \text{常数}\ \beta_2]. & (41\text{-}3)\end{cases}$$

令 $t = 0$ 时，中子束在 $z = 0$ 处沿 z 轴极化的 $\left.1 + \frac{1}{2}\right\rangle$态上，则初始条件：

$$\begin{cases} b_1^{[0]}(0) = \cos\dfrac{\theta}{2} + \epsilon\cdot\sin\dfrac{\theta}{2}\\ b_2^{[0]}(0) = \sin\dfrac{\theta}{2} - \epsilon\cos\dfrac{\theta}{2}\\ b_n^{[1]}(0) = 0\end{cases} \tag{42}$$

给出 $\alpha_n^0 = b_n^{[0]}(0)$；$\beta_1 = \beta_2 = 1$. 由此及(41)式给出 $t = T \equiv L/V$、$z = K\cdot L(K = 0, 1, 2\cdots)$ 时的一级近似波函数

$$\begin{aligned} |\phi(T)\rangle &= \sum_{n=1}^{2}[\alpha_n^0 + b_n^{[1]}(t)]\exp\left[\frac{1}{i\hbar}\int_0^T \varepsilon_n^{(1)}dt'\right]\exp[i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}/\hbar]\\ &\quad\cdot[|\chi_n^{[0]}(0)\rangle + (-1)^{n+1}\cdot\epsilon|\chi_{n+(-1)^{n+1}}^{[0]}(0)\rangle]\\ &\equiv a_1(T)\left|+\frac{1}{2}\right\rangle + a_2(T)\left|-\frac{1}{2}\right\rangle \end{aligned} \tag{43}$$

由此我们得到中子束沿 z 轴的极化率为：

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_z = |a_1(T)|^2 - |a_2(T)|^2 &= 1 - 2\sin^2\theta\cdot\sin^2\cdot\Delta\Gamma\\ &+ \sin\theta[2(\epsilon\cos\theta - O(\epsilon)\sin\Delta)\cdot\cos^2\Delta\Gamma + O(\epsilon)\sin^2\Delta\cdot\sin 2\Delta\Gamma]\end{aligned} \tag{44}$$

其中

$$\Delta\Gamma = \pi - \nu_1(T) - \omega_0 T[1 - 4\,\mathrm{tg}\,\theta\cdot\epsilon] - \pi\epsilon\sin\theta. \tag{45}$$

在绝热条件(32)和(31)下[5]，$\Delta\Gamma \to \pi - \gamma_1(T) - \omega_0 T$，

$$\mathbb{P}_z \to \mathbb{P}_z^{[0]} = 1 - 2\sin^2\theta\cdot\sin^2[\nu_1(T) + \omega_0 T] \tag{46}$$

(44) 式中含 ε 和 $O(\epsilon)$ 的项代表由于磁场不太均匀和中子沿 z 轴速度较大引起的非绝

热效应，它可在类似于 Bitter 和 Dubbers 的中子极化实验中被观察到，因为我们可以人为地控制 L，P_z 和 $\boldsymbol{B}$ 使得这种效应变得足够大。

作者之一（孙昌璞）感谢葛墨林教授、吴兆颜教授的讨论和鼓励。

参 考 文 献

[1] M. V. Berry, *Proc. Roy. Soc. (London)*., **A392**(1984), 45.
[2] R. Jackiw, *Com. Atom. Mole. Phys*, **21**(1988), 71.
[3] D. Suter et al., *Mole. Phys*., **61**(1987), 1327.
[4] T. Bitter and Dubers, *Phys. Rev. Lett*., **59**(1987), 251.
[5] D. R. Richardson et al., *Phys. Rev. Lett*., **61**(1988), 2030.
[6] M. Kugler and S.Shtrikman, *Phys. Rev*., **D37** (1988), 934.
[7] E. Gozzi et al., Preprint CERN-TH 5262/88.
[8] C. -P. Sun, *J. Phys*., **A21**(1988), 1595.
[9] 孙昌璞，高能物理与核物理. **12**(1988)，351；**13**(1989)，110.
[10] C. -P. Sun, *Phys. Rev*., **D38**(1988), 2908.
[11] C. -P. Sun, *Chinese Phys. Lett*., **6**(1989), 97.
[12] R. Jackiw, in "HIgh Energy Physics 1985", World Scientific: 1986.
[13] G. Busch and H. Schade, Theory of Solid State, (Pergmon, 1985).

BERRY'S PHASE FACTORS IN MOVING FRAMES OF REFERENCE AND THEIR OBSERVABLE EFFECTS

Sun Changpu, Zhang Linzhi

(Physics Department, Notheast Normal University, Changchun)

Abstract

Under non-relativistic conditions, the properties of adiabatic solutions of the Schrödinger equation in moving frame of reference and the behaviours of the corresponding Berry's Phase are analysed. Two cases of translation and rotation are discussed in detail, which show that the existence of Berry's phase depends on the choice of frame of reference. While Bitter and Dubbers's experiment is explained by the first-order approximation in our discussion, the non-adiabatic effects in this experiment are predicted by the second-order approximation when the adiabatic condition is broken.