

一种两参数的旋转液滴模型

徐树威 潘强岩 刘国兴

(中国科学院近代物理研究所, 兰州)

摘 要

利用推广的卡西尼卵形线簇的迴转体来描写裂变核的形状。由此计算得到的裂变位垒和鞍点有效转动惯量与实验值符合很好。进一步引入转动能, 用这种两参数模型计算了裂变位垒随角动量的变化。结果和 Cohen, Plasil 与 Swiatecki 提出的、基于九参数的形状描写的旋转液滴模型理论的预言值大体相近。

引 言

近代重离子核反应的广泛研究, 熔合裂变、准裂变、快裂变乃至超形变的出现, 非常需要定量地描写原子核的大形变, 描写有关大形变原子核的动力学过程。多年来, 人们在裂变研究中, 曾经处理过类似的问题。不过在经典方法中描写核形状的参数太多。例如, Cohen 和 Swiatecki 的文章中^[1], 核表面的径向与球形核半径的偏离用球谐函数展开, 用最低的九个偶次项, 来描写对称裂变核的形状。Nix 和 Swiatecki^[2] 改用中间由一个四极曲面连接的两个椭球来描写裂变核形状, 但对于非对称裂变的情况也需要用六个自由参数。参数太多会给动力学计算和自洽的壳模型计算带来严重的困难, 所以, 用较少的参数来描写核裂变的形状, 不但对裂变动力学本身, 而且对低能重离子核反应的研究都会带来很大的好处。

前文^[3]我们曾提出一种两参数的, 推广的卡西尼卵形线簇的轴对称迴转体来描写对称裂变的核形状, 并且精确地计算了裂变核的鞍点形状和裂变位垒。其结果与 Cohen 和 Swiatecki 九参数模型的计算值在很大的可裂变参数的变化范围内精密相符。本文将这些计算结果与实验数据作了比较, 并且在势能面中引入转动能项, 研究了转动情况下裂变核的平衡形状和裂变位垒随角动量的变化, 以及原子核能承受的最大角动量。

计算位能面和转动惯量

我们用以描写核形状的函数簇在柱坐标中 (ρ, Z, φ) 可以表示如下^[3]:

$$K_{\rho}^2 \rho^2 = (a^4 + 4c^2 K_z^2 Z^2)^{1/2} - (c^2 + K_z^2 Z^2), \quad (1)$$

其中 K_{ρ}, K_z 被称为径向和轴向压缩系数。原子核体积守恒的要求约束了常数 a 并保持

$K_\rho^2 K_Z = 1$ 。所以, 方程(1)描写的是一个具有两个自由参数的函数簇。两块碎片质心间的距离可以解析地表示成:

$$R_{12} = \frac{a}{4 K_Z} \left[\frac{a}{R_0} \right]^3 (3 - \varepsilon^4), \quad (2)$$

此处 R_0 是未畸变的球形核的半径, $\varepsilon = c/a$ 。量 R_{12}, K_Z 被选用作为自由参数, 因为它们有明显的物理意义。应当指出, 当 $K_\rho = K_Z = 1$ 时方程(1)描写的函数就变成了卡西尼卵形线。实质上方程(1)描写的函数就是经过线性变换而被推广了的卡西尼卵形线簇, K_ρ 和 K_Z 是与坐标 ρ 和 Z 分别对应的线性变换系数。形状确定之后就可计算位能面, 包括库仑能、表面能和转动能, 即垂直于对称轴的转动惯量。然后找到不稳定平衡态(鞍点态)和稳定平衡态(能量极小态), 并计算出鞍点态的有效转动惯量。最后获得与实验数据可直接比较的物理量。

我们把 Stavinsky 等人的方法^[4]加以修改, 并用它来计算均匀带电液滴的库仑能和表面能。裂变核与同体积球形核库仑能之比可以表示为如下积分:

$$B_c = \frac{3}{4 \pi A^{5/3}} \int_0^{Z_+} dZ_1 \left[\frac{Z_1}{2} \frac{d\rho_1}{dZ_1} - \rho_1^2 \right] \phi(\rho_1, Z_1), \quad (3)$$

式中 $\phi(\rho_1, Z_1)$ 也是一个积分:

$$2 \int_{Z_-}^{Z_+} \frac{1}{g_{12}} \left\{ \left[\rho_1^2 + \frac{g_{12}^2}{4} (K_{12} - 2) + (Z_1 - Z_2) \frac{1}{2} \frac{\partial \rho_1^2}{\partial Z_2} \right] \mathbf{K}(K_{12}^2) + \frac{1}{2} g_{12}^2 E(K_{12}^2) \right\} dZ_2, \quad (4)$$

其中

$$g_{12}^2 = (\rho_1 + \rho_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2,$$

$$K_{12} = 4 \rho_1 \rho_2 / g_{12}^2,$$

$$Z_\pm = \pm (a^2 + c^2 / K_Z)^{1/2},$$

A 是原子核的质量数, $\mathbf{K}(K_{12}^2)$ 、 $E(K_{12}^2)$ 分别代表第一类和第二类完全椭圆积分, 并用文献[5]中给出的近似多项式进行数值计算。

裂变核与同体积球形核表面能之比表示为下列积分:

$$B_s = \frac{a^2 K_Z}{A^{2/3}} \int_0^{Z_{\max}} \left\{ (1 - K_Z^2) \rho^2 + K_Z^2 \left[\frac{(1 + 4 \varepsilon^2 Z^2)^{1/2} - \varepsilon^2}{1 + 4 \varepsilon^2 Z^2} \right] \right\} dZ, \quad (5)$$

其中 $Z_{\max} = (1 + \varepsilon^2)^{1/2}$ 。

我们采用勒让德-高斯积分法在 VAX-11/780 计算机上对方程(3), (4)作数值积分。每一个一重积分区间被分成十六个子区间, 在每一个子区间中采用四点勒让德-高斯积分。每一次双重库仑能积分须要 10 秒钟的主机运算时间。经过检验, 库仑能和表面能的计算精度分别达到 10^{-6} 和 10^{-7} 。

为了便于比较, 我们采用了与文献[6]相同的液滴模型参数。所以核的转动能与球形核表面能之比

$$B_R = Y \cdot \frac{E_R}{E_R^{(0)}}, \quad (6)$$

其中

$$Y = \frac{E_R^{(0)}}{E_s^{(0)}} = \frac{1.9429}{(1 - 1.7826I^2)} \frac{I^2}{A^{7/3}}, \quad (7)$$

$$\frac{E_R}{E_s^{(0)}} = \frac{\mathcal{F}_\perp^{(0)}}{\mathcal{F}_\perp}. \quad (8)$$

此处, $E_R, E_R^{(0)}$ 分别表示裂变核的转动能和同体积球形核的转动能; $E_s^{(0)}$ 是同体积球形核的表面能; $\mathcal{F}_\perp, \mathcal{F}_\perp^{(0)}$ 分别表示原子核和同体积球形核绕垂直于对称轴的转动惯量; $I = (N - Z)/A$, 是相对中子剩余; l 是转动角动量量子数. 这样问题就归结于计算 \mathcal{F}_\perp , 另外为了计算鞍点态的有效转动惯量 \mathcal{F}_{eff} , 我们还必须计算原子核绕对称轴的转动惯量 \mathcal{F}_\parallel . 计算这些量的解析公式如下:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{F}_\parallel}{\mathcal{F}^{(0)}} = & \frac{15}{8} \left[\frac{a}{R_0} \right]^5 K_Z \left[(1 + \varepsilon^4) Z_{\max} + 2\varepsilon^2 Z_{\max}^3 + \frac{1}{5} Z_{\max}^5 - \varepsilon^2 Z_{\max} S_q \right. \\ & - \frac{\varepsilon}{2} \ln(2\varepsilon Z_{\max} + S_q) + \frac{Z_{\max}}{16\varepsilon^2} S_q - \frac{Z_{\max}}{8\varepsilon^2} S_q^3 \\ & \left. + \frac{1}{32\varepsilon^3} \ln(2\varepsilon Z_{\max} + S_q) \right], \quad (9) \end{aligned}$$

其中 $S_q = (4\varepsilon^2 Z_{\max}^2 + 1)^{1/2}$.

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{F}_\perp}{\mathcal{F}^{(0)}} = & \frac{1}{2} \frac{\mathcal{F}_\parallel}{\mathcal{F}^{(0)}} + \frac{15}{8} \left[\frac{a}{R_0} \right]^5 \frac{1}{K_Z^2} \left[\frac{Z_{\max}}{8\varepsilon^2} S_q^3 - \frac{Z_{\max}}{16\varepsilon^2} S_q \right. \\ & \left. - \frac{1}{32\varepsilon^3} \ln(2\varepsilon Z_{\max} + S_q) - \frac{2}{3} \varepsilon^2 Z_{\max}^3 - \frac{2}{5} Z_{\max}^5 \right], \quad (10) \end{aligned}$$

请注意, $\mathcal{F}_\parallel^{(0)} = \mathcal{F}_\perp^{(0)} = \mathcal{F}^{(0)}$,

$$\frac{\mathcal{F}^{(0)}}{\mathcal{F}_{\text{eff}}} = \frac{\mathcal{F}^{(0)}}{\mathcal{F}_\parallel} - \frac{\mathcal{F}^{(0)}}{\mathcal{F}_\perp}. \quad (11)$$

结果与讨论

(1) 裂变位垒: 图 1 中的曲线表示了理论计算的裂变位垒随质量数 A 的变化. 并在重核区与实验数据进行了比较. 已知质量数 A , 借助于格林公式

$$N - Z = 0.4A^2/(200 + A), \quad (12)$$

定出沿 β 稳定谷的同位素, 再采用 Myers 和 Swiatecki 的液滴模型参数, 求出可裂变参数,

$$X = \frac{Z^2/A}{50.883[1 - 1.7826I^2]}. \quad (13)$$

最后算出裂变位垒 B_f . 图中实验数据来自近代物理研究所的结果^[7]和文献[8]中表 VIII-1 的数据. 表中数据很多, 对一种元素我们仅挑选了一种最靠近稳定谷的同位素. 图 1 表明理论曲线能够反映实验值的变化趋势. 当质量数 A 稍大于 200 时, 实验值一般要比曲

线高 2—3 MeV, 其中 ^{209}Bi 的裂变位垒实验值比理论曲线要高出 8 MeV 左右. 其原因是这些核靠近双幻核 ^{208}Pb , 由于壳效应使位垒有明显增高, 而液滴模型又无法反映壳效应的缘故.

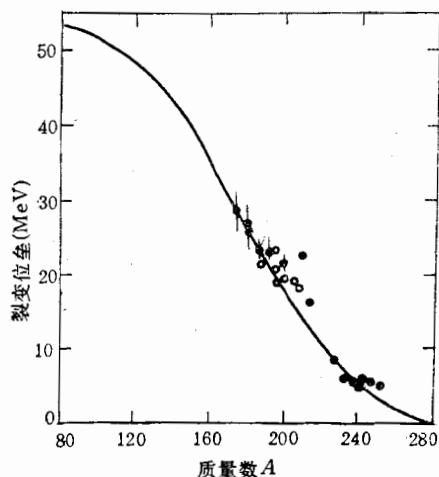


图1 两参数模型预言的裂变位垒作为质量数 A 的函数曲线. 实验数据 \circ 和 \bullet 分别取自文献[7]和[8]

液滴模型^[12]. 该模型对裂变核的形状描写也是采用 CS 的九参数函数簇. 它的重要结果之一是给出了沿着 β 稳定谷各种复合核在高速转动时所能承受的最大角动量, 即导致裂变位垒刚刚消失的角动量. 为了对比, 我们也对一组典型的核进行了计算. 图3比较了这两种计算结果. 由图可见, 在 $A = 74-174$, 即 $X = 0.3-0.6$ 的范围, 两种计算给出几乎相同的结果. 但在 $A > 174$ 的范围, 我们的计算结果比 CPS 的预言值系统偏低 $\sim 10\%$.

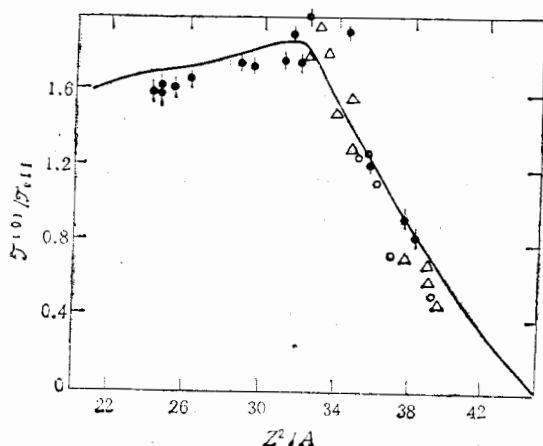


图2 两参数模型理论预言的有效转动惯量 ($I^{(0)}/I_{\text{eff}}$) 与 Z^2/A 的函数曲线. 实验数据 \bullet , \circ 和 \triangle 分别摘自文献[9], [10]和[11]

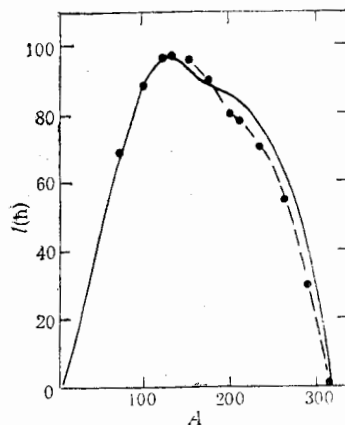


图3 CPS 模型预言的原子核承受的最大角动量与两参数模型的预言值 (\bullet) 比较

裂变位垒随角动量的变化取决于两个因素. 一是稳定平衡形状随角动量的变化, 二

是鞍点态形状随角动量的变化。图 4 中显示了 ^{127}La 核的裂变位垒随角动量的变化，并且同时显示了稳定平衡态的能量 (E_{\min}) 和鞍点态的能量 (E_{SP}) 随角动量的变化。可以看出，两种模型的理论预言值几乎毫无差别。但在 $A > 174$ 的区域，当角动量接近最大承受角动量时，我们两参数模型预言的 E_{\min} 比 CPS 模型的预言值要高几百 KeV。比如说，对于 ^{235}U ，估计要高 300 KeV，对于 ^{238}U ，估计要高 100 KeV。重核的裂变位垒本身就很低，几百 KeV 的差别就可以引起最大承受角动量产生察觉得到的变化。

有关裂变位垒随角动量变化的实验信息是很少的。我们仅收集到了 $^{153}\text{Tb}^{[14]}$ 和 $^{221}\text{Ac}^{[15,16]}$ 两个核的数据。这两个核是较远离 β 稳定谷的。由图 5 可以看出：对于 ^{153}Tb ，实验值比两参数模型的计算值偏低约 20%。对于重核 ^{221}Ac 实验值比计算值仅偏低 5% 左右。引起上述差别的可能的原因是：理论计算时所用的带电液滴具有锐的表面，如果考虑到表面弥散效应的影响，理论预言值与实验值之间的符合程度就可能得到改善 $^{[17]}$ 。

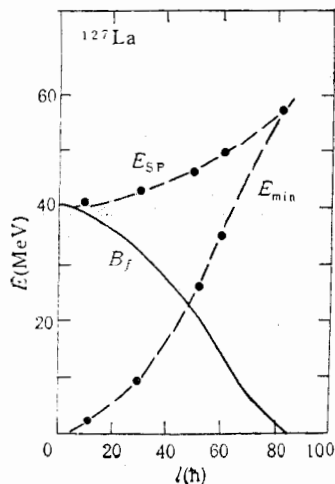


图 4 CPS 旋转液滴模型预言的 ^{127}La 的各种液滴能 ($E_{\text{SP}}, E_{\min}, B_f$) $^{[13]}$ 与两参数模型预言值(●)比较

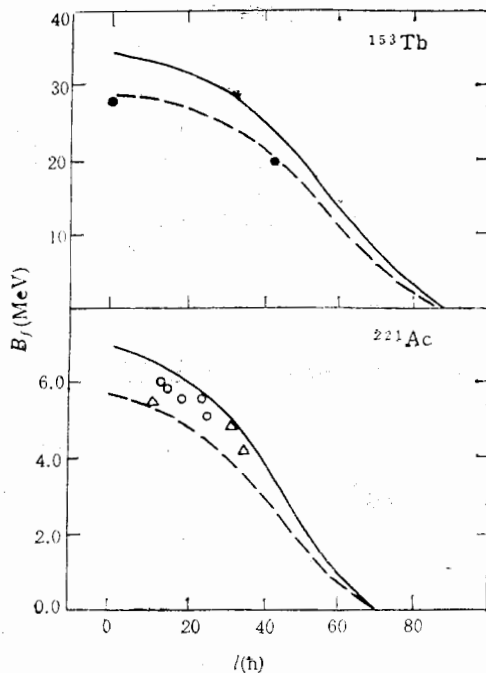


图 5 对于核 $^{153}\text{Tb}, ^{221}\text{Ac}$ ，两参数模型预言的裂变位垒 (B_f) 随角动量的变化曲线(实线)。虚线是理论值的 80%。实验数据●，△和○分别摘自文献 $^{[14,15,16]}$

结 论

前文 $^{[3]}$ 我们曾经仔细地研究过利用推广的卡西尼卵形线簇的轴对称迴转体来描写原子核沿裂变谷，越过鞍点直至断点的形状变化，取得了很好的效果。本文进一步考虑到转动的影响，基于两参数模型计算了裂变位垒随角动量的变化。这就要求原子核的形状在

裂变谷附近一个较大的范围内发生变化。两参数模型的计算结果与基于九参数形状描写的 CPS 模型的计算结果是大体相近的。由此说明,我们提出的简单的两参数模型可以用来描写原子核裂变时,沿裂变谷附近一个较大的相空间的形状变化。

参 考 文 献

- [1] S. Cohen and W. J. Swiatecki, *Ann. Phys. (N. Y.)*, **22**(1963), 406.
- [2] J. R. Nix and W. J. Swiatecki, *Nucl. Phys.*, **71**(1965), 1.
- [3] Xu Shuwei and Wang Zhengda, *Phys. Rev.*, **C37**(1988), 1968.
- [4] V. S. Stavinsky, N. S. Rabotnov and A. A. Seregin, *At. Phys. (Russian)* **7**(1968), 1051.
- [5] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Function with Formulas, Graphs and Mathematical table* (U. S. GPO, Washington, D. C., 1966), p. 591.
- [6] W. D. Myers and W. J. Swiatecki, *Arhiv Fyzik*, **36**(1967), 343.
- [7] 刘国兴等, *高能物理与核物理*, **10**(1986), 597.
- [8] R. Vandenbosch and J. R. Huizenga, *Nuclear Fission*, (Academic Press, New York, 1973); Table VIII-1, p. 255; p. 207.
- [9] 刘国兴等, *高能物理与核物理*, **2**(1978), 242; **11**(1987), 98.
- [10] S. A. Karamyan et al., *Yad. Fiz.*, **6**(1967), 494.
- [11] R. F. Reising et al., *Phys. Rev.*, **141**(1966), 1161.
- [12] S. Cohen, F. Plasil and W. J. Swiatecki, *Ann. Phys. (N. Y.)*, **82**(1974), 557.
- [13] F. Plasil and M. Blann, *Phys. Rev.*, **C11**(1975), 508.
- [14] D. A. Bromley, *Treatise on Heavy-Ion Science*, **4**(1985), 121.
- [15] H. Baba et al., RCNP Annual Report, (1985), p. 96.
- [16] 陈克良, *高能物理与核物理*, **12**(1988), 658.
- [17] M. G. Mustafa and P. A. Baisden, *Phys. Rev.*, **C25**(1982), 2524.

A TWO-PARAMETER ROTATING LIQUID DROP MODEL

XU SHUWEI PAN QIANGYAN LIU GUOXING

(*Institute of Modern Physics, Academia Sinica, Lanzhou*)

ABSTRACT

Nuclear shapes in fission process have been described by using a generalized Cassinian ovals. The calculated fission barriers and effective moments of inertia of saddle-point configurations are in good agreement with the experimental data. The calculated fission barriers for a wide range of nuclei as a function of angular momentum are close to the predicted values by the CPS Model based on describing nuclear shapes in terms of a spherical harmonic expansion with lowest nine even order terms.