

## 内部费米子单圈图对 Casimir 力的贡献

郑泰玉

(东北师范大学物理系, 长春)

### 摘 要

本文利用路径积分量子化方法, 计算了两个平行的、理想的金属板之间, 内部费米子单圈图对 Casimir 力的贡献. 其作用在单位面积金属板上的力为  $0.00025 \text{ dyne/cm}^2$ .

自从 1958 年, Sparnay<sup>[1]</sup> 的实验证实了 Casimir<sup>[2]</sup> 所计算的, 置于真空中相距为  $a$  的两块理想的金属板之间(图 1), 存在吸引力——Casimir 力之后, 许多物理工作者作了大量有关此方面的工作. 他们分别采用不同的方法, 得到了金属平行板之间的 Casimir 力<sup>[3-6]</sup>, 并讨论了其它边界条件下<sup>[6-10,11]</sup>的量子场真空涨落问题, 计算了相应的宏观可测量效应.

从 Casimir 等人的工作来看, 他们只计算了电磁场对 Casimir 力贡献的最低级近

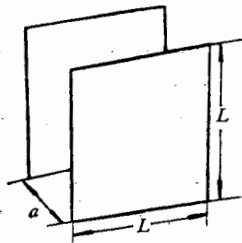


图 1

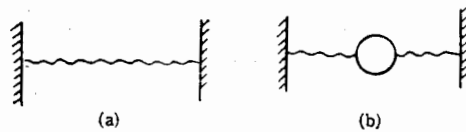


图 2

似(图 2(a)). 本文采用 Feynman 的路径积分量子化方法, 计算出电磁场对 Casimir 力贡献的下一级近似(图 2(b))即内部费米子单圈图对 Casimir 力的贡献.

在欧氏空间中, 真空的零点能是

$$E_0 = -\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln Z, \quad (1)$$

其中,  $z$  为真空到真空的跃迁振幅.

$$Z = \langle 0|0 \rangle = \int [dA][d\bar{\psi}][d\psi][dC^+][dC] e^{-S_E}, \quad (2)$$

$T$  是延拓到虚轴的时间间隔,  $T \rightarrow \infty$ .  $S_E$  是欧氏空间中的作用量. 在  $U(1)$  情况下, 作用量  $S_E$  可取为

$$S_E = \int d^4x \left[ \bar{\psi}(i\partial - eA - m)\psi + \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A_\mu)^2 - C^+ \partial^2 C \right], \quad (3)$$

将上式写成二次型后代入(2)式, 于是

$$Z = \int [d\bar{\psi}][d\psi][dA][dC^+][dC] e^{-\int d^4x \left[ -\frac{1}{2} A_\mu [\partial^2 \delta_{\mu\nu} - (1-\frac{1}{\alpha}) \partial_\mu \partial_\nu] A_\nu - C^+ \partial^2 C + \bar{\psi}(i\partial - eA - m)\psi \right]} \quad (4)$$

为计算(4)式, 令图 1 给出的边界条件中  $xy$  平面平行于金属板,  $z$  轴垂直于金属板,  $t$  轴又与这三方向垂直, 则(4)式中  $A_\mu(x)$ ,  $C(x)$ ,  $C^+(x)$ ,  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$  可作如下傅氏展开

$$C(x) = \sum_k \tilde{C}(k) \frac{e^{ikx}}{L\sqrt{Ta}},$$

$$C^+(x) = \sum_k \tilde{C}^+(k) \frac{e^{-ikx}}{L\sqrt{Ta}},$$

$$A_\mu(x) = \sum_k \tilde{A}_\mu(k) \frac{e^{ikx}}{L\sqrt{Ta}},$$

$$\psi(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{\psi}(p) e^{ipx},$$

$$\bar{\psi}(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{\bar{\psi}}(p) e^{ipx},$$

其中,  $k = \left( \frac{2\pi n_1}{L}, \frac{2\pi n_2}{L}, \frac{\pi n_3}{a}, \frac{2\pi n_4}{T} \right)$ ,  $-\infty < n_1, n_2, n_4 < +\infty$ ,  $n_3 = 1, 2, 3, \dots, \infty$ .

由于我们只考虑内部费米子单圈图的贡献情况, 故费米场的频率仍取连续值.

$$P = (p_1, p_2, p_3, p_4), \quad (-\infty < p_1, p_2, p_3, p_4 < \infty)$$

这样, (4)式对鬼场部分的积分

$$Z_C = \int [dC^+][dC] e^{\int d^4x C^+ \partial^2 C} = \prod_k k^2. \quad (5)$$

对费米场部分的积分

$$Z_\psi = \int [d\bar{\psi}][d\psi] e^{-\int d^4x \bar{\psi}(i\partial - eA - m)\psi} = \det \left[ (\not{p} + m)\delta^4(p - p') + \sum_k e\tilde{A}(k)\delta^4(p + k - p') \right]. \quad (6)$$

利用如下展开式计算上式

$$e^{\text{tr} \ln[1 + \Gamma]} = 1 + \sum_a \Gamma_a \Gamma_a + \frac{1}{2} \sum_{a,b} (\Gamma_{aa} \Gamma_{bb} - \Gamma_{ab} \Gamma_{ba}) + \dots,$$

且考虑到二级近似, 即取至费米子单圈图的贡献, 于是(6)式变为

$$Z_\psi = e^{\text{tr} \ln(\not{p} + m)} e^{-\frac{1}{2} \sum_k \tilde{A}_\mu(-k) T_{\mu\nu} \tilde{A}_\nu(k)}, \quad (7)$$

其中

$$T_{\mu\nu} = \sum_p e^2 (\not{p} + m)^{-1} \gamma_\nu (\not{p} + \not{k} + m)^{-1} \gamma_\mu.$$

因  $T_{\mu\nu}$  积分发散, 故采用维数正规化手续及汤姆极限减除方案, 得到有限的  $T_{\mu\nu}$  为

$$T_{\mu\nu} = B(k^2 \delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu),$$

其中

$$B = -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dz z(1-z) \ln \left[ \frac{z(1-z)}{m^2} k^2 + 1 \right], \quad (8)$$

所以, (7)式变为

$$Z_\psi = e^{\text{tr} \ln(\not{p} + m)} e^{-\frac{1}{2} \sum_k \tilde{A}_\mu(-k) B(k^2 \delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) \tilde{A}_\nu(k)}. \quad (9)$$

把(5)式, (9)式代入(4)式. 整理得

$$Z = \prod_k k^2 e^{\text{tr} \ln(\not{p} + m)} \int [dA] e^{-\frac{1}{2} \sum_k \tilde{A}_\mu(-k) N_{\mu\nu} \tilde{A}_\nu(k)}, \quad (10)$$

其中

$$N_{\mu\nu} = k^2 \delta_{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) k_\mu k_\nu + B(k^2 \delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu). \quad (11)$$

引入展开式

$$\begin{aligned} \tilde{A}_\mu(k) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [A_\mu^R(k) + iA_\mu^I(k)], \\ \tilde{A}_\mu(-k) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [A_\mu^R(k) - iA_\mu^I(k)], \end{aligned}$$

则(10)式成为

$$Z = \prod_k k^2 \cdot e^{\text{tr} \ln(\not{p} + m)} \cdot \prod_k [\det N_{\mu\nu}]^{-\frac{1}{2}}. \quad (12)$$

由于  $(\det N_{\mu\nu})$  是 Lorentz 不变, 可选特殊坐标进行计算, 在这一特殊的坐标系中, 四动量  $k$  取为

$$k = (0, 0, k_3, k_4),$$

于是(11)式的行列式

$$\det N_{\mu\nu} = \frac{1}{\alpha} [k^2 J^4 (B + 1)^3]. \quad (13)$$

把(13)式代入(12)式, 再代入(1)式, 整理得

$$\begin{aligned} E_0 &= -\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_k \left[ \ln k^2 + \frac{1}{2} \ln \alpha - \frac{1}{2} \ln [k^2]^4 - \frac{3}{2} \ln (B + 1) \right] \\ &\quad - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[ -\frac{1}{2} \text{tr} \ln(\not{p} + m) \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

上式右端第一方括号里的第一项是鬼粒子的贡献; 第二项是拉氏函数中固定规范项的贡献; 第三项是规范场的贡献<sup>[12]</sup>; 第四项则是内部费米子单圈图的贡献. 第二个方括号里是

自由费米子场的贡献。因第一方括号里的第二项是与  $k$  无关的一个纯无穷大常数, 故把它抛掉。第二个方括号项在此文章里不加以讨论, 也把它抛掉, 于是(14)式成为

$$E_0 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_k \ln k^2 + \frac{3}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_k \ln(B+1). \quad (15)$$

把(8)式代入(15)式

$$E_0 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_k \ln k^2 + \frac{3}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \times \sum_k \ln \left\{ -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dZ Z(1-Z) \ln \left[ \frac{Z(1-Z)}{m^2} k^2 + 1 \right] - 1 \right\}. \quad (16)$$

因为(16)式中的第二项不能严格求出结果, 以及  $\alpha$  又很小, 所以通过对此项的幂级数展开进行计算。在计算中, 只取到  $\alpha$  的一级近似, 于是(16)式

$$\begin{aligned} E_0 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_k \ln k^2 + \frac{3}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \\ &\quad \times \sum_k \ln \left\{ -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dZ Z(1-Z) \ln \left[ \frac{Z(1-Z)k^2}{m^2} + 1 \right] \right\} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_k \ln k^2 - \frac{3\alpha}{\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_k \int_0^1 dZ Z(1-Z) \\ &\quad \times \left\{ \ln \frac{Z(1-Z)}{m^2} + \ln \left[ k^2 + \frac{m^2}{Z(1-Z)} \right] \right\}. \quad (17) \end{aligned}$$

把(17)式对  $k$  求和, 并抛掉与  $a$  无关的项。

$$\begin{aligned} E_0 &= \left( \frac{L}{2\pi} \right)^2 \int dk_1 dk_2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{3\alpha}{\pi} \int_0^1 dZ(1-Z) Z \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + \frac{m^2}{Z(1-Z)}} \right]. \quad (18) \end{aligned}$$

下面利用维数正规化方法计算上述积分, 取  $d-1$  维, 当  $d=3$  时回到物理的结果。于是(18)式变为

$$\begin{aligned} E_0 &= \left( \frac{L}{2\pi} \right)^{d-1} \sum_{n=1}^{\infty} \int d^{d-1}k \left[ \sqrt{k^2 + \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{3\alpha}{\pi} \int_0^1 dZ Z(1-Z) \sqrt{k^2 + \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + \frac{m^2}{Z(1-Z)}} \right] \\ &= \left( \frac{L}{2\pi} \right)^{d-1} \sum_{n=1}^{\infty} \int d\Omega_{d-1} dk k^{d-2} \left[ \sqrt{k^2 + \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{3\alpha}{\pi} \int_0^1 dZ Z(1-Z) \sqrt{k^2 + \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + \frac{m^2}{Z(1-Z)}} \right] \\ &= \left( \frac{L}{2\pi} \right)^{d-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{\pi}^{d-1}}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} \int dk k^{d-2} \left[ \sqrt{k^2 + \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2} \right. \end{aligned}$$

$$-\frac{3\alpha}{\pi} \int_0^1 dZ Z(1-Z) \sqrt{k^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \frac{m^2}{Z(1-Z)}}. \quad (19)$$

利用展开式

$$(x+1)^y = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Gamma(y+1)x^l}{\Gamma(y-l+1)\Gamma(l+1)}$$

和黎曼函数

$$\xi(-d) = \sum_{n=1}^{\infty} n^d,$$

以及贝塔函数积分

$$B(1+\gamma, -s-\gamma-1) = \int_0^1 t(1-t)^s dt,$$

$$B(p, q) = \int_0^1 dt t^{p-1}(1-t)^{q-1},$$

可把(19)式变成

$$E_0 = -\frac{1}{2a^d} \left(\frac{L}{2}\right)^{d-1} \Gamma\left(-\frac{d}{2}\right) \pi^{\frac{d}{2}} \xi(-d)$$

$$+ \frac{6\alpha L^{d-1}}{\pi a^d} \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{d}{2}} \sum_{l=0}^{\infty} B(2-l, 2-l) (am)^{2l}$$

$$\times \frac{\Gamma\left(-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right) \pi^{d-2l}}{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-l+1\right) \Gamma(l+1)} \xi(2l-d). \quad (20)$$

当  $a \rightarrow \infty$  时, 即图 1 所表示的边界条件消失时, (20) 式中的, 第一项和第二项中的  $l = 0.1$  项趋于零, 而第二项中的  $l \geq 2$  项仍存在. 这说明, 第一项和第二项项中的  $l = 0.1$  项是由于加入边界条件所产生的 Casimir 能量,  $l \geq 2$  的所有项在有无边界条件均存在, 而我们讨论的问题是对于电磁场的量子理论, 不同的边界条件会导致真空能量变动的问题. 因此, 只保留第一项及第二项中的  $l = 0.1$  项, 而抛掉  $l \geq 2$  的所有的项. 又因所保留项是表面发散的. 故利用参考公式<sup>[13]</sup>

$$\Gamma\left(-\frac{d}{2}\right) \pi^{\frac{d}{2}} \xi(-d) = \Gamma\left(\frac{1+d}{2}\right) \pi^{(1+\frac{d}{2})} \xi(1+d),$$

使其变为:

$$E_0 = -\frac{1}{2} \left(\frac{L}{2}\right)^{d-1} \frac{1}{a^d} \Gamma\left(\frac{1+d}{2}\right) \pi^{-(1+d)/2} \xi(1+d)$$

$$+ \frac{6\alpha L^{d-1}}{\pi a^d} \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{-\frac{d+1}{2}} \left[ B(2.2) \frac{d-1}{2} \xi(1+d) \right.$$

$$\left. - B(1.1) (am)^2 \xi(d-1) \right].$$

当  $d = 3$  时:

$$E_0 = -\frac{1}{720} \frac{L^2 \pi^2}{a^3} + \frac{\alpha}{2\pi} \frac{L^2 \pi^2}{720 a^2} - \frac{\alpha L^2 m^2}{16\pi a}, \quad (21)$$

其中, 利用了:  $B(2.2) = \frac{1}{6}$ ,  $B(1.1) = 1$ ,  $\xi(4) = \frac{\pi^4}{90}$ ,  $\xi(2) = \frac{\pi^2}{6}$ ,

所以,金属板上每单位面积所受的 Casimir 力为

$$F = -\frac{\partial F_0}{L^2 \partial a} = -\frac{\pi^2}{240a^4} + \frac{\alpha}{2\pi} \frac{\pi^2}{240a^4} - \frac{\alpha m^2}{16\pi a^2} \quad (22)$$

上式右端第一项是 Casimir<sup>[2]</sup> 原来的结果,第二项和第三项是我们所讨论的内部费米子单圈图对 Casimir 力的贡献的结果

$$\text{当 } m = 0 \text{ 时:} \quad F = -\frac{\pi^2}{240a^4} + \frac{\alpha}{2\pi} \frac{\pi^2}{240a^4}.$$

当取 Sparnay<sup>[1]</sup> 的实验数据  $a = 0.5\mu$ , 则第一项  $F_1 = -0.208\text{dyne/cm}^2$ ,

第二项:  $F_2 = 0.00025\text{dyne/cm}^2$ , 而 Sparnay 的实验值为  $-0.2\text{dyne/cm}^2$ .

从上述计算所得的结果看,内部费米子单圈图对 Casimir 力的贡献是斥力,且又很小. 从而对 Casimir<sup>[2]</sup> 的计算结果进行了小的修正. 除此之外,还可以考虑更高圈图对 Casimir 力的贡献,预想比内部费米子单圈图对 Casimir 力的贡献进行更为复杂的计算,将做为下一步的工作进行.

本工作得到了薛社生同志和郑哲洙同志的大力帮助,在此特表谢意!

### 参 考 文 献

- [1] M. J. Sparnay, *Physica*, **24**(1958), 751.
- [2] H. B. G. Casimir, *Proc. K. Ned. Akad. Wet.*, **51**(1948), 793.
- [3] J. Mehra, *Physica*, **37**(1967), 145.
- [4] J. Schwinger, *Lett. Math. Phys.*, **1**(1975), 43.
- [5] J. Ambjorn and S. Wolfram, *ACLT* 68—855(1981).
- [6] C. M. Hargreaves, *Proc. K. Akad. Wet.*, **B68**(1965), 231.
- [7] T. H. Boyer, *Phys. Rev.*, **174**(1968), 1764.
- [8] B. Dvies, *J. Math. Phys.*, **13**(1972), 1324.
- [9] R. Balian and B. Duplantier, *ANN. Phys.*, **122**(1978), 165.
- [10] K. A. Milton, L. L. DeRaad, Jr., and J. Schwinger *Ann. Phys. (NY)*, **115**(1978), 388.
- [11] I. Brevik, *Ann. Phys.*, **138**(1982), 36.
- [12] Xue She-sheng and Xian Ding-chang, *Acta Physica Sinica*, **34**(1985), 1084.
- [13] W. Magnus, F. Oberhettinger and R. P. Soni, "Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics", Springer-Verlag, 3rd ed. (1966).

## INTERNAL FERMION ONE-LOOP CONTRIBUTION TO THE CASIMIR FORCE

ZHENG TAIYU

(Department of Physics, Northeast Normal University, Changchun)

### ABSTRACT

The contribution of internal fermion one-loop to the Casimir energy between two parallel conducting are calculated by using the Feynman path integral method. The force per unit area is  $0.00025 \text{ dyne/cm}^2$ .