第 15 卷 第11期 高 能 物 理 与 核 物 理 Vol. 15, No. 11
1991 年 11 月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Nov., 1991

规 范 Q 星

程 红 波
(上海交通大学物理系，上海 200030)

摘 要

在本文中，我们给出了规范非拓扑孤子星及其黑洞理论，发现存在具有质量上、下限、有规范作用和最大粒子数 $Q_{\max}$ 的冷却、稳定和大质量的紧致状态，许多性质与普通孤子星类似，$Q>Q_{\max}$ 时，规范 Q 星不稳定.

一、引 言

新近，李新洲等人在 Q-ball 非拓扑孤子和拓扑孤子方面取得了一系列进展[1-4]. 文献[1—5]中讨论了具有相互作用的非拓扑孤子和无相互作用的非拓扑孤子. 文献[6]考虑规范 Q-ball，发现存在规范场时，要形成稳定的 Q 球，粒子数 $Q\leqslant Q_{\max}$，导致总质量亦有上限，否则就要弥散.

随着对非拓扑孤子性质的进一步研究，李政道等在此基础上提出普通的孤子星[7-9]，并详细研究发现这种星可以稳定存在，尽管其密度很大. 在规范 Q 球基础上，我们发现在一定质量范围内，在粒子数上限 $Q_{\max}$ 下，具有相互作用的非拓扑孤子能形成冷却、稳定、大质量的紧致状态——规范 Q 星，尽管它们和孤子星有差别.

二、规 范 Q 星

在球坐标 (t,ρ,α,β) 中，取度规:

$$ds^2=-e^{-2u}dt^2+e^{2\bar{v}}d\rho^2+\rho^2(d\alpha^2+\sin^2\alpha d\beta^2). \tag{1}$$

取各向同性球坐标 (t,r,α,β)，则度规为

$$ds^2=-e^{2u}dt^2+e^{2v}(dr^2+r^2d\alpha^2+r^2\sin^2\alpha d\beta^2). \tag{2}$$

规范 Q 星的具有 $U(1)$ 对称性的 Lagrange 量为

$$\mathscr{L}=(D_\mu\phi)^+(D^\mu\phi)-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-U(f), \tag{3}$$

其中，

$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu,$$
$$D_\mu=\partial_\mu-ieA_\mu.$$

本文 1991 年 1 月22日收到.

令

$$\phi(\boldsymbol{r},t)=2^{-1/2}f(\boldsymbol{r},t)e^{i\theta(r,t)}. \tag{4}$$

对于稳定、球对称规范 Q 星，$\boldsymbol{A}=0$,取

$$\begin{cases}\theta=\omega t\\ A_0(r)\to 0,当\ r\to\infty\\ \omega>0\end{cases} \tag{5}$$

$$f(\boldsymbol{r},t)=f(r).$$

(3)式为

$$\mathscr{L}=W-V-U, \tag{6}$$

其中

$$W=\frac{1}{2}f^2(\omega-eA_0)^2e^{-2u},$$

$$V=\frac{1}{2}e^{-2\bar{v}}\left[\left(\frac{df}{d\rho}\right)^2-\left(\frac{dA_0}{d\rho}\right)^2e^{-2u}\right]$$

$$=\frac{1}{2}e^{-2v}\left[\left(\frac{df}{dr}\right)^2-\left(\frac{dA_0}{dr}\right)^2e^{-2u}\right].$$

由度规(1)，Christoffel 联络的非零分量为

$$\begin{cases}\Gamma^0_{10}=\dfrac{du}{d\rho},\\ \Gamma'_{11}=\dfrac{d\bar{v}}{d\rho},\\ \Gamma'_{00}=e^{2(u-\bar{v})}\dfrac{du}{d\rho},\\ \Gamma'_{22}=-\rho e^{-2\bar{v}},\\ \Gamma^1_{33}=-\rho e^{-2\bar{v}}\sin^2\alpha,\\ \Gamma^2_{12}=\dfrac{1}{\rho},\\ \Gamma^2_{33}=-\sin\alpha\cos\alpha,\\ \Gamma^3_{13}=\dfrac{1}{\rho},\\ \Gamma^3_{23}=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.\end{cases} \tag{7}$$

Ricci 张量的非零分量为

$$\begin{cases}R_{00}=e^{2(u-\bar{v})}\left[-\dfrac{d^2u}{d\rho^2}-\dfrac{2}{\rho}\dfrac{du}{d\rho}+\dfrac{du}{d\rho}\left(\dfrac{d\bar{v}}{d\rho}-\dfrac{du}{d\rho}\right)\right],\\ R_{11}=\dfrac{d^2u}{d\rho^2}-\dfrac{2}{\rho}\dfrac{d\bar{v}}{d\rho}+\dfrac{du}{d\rho}\left(\dfrac{du}{d\rho}-\dfrac{d\bar{v}}{d\rho}\right),\\ R_{22}=e^{-2\bar{v}}\left[1-e^{2\bar{v}}+\rho\left(\dfrac{du}{d\rho}-\dfrac{d\bar{v}}{d\rho}\right)\right],\\ R_{33}=R_{22}\sin^2\alpha.\end{cases} \tag{8}$$

标量曲率为

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$$
$$= 2e^{-2\bar{v}}\left[\frac{d^2u}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{du}{d\rho} - \frac{d\bar{v}}{d\rho}\right) + \frac{du}{d\rho}\left(\frac{du}{d\rho} - \frac{d\bar{v}}{d\rho}\right)\right]$$
$$+ \frac{2}{\rho^2}e^{-2\bar{v}}\left[1 - e^{2\bar{v}} + \rho\left(\frac{du}{d\rho} - \frac{d\bar{v}}{d\rho}\right)\right]. \quad (9)$$

利用 Einstein 方程，则

$$\rho^2 G_t^t = e^{-2\bar{v}} - 1 - 2e^{-2\bar{v}}\rho\frac{d\bar{v}}{d\rho} = -8\pi G\rho^2(W + U + V), \quad (10)$$

$$\rho^2 G_\rho^\rho = e^{-2\bar{v}} - 1 + 2e^{-2\bar{v}}\frac{du}{d\rho}\rho = 8\pi G\rho^2(W + V - U), \quad (11)$$

$$\rho^2 G_2^2 = e^{-2\bar{v}}\left[\rho^2\frac{d^2u}{d\rho^2} + \left(1 + \rho\frac{du}{d\rho}\right)\rho\frac{d}{d\rho}(u - \bar{v})\right]$$
$$= 8\pi G\rho^2(W - V - U). \quad (12)$$

利用 Euler-Lagrange 方程

$$e^{-2\bar{v}}\left[\frac{d^2f}{d\rho^2} + \left(\frac{2}{\rho} + \frac{du}{d\rho} - \frac{d\bar{v}}{d\rho}\right)\frac{df}{d\rho}\right]$$
$$+ f(\omega - eA_0)^2 e^{-2u} - \frac{\partial U}{\partial f} = 0, \quad (13)$$

$$\left[\frac{d^2A_0}{d\rho^2} + \left(\frac{2}{\rho} - \left(\frac{du}{d\rho} + \frac{d\bar{v}}{d\rho}\right)\right)\frac{dA_0}{d\rho}\right]e^{-2\bar{v}}$$
$$+ f^2(\omega - eA_0)e = 0. \quad (14)$$

设

$$\begin{cases} x = r\dfrac{du}{dr}, \\ y = 1 + r\dfrac{dv}{dr} = e^{-\bar{v}}, \\ \dot{x} = r\dfrac{dx}{dr}, \\ \dot{y} = r\dfrac{dy}{dr}. \end{cases} \quad (15)$$

则(10)、(11)、(12)可变为

$$\begin{cases} 2\dot{y} + y^2 - 1 = -8\pi Gr^2e^{2v}(W + V + U), \\ 2xy + y^2 - 1 = 8\pi Gr^2e^{2v}(W + V - U), \\ \dot{x} + \dot{y} + x^2 = 8\pi Gr^2e^{2v}(W - V - U). \end{cases} \quad (16)$$

对于引力场，Q 星的能量为

$$G\frac{d}{d\rho}[E(g) + E(m)] = \frac{d}{d\rho}[\rho e^u(1 - e^{-\bar{v}})]. \quad (17)$$

规范 Q 星质量

$$
\begin{aligned}
M &= E(g) + E(m) \\
&= \int_0^\infty 4\pi(W + V + U)\rho^2 d\rho,
\end{aligned}
\tag{18}
$$

或

$$M = 4\pi \int_0^\infty (W + V + U) e^{5v/2} r^2 dr. \tag{19}$$

为进一步研究规范 Q 星，取薄壁近似

$$
\begin{cases}
f = F, & \rho < R. \\
f = 0, & \rho > R + T. \\
f: F \to 0. & R < \rho < R + T.
\end{cases}
\tag{20}
$$

取势函数

$$U(f) = \frac{\lambda^2 f^6}{6\mu^2} - \frac{f^4}{4} + \frac{\mu^2 f^2}{2}, \tag{21}$$

为在计算中取适当近似，可作如下估算.

$$
\begin{aligned}
&\frac{\omega^2}{\mu^2} e^{-2u} \sim \frac{1}{\mu^2} \frac{\partial U}{\partial F} \sim 1 - \left(\frac{F}{\mu}\right)^2, \\
&U(F) = \frac{\mu^2}{2} F^2 \left[\frac{\lambda^2}{3}\left(\frac{F}{\mu}\right)^4 - \frac{1}{2}\left(\frac{F}{\mu}\right)^2 + 1\right] \\
&\qquad \sim \frac{\mu^2}{2} F^2 \cdot \frac{\omega^4}{\mu^4} e^{-4u}, \\
&\frac{U}{W} \sim \left(\frac{\omega}{\mu}\right)^2 \ll 1.
\end{aligned}
$$

取上述合理近似后，当 $\rho < R$ 时，即在规范 Q 星内

$$
\begin{cases}
W = \dfrac{1}{2} F^2(\omega - eA_0)^2 e^{-2u}, \\
V = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{dA_0}{d\rho}\right)^2 e^{-2(u+\bar{v})}.
\end{cases}
\tag{22}
$$

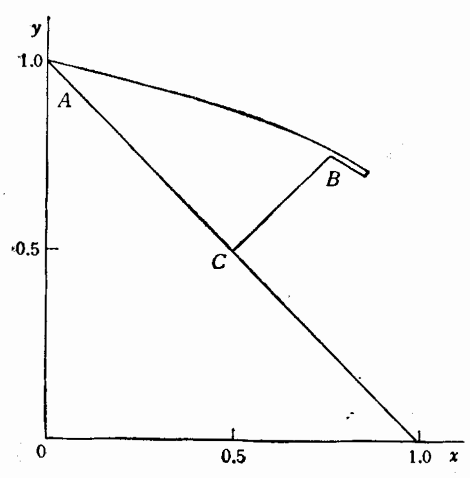

图　1

要使规范 Q 星稳定而不弥散，e 很小，$Q \leqslant O_{\max}$，$R \leqslant R_{\max}$，则 A_0 很小，$\dfrac{dA_0}{d\rho}$ 亦很小.

$$\frac{V}{W} \sim \frac{1}{\omega^2 R^2} \ll 1.$$

在规范 Q 星内，即 $\rho < R$，(16)式可取为

$$
\begin{cases}
2\dot{y} + y^2 - 1 = -8\pi G r^2 e^{2v} W, \\
2xy + y^2 - 1 = 8\pi G r^2 e^{2v} W, \\
\dot{x} + \dot{y} + x^2 = 8\pi G r^2 e^{2v} W,
\end{cases}
\tag{23}
$$

即

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - xy - y^2}{-2 - x^2 + 3xy + 2y^2}. \tag{24}$$

其临界点：$x=0$，$y=1$ 和 $x=y=2^{-1/2}$

在规范 Q 星外，即 $\rho>R$，则 $F=0$，$U=W=0$，(16)式为

$$\begin{cases}2\dot{y}+y^2-1=-8\pi Gr^2e^{2\nu}V,\\ 2xy+y^2-1=8\pi Gr^2e^{2\nu}V,\\ \dot{x}+\dot{y}+x^2=-8\pi Gr^2e^{2\nu}V,\end{cases} \tag{25}$$

即

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2+xy-1}{x(x+y)}. \tag{26}$$

其临界点：$x=0$，$y=1$.

当 $\rho:0\to R$ 时，由临界点 $A(0,1)$ 沿曲线 (24) 式至临界点 $B(2^{-1/2},\ 2^{-1/2})$；当 $\rho:R\to R+T$，即在规范 Q 星边界上，$f(r)$ 跳变，由 B 点至 $C(x_A,y_A)$；当 $\rho:R+T\to\infty$ 时，由 C 点沿曲线(26)式至 A 点，此即规范 Q 星的宇宙线. 由(18)式所得结果，规范 Q 星质量为

$$M=\overline{M}_I+\overline{M}_S, \tag{27}$$

其中，

$$\begin{aligned}\overline{M}_I&=4\pi\int_0^R(W+V+U)\rho^2d\rho\\ &=\frac{1}{2G}\int_0^R d[(1-y^2)\rho]\\ &=\frac{1}{2G}(1-y_{in}^2)R,\\ \overline{M}_S&=4\pi\int_R^{R+T}(V+U)\rho^2d\rho\\ &=-\frac{R}{G}\int_{y_{in}}^{y_A}ydy=\frac{1}{2G}(y_{in}^2-y_A^2)R,\end{aligned}$$

即

$$M=\frac{1}{2G}(1-y_A^2)R. \tag{28}$$

由图 1 可知，$x_A=y_A=\frac{1}{2}$，则

$$M=\frac{3R}{8G}, \tag{29}$$

或

$$R=\frac{8GM}{3}.$$

现讨论规范 Q 星的黑洞大小. 当 $\rho>R+T$ 时，由(14)(10)式定出度规为

$$\begin{cases}e^{2u}=1-\dfrac{2GM}{\rho}+\dfrac{Ge^2}{\rho^2},\\ e^{2\bar{v}}=\left(1-\dfrac{2GM}{\rho}+\dfrac{Ge^2}{\rho^2}\right)^{-1},\end{cases} \tag{30}$$

黑洞半径为

$$\rho_b = GM + \sqrt{G(GM^2 - e^2)}. \tag{31}$$

而 $M > eG^{-1/2}$, $R = \frac{8GM}{3} > \rho_b$ 即规范Q星半径大于其黑洞半径，这里粒子数 $Q \leqslant Q_{max}$, $R \leqslant R_{max}$, 规范Q星既不弥散，也不坍缩，能稳定存在.

三、结　论

在考虑规范相互作用后，规范Q星与其他孤子星有区别[7-10]，在条件: $Q \leqslant Q_{max}$, $R \leqslant R_{max}$ 下，它们既不弥散，也不会退化成黑洞，而能稳定存在.

参 考 文 献

[1] 倪致祥，李新洲，高能物理与核物理，**15**(1991)，92.
[2] X. Shi, X. Li, *Phys. Rev.*, **D42**(1990), 2035.
[3] X. Shi, X. Li, *Phys. Rev.*, **D42**(1990), 2144.
[4] X. Shi, X. Li, *Class. Quantan Gravity*, 8(1991), 280.
[5] S. Colemann, *Nucl. Phys.*, **B262**(85), 263.
[6] Kimyeong Lee, Jaime A. Stein-Schabes, Richard Watkins, Lawrence M. Widrow, *Phys. Rev.*, **D39**(1989), 1665.
[7] T. D. Lee, *Phys. Rev.*, **D35**(1987), 3637.
[8] R. Friedberg, T. D. Lee, Y. Pang, *Phys. Rev.*, **D35**(1987), 3640.
[9] R. Friedberg, T. D. Lee, Y. Pang, *Phys. Rev.*, **D35**(1987), 3658.
[10] Moshe Carmeli, Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory, A Wiley-Interscience Publication John Wiley & Sons, 1982.

Gauged *Q*-stars

CHENG HONGBO

(*Department of Physics, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai* 200030)

ABSTRACT

We derive the theory about gauged non-topological soliton stars and their black holes, and find that the gauged Q-stars with maximum particle number Q_{max} in a definite range of mass are cold, stable and in coherent states of very large mass. Their characteristics are similar to those of general soliton stars. When $Q > Q_{max}$, the gauged Q-stars are not stable.