第 15 卷 第 7 期 高能物理与核物理 Vol. 15, No. 7
1991 年 7 月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS July, 1991

$O(3)$ 非线性 σ 模型中拓扑项的可移性问题

高孝纯 许晶波 严激进 李文铸
(浙江大学物理系，杭州 310027)

摘　　要

$O(3)$ 非线性 σ 模型的经典理论中的拓扑项可以用一适当的正则变换移去．本文研究了该模型的量子理论，求出了上述正则变换相应的量子么正变换，并讨论了此么正变换的意义及拓扑项的可移性问题．

一、引　　言

非线性 σ 模型中的场量取值于一个拓扑非平庸的流形(一般为李群流形 G，或者齐性空间 G/H)，故此类模型实为相当广泛的一类场论．对它们的研究自然地与场论的大范围性质的研究紧密相关，因而长期以来一直受到人们的重视．另外，$1+1$ 维非线性 σ 模型与 $3+1$ 维非阿贝尔规范理论有许多共同的特征[1-4]，对该模型的研究有助于人们了解规范理论的许多重要性质． $1+1$ 维非线性 σ 模型在超弦紧致化方面也可能起到重要作用[5]．作为一维反铁磁 Heisenberg 模型的连续经典极限，$1+1$ 维非线性 σ 模型还可用来研究量子霍尔效应[6-8]．作为二维反铁磁 Heisenberg 模型的连续经典极限，$2+1$ 维非线性 σ 模型则可能在高温超导的研究中起到重要的作用[9-12]．

Affleck 曾经研究过 $1+1$ 维 Heisenberg 模型的连续极限——$O(3)$ σ 模型中拓扑项的起源问题[7,8]，并在拉氏密度中得到了反映该模型拓扑性质的拓扑项． 我们曾经证明，可通过一个适当的正则变换移去此拓扑项[13]．葛墨林等人[14]也独立地作出了相似的结果．

人们自然会问，既然可用一个正则变换移去此拓扑项，哪么拓扑项还会有什么物理意义呢?

本文通过研究 $1+1$ 维 $O(3)$ σ 模型的量子理论找到了与上述正则变换相应的量子理论中的么正变换，从而揭示了上述拓扑项的物理意义及其与量子真空态的紧密关系．

为了更好地理解量子场论中正则变换和么正变换的关系及么正变换与拓扑项的关系和意义，我们首先讨论一个一维量子力学问题．

本文 1990 年 11 月 27 日收到．

二、经典正则变换和量子么正变换的关系及拓扑项的可移性问题

在某些情形，给出了经典的正则变换很容易找出其相应的量子么正变换。例如，考虑一个广义含时谐振子，其哈密顿量为

$$\hat{H}=\frac{1}{2}\left[\alpha\hat{p}^2+\beta(\hat{p}\hat{q}+\hat{q}\hat{p})+\gamma\hat{q}^2\right], \tag{1}$$

其中 α、β 和 γ 是随时间缓慢变化的参量，$\alpha>0$ 且 $\alpha\gamma-\beta^2>0$。 相应的能级为 $E_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)(\alpha\gamma-\beta^2)^{1/2}$。参量空间中的一闭合曲线 C 相应的 Berry 相位为[15]

$$\gamma_n(C)=\left(n+\frac{1}{2}\right)\oint\frac{\beta\mathrm{d}\alpha-\alpha\mathrm{d}\beta}{2\alpha(\alpha\gamma-\beta^2)^{1/2}}. \tag{2}$$

如在相应的经典拉氏量中加一时间的全导数项 $-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\beta q^2/2\alpha)$，此全导数将导致如下的正则变换[15]

$$p\to p+\frac{\beta}{\alpha}q;\ q\to q. \tag{3}$$

很容易求得此经典正则变换所相应的量子么正变换 $\hat{U}=\exp(i\beta\hat{q}^2/2\alpha)$，由此正则变换可得

$$\hat{p}\to\hat{U}\hat{p}\hat{U}^+=\hat{p}+\frac{\beta}{\alpha}\hat{q};\ \hat{q}\to\hat{U}\hat{q}\hat{U}^+=\hat{q}. \tag{4}$$

上面的例子描述了单自由度的广义谐振子系统的经典正则变换所相应的量子么正变换。 本文的一个主要目的就是要求出文献[13]中的经典正则变换所相应的量子么正变换。由于 $O(3)$ σ 模型是一个无穷自由度的场系统，相应的计算当然要复杂困难的多。

下面我们仍然以单自由度的广义谐振子系统为例讨论一下量子么正变换 $\hat{U}$ 的意义和拓扑项的可移性问题。易证，在上述 $\hat{U}$ 变换下[15]

$$\begin{cases}\hat{H}=\frac{1}{2}\left[\alpha\hat{p}^2+\beta(\hat{p}\hat{q}+\hat{q}\hat{p})+\gamma\hat{q}^2\right]\to\hat{H}'\\ \quad=\frac{\alpha}{2}\hat{p}^2+\frac{1}{2}\left[\gamma-\frac{\beta^2}{\alpha}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\right]\hat{q}^2;\\ E_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)(\alpha\gamma-\beta^2)^{1/2}\to E'_n\\ \quad\cong\left(n+\frac{1}{2}\right)(\alpha\gamma-\beta^2)^{1/2}\left[1-\frac{\alpha}{2(\alpha\gamma-\beta^2)}\times\frac{d}{dt}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)+\cdots\cdots\right].\end{cases} \tag{5}$$

此时，$\hat{H}'$ 相应的 Berry 相因子消失，但 $\hat{H}'$ 中的时间全导数项 $-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\hat{q}^2$ 实际上是一种“拓扑项”，它使得绕参量空间闭合曲线 C 所相应的动力学相因子(即总相因子，因此时 Berry 相因子为零[15])变为

$$\left\langle n'\left|p\exp\left[-i\int_c\hat{H}\mathrm{d}t\right]\right|n'\right\rangle=\exp\left[-i\int_c E'_n\mathrm{d}t\right], \tag{6}$$

其中 $|n'\rangle = \hat{U}|n\rangle$，易证

$$\hat{U}^{+}p\exp\left[-i\int_{c}\hat{H}'\mathrm{d}t\right]\hat{U} = p\exp\left[-i\int\hat{H}\mathrm{d}t\right], \tag{7}$$

因此总相因子在 $\hat{U}$ 变换下保持不变．即

$$\left\langle n'\left|p\exp\left[-i\int_{c}\hat{H}'\mathrm{d}t\right]\right|n'\right\rangle = \left\langle n\left|p\exp\left[-i\int_{c}\hat{H}\mathrm{d}t\right]\right|n\right\rangle. \tag{8}$$

显然 E'_n 中的第二项来自 $\hat{H}'$ 中的全导数项，而此项给出原来的 Berry 相因子——一种具有拓扑根源的相因子．从这个意义上说，$\hat{H}'$ 中的全导数项是一种“拓扑项”．由式(8)可见，$\hat{H}$ 中无“拓扑项”，初始态为 $|n\rangle$．而 $\hat{H}'$ 中有“拓扑项”，初始态为 $\hat{U}|n\rangle$．从这个意义上说，“拓扑项”是可以移去的．上述 $\hat{U}$ 变换实际上起了一个表象变换的作用，而量子力学中任意矩阵元在表象变换下是不变的．

如果对上述 $\hat{H}$ 和 $\hat{H}'$，求如下幅，

$$\left\langle \psi\left|p\exp\left[-i\int_{c}\hat{H}'\mathrm{d}t\right]\right|\psi\right\rangle; \tag{9a}$$

$$\left\langle \psi\left|p\exp\left[-i\int_{c}\hat{H}\mathrm{d}t\right]\right|\psi\right\rangle, \tag{9b}$$

其中初态和末态由某种测量决定，即由某种外界因素所确定，并不随 $\hat{U}$ 变换而变，那么此两种幅显然是不同的．此时，上述 $\hat{U}$ 变换就不是一种表象变换，而是代表了两种不同动力学系统的 Hamilton 量之间的一种联系．

在量子场论中，真空至真空的跃迁幅具有特别的重要性．从上面的讨论中可见，在量子场论中不仅要讨论算符的么正变换，还应该研究真空是如何确定的．本文在求出 $O(3)$ σ 模型的移去拓扑项的经典正则变换相应的量子么正变换后，将对此作简要的讨论．

三、$O(3)$ σ 模型的量子理论和拓扑项的可移性问题

一维反铁磁 Heisenberg 模型的 Hamilton 量为

$$\hat{H} = \sum \boldsymbol{S}_i\cdot\boldsymbol{S}_{i+1},\quad \boldsymbol{S}_i^2 = S(S+1). \tag{10}$$

在大 S 连续极限下[13]，Hamilton 量为 $2\Delta\sqrt{s(s+1)}\,H_\sigma$，$H_\sigma$ 是 σ 模型的 Hamilton 量

$$H_\sigma = \int\mathrm{d}x\left\{\frac{g^2}{2}\left(\boldsymbol{l} - \frac{\theta}{4\pi}\frac{\partial\boldsymbol{n}}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2g^2}\left(\frac{\partial\boldsymbol{n}}{\partial x}\right)^2\right\}, \tag{11}$$

其中 $g^2 = 2/S$，拓扑角 $\theta = 2\pi S$．

为将 Hamilton 量表述成正则形式，用球坐标来表示 $\boldsymbol{n} = (\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta)$，以 θ,φ 为独立的正则坐标，相应的正则动量为 π_θ、π_φ，选

$$l_x = -\sin\varphi\,\pi_\theta - \cos\varphi\,\mathrm{ctg}\theta\,\pi_\varphi; \tag{12a}$$

$$l_y = \cos\varphi\,\pi_\theta - \sin\varphi\,\mathrm{ctg}\theta\,\pi_\varphi; \tag{12b}$$

$$l_z = \pi_\varphi, \tag{12c}$$

则 Hamilton 量和 Hamilton 密度为

$$\hat{H} = \int\mathscr{H}\mathrm{d}x,\quad \mathscr{H} = \frac{g^2}{2}\pi_\theta^2 + \frac{g^2}{2}\pi_\varphi^2/\sin^2\theta + \frac{1}{g^2}\left[(\partial_x\theta)^2 + \sin^2\theta(\partial_x\varphi)^2\right]$$

$$-\pi_\theta \sin\theta \partial_x \varphi + (\pi_\varphi/\sin\theta)\partial_x\theta, \tag{13}$$

相应的拉氏密度为

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2g^2}(\partial_\mu \boldsymbol{n})^2 + \frac{\theta}{4\pi}\varepsilon^{\mu\nu}\boldsymbol{n}\cdot(\partial_\mu \boldsymbol{n}\times\partial_\nu \boldsymbol{n}),\ (\mu,\nu=1,2) \tag{14}$$

其中最后一项是拓扑项。

我们曾证明[13]，经过如下的正则变换

$$\theta \to \theta' = \theta, \varphi \to \varphi' = \varphi; \tag{15a}$$

$$\pi_\theta \to \pi'_\theta = \pi_\theta - \frac{1}{g^2}\sin\theta\partial_x\varphi; \tag{15b}$$

$$\pi_\varphi \to \pi'_\varphi = \pi_\varphi + \frac{1}{g^2}\sin\theta\partial_x\theta, \tag{15c}$$

系统的 Hamilton 密度变为

$$\mathscr{H} \to \mathscr{H}' = \frac{g^2}{2}\pi'^2_\theta + \frac{g^2}{2}\pi'^2_\varphi/\sin^2\theta' + \frac{1}{2g^2}[(\partial_x\theta')^2 + \sin^2\theta'(\partial_x\varphi)^2], \tag{16}$$

而在相应的拉氏密度中，不再存在拓扑项，即

$$\mathscr{L} \to \mathscr{L}' = \frac{1}{2g^2}(\partial_\mu \boldsymbol{n})^2. \tag{17}$$

现在我们来讨论 $O(3)$ σ 模型的量子理论，求出上述经典正则变换相应的量子幺正变换。首先，我们来研究 Heisenberg 表象中，在作一不显含时间的量子幺正变换 $\hat{U}$ 时，系统的 Hamilton 量的变换性质。

在 Heisenberg 表象中，一个力学量算符 $\hat{O}_H$（$\hat{O}_H$ 为广义动量与坐标的函数，不显含时间）满足如下的运动方程（$\hbar=1$）

$$\frac{\mathrm{d}\hat{O}_H}{\mathrm{d}t} = i[\hat{H}, \hat{O}_H], \tag{18}$$

其中 $\hat{H}$ 为系统的 Hamilton 量。作一不显含时间的幺正变换 $\hat{U}$，

$$\hat{O}_H \to \hat{O}'_H = \hat{U}\hat{O}_H\hat{U}^+; \tag{19}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\hat{O}'_H}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\hat{U}}{\mathrm{d}t}\hat{O}_H\hat{U}^+ + \hat{U}\frac{\mathrm{d}\hat{O}_H}{\mathrm{d}t}\hat{U}^+ + \hat{U}\hat{O}_H\frac{\mathrm{d}\hat{U}^+}{\mathrm{d}t}\\ &= \frac{\mathrm{d}\hat{U}}{\mathrm{d}t}\hat{U}^+\hat{O}'_H + i[\hat{U}\hat{H}\hat{U}^+, \hat{O}'_H] + \hat{O}'_H\hat{U}\frac{\mathrm{d}\hat{U}^+}{\mathrm{d}t}\\ &= i[\hat{H}', \hat{O}'_H]\end{aligned} \tag{20}$$

其中

$$\hat{H}' = \hat{U}\hat{H}\hat{U}^+ + i\hat{U}\frac{\mathrm{d}\hat{U}^+}{\mathrm{d}t};\quad \frac{\mathrm{d}\hat{U}^+}{\mathrm{d}t} = i[\hat{H}, \hat{U}^+]. \tag{21}$$

对 $O(3)$ σ 模型，与经典 Hamilton 量(13)式相应的量子 Hamilton 量为[16]

$$\begin{aligned}\hat{H} = \int \mathrm{d}x\hat{\mathscr{H}},\quad \mathscr{H} &\doteq \frac{g^2}{2}\frac{1}{\sin\hat{\theta}}\hat{\pi}_\theta\sin\hat{\theta}\hat{\pi}_\theta + \frac{g^2}{2}\hat{\pi}^2_\varphi/\sin^2\hat{\theta}\\ &+ \frac{1}{g^2}[(\partial_x\hat{\theta})^2 + \sin^2\hat{\theta}(\partial_x\hat{\varphi})^2] + \frac{1}{2}\Big[2(\hat{\pi}_\varphi/\sin\hat{\theta})\partial_x\hat{\theta}\\ &- \sin\hat{\theta}(\partial_x\hat{\varphi})\hat{\pi}_\theta + \frac{1}{\sin\theta}\hat{\pi}_\theta(\sin^2\hat{\theta}\,\partial_x\hat{\varphi})\Big],\end{aligned} \tag{22}$$

其中最后一项为拓扑项，对易关系为

$$[\hat{\pi}_\theta(x), \hat{\theta}(y)] = -i\delta(x-y); \tag{23a}$$

$$[\hat{\pi}_\varphi(x), \hat{\varphi}(y)] = -i\delta(x-y). \tag{23b}$$

引入不显含时间的么正变换 $\hat{U}$

$$\hat{U} = \exp\left[-\frac{i}{g^2}\int \cos\hat{\theta}(\partial_x\hat{\varphi})dx\right]. \tag{24}$$

易见在此 $\hat{U}$ 变换下

$$\hat{\theta} \to \hat{\theta}' = \hat{U}\hat{\theta}\hat{U}^+ = \hat{\theta}; \tag{25a}$$

$$\hat{\varphi} \to \hat{\varphi}' = \hat{U}\hat{\varphi}\hat{U}^+ = \hat{\varphi}; \tag{25b}$$

$$\hat{\pi}_\theta \to \hat{\pi}'_\theta = \hat{U}\hat{\pi}_\theta\hat{U}^+ = \hat{\pi}_\theta - \frac{1}{g^2}\sin\hat{\theta}\partial_x\hat{\varphi}; \tag{25c}$$

$$\hat{\pi}_\varphi \to \hat{\pi}'_\varphi = \hat{U}\hat{\pi}_\varphi\hat{U}^+ = \hat{\pi}'_\varphi + \frac{1}{g^2}\sin\hat{\theta}\partial_x\hat{\theta}. \tag{25d}$$

将(22)式中的 $\hat{H}$ 代入(21)式，注意到

$$[\hat{\pi}_\theta, \hat{U}^+] = -\frac{1}{g^2}\sin\hat{\theta}(\partial_x\hat{\varphi})\hat{U}^+; \tag{26a}$$

$$[\pi_\varphi, \hat{U}^+] = \frac{1}{g^2}\sin\hat{\theta}(\partial_x\theta)\hat{U}^+; \tag{26b}$$

$$\begin{aligned}[\hat{\pi}_\theta\sin\hat{\theta}\hat{\pi}_\theta, \hat{U}^+] = &-\frac{1}{g^2}\hat{\pi}_\theta(\sin^2\hat{\theta}\partial_x\hat{\varphi})\hat{U}^+ - \frac{1}{g^2}(\sin^2\hat{\theta}\partial_x\hat{\varphi})\hat{\pi}_\theta\hat{U}^+ \\ &-\frac{1}{g^4}\sin^3\theta(\partial_x\varphi)^2\hat{U}^+;\end{aligned} \tag{26c}$$

$$[\hat{\pi}^2_\varphi, \hat{U}^+] = \frac{1}{g^2}\left[2\sin\hat{\theta}(\partial_x\hat{\theta})\hat{\pi}_\varphi\hat{U}^+ - \frac{1}{g^2}\sin^2\hat{\theta}(\partial_x\hat{\theta})^2\hat{U}^+;\right. \tag{26d}$$

$$[\hat{\pi}_\theta\sin^2\hat{\theta}, \hat{U}^+] = -\frac{1}{g^2}\sin^2\hat{\theta}(\partial_x\hat{\varphi})\hat{U}^+, \tag{26e}$$

即得

$$\begin{aligned}i\hat{U}\frac{d\hat{U}^+}{dt} = -\hat{U}[\hat{H}, \hat{U}^+] = \int dx\left\{\frac{1}{2}\left[\sin\hat{\theta}'(\partial_x\hat{\varphi}')\hat{\pi}'_\theta + \frac{1}{\sin\hat{\theta}'}\hat{\pi}'_\theta\sin^2\hat{\theta}'(\partial_x\hat{\varphi}')\right]\right. \\ \left. -(\hat{\pi}'_\varphi/\sin\hat{\theta}')\partial_x\hat{\theta}' - \frac{1}{2g^2}[(\partial_x\hat{\theta}')^2 + \sin^2\hat{\theta}'(\partial_x\hat{\varphi}')^2]\right\}.\end{aligned} \tag{27}$$

最后可得

$$\begin{aligned}\hat{H}' = \hat{U}\hat{H}\hat{U}^+ + i\hat{U}\frac{d\hat{U}^+}{dt} = \int dx\left\{\frac{g^2}{2}\frac{1}{\sin\hat{\theta}'}\hat{\pi}'_\theta\sin\hat{\theta}\hat{\pi}'_\theta + \frac{g^2}{2}\hat{\pi}'^2_\varphi/\sin^2\hat{\theta}'\right. \\ \left. + \frac{1}{2g^2}\left[(\partial_x\hat{\theta}')^2 + \sin^2\hat{\theta}'(\partial_x\hat{\varphi}')^2\right]\right\}.\end{aligned} \tag{28}$$

与(22)式比较，易见 $\hat{H}'$ 中不再包含拓扑项．于是我们求出了经典正则变换相应的量子么正变换 $\hat{U}$，在此变换下，广义动量和广义坐标按(25)式变换，而量子 Hamilton 量中的拓扑项被移去了．

拓扑项可以被一个量子么正变换移去或产生，是否拓扑项就没有物理意义了呢？显

然不是如此，我们以 Yang-Mills 理论的 θ 真空为例来说明这一点. 此时，Hamilton 量的真实真空本征态为[17]

$$|\theta\rangle=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{in\theta}|n\rangle;\quad |\theta=0\rangle\equiv|0\rangle=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|n\rangle, \tag{29}$$

其中 $|n\rangle$ 是绕数为 n 的真空态. 显然 $|\theta\rangle$ 与 $|0\rangle$ 之间差一个么正变换 $\hat{U}$,

$$|0\rangle=\hat{U}|\theta\rangle. \tag{30}$$

仅 θ 相同的真空之间的跃迁幅不为零，此幅(在欧氏空间中写出)为[17]

$$\begin{aligned}\langle\theta|Pe^{-\hat{H}t}|\theta\rangle&=\langle 0|Pe^{-\hat{H}'t}|0\rangle\\&=\int[DA_\mu\cdots]\exp\left\{-\int d^4x(\mathscr{L}+\mathscr{L}_\theta)\right\},\end{aligned} \tag{31}$$

其中 $\mathscr{L}_\theta=i\dfrac{\theta}{16\pi^2}\mathrm{Tr}(F^*_{\mu\nu}F_{\mu\nu})$，而 $\hat{U}^+Pe^{-\hat{H}'t}\hat{U}=Pe^{-\hat{H}t}$ 与(7)式形式相同. 将(31)式与 $\langle 0|Pe^{-\hat{H}t}|0\rangle=\int[D_\mu A_\mu\cdots]\exp(-\int d^4x\mathscr{L})$ 比较可认为 $\hat{H}$ 中不含“拓扑项”，而 $\hat{H}'$ 中含“拓扑项”，它导致 $\mathscr{L}_\theta$ 项. 因此从这个意义上说，拓扑项是可以移去的. 但是 θ 究竟应该取什么值，并不能由通常 Yang-Mills 场的 $\hat{H}$ 的最低能态决定，θ 要由某种“外界”因素(可认为是一种测量)来决定. 其实，Peccei 和 Quinn 在解决强 CP 问题时所使用的 P-Q 机制[18]就是一种用“外界”因素(多加一个 Higgs 多重态)来确定 θ(让 $\theta=0$)的一种尝试. 可见，在场论的情形讨论拓扑项是否存在时，必须对真空作仔细的研究，$O(3)$ σ 模型也是如此. 因此，对 $O(3)$ σ 模型真空态的研究是重要的和令人感兴趣的. $1+1$ 维 $O(3)$ σ 模型同样存在瞬子解和 θ 真空[19]，而且可能不发生象 Yang-Mills 理论那样的红外困难. $1+1$ 维 $O(3)$ σ 模型的 θ 真空与本文找到的量子么正变换的关系，以及 θ 值的确定问题的研究正在进行之中.

四、结 束 语

可以对 $2+1$ 维 $O(3)$ σ 模型作类似的讨论. 但具有 Hopf 项的 $2+1$ 维 $O(3)$ σ 模型不能解除约束，具有隐含的规范对称性，这增加了问题的复杂性. 为研究高温超导的机制，$2+1$ 维 $O(3)$ σ 模型的拓扑项的起源是一个很有意义的问题，这方面的工作正在进行之中.

参 考 文 献

[1] A. M. Polyakov, *Phys. Lett.*, **59B**(1975), 79; **72B**(1977), 224.
[2] A. T. Belavin & A. M. Polyakov, *JEPP Lett.*, **22**(1975), 245.
[3] E. Brezin & J. Zinn-justin, *Phys. Rev.*, **B14**(1976), 3110.
[4] H. Eichenher, *Nucl. Phys.*, **B146**(1978), 215; **B155**(1979), 544.
[5] E. Witten, *Phys. Lett.*, **B149**(1984), 351.
[6] H. Levin, S. B. Libby & A. M. M. Pruisken, *Nucl. Phys.*, **B240**(1984), 30.
[7] I. Affleck, *Nucl. Phys.*, **B257**(1985), 397; **B265**(1986), 409.
[8] I. Affleck, *Phys. Rev. Lett*, **56**(1986), 408; **57**(1986), 1048.
[9] I. Dzyaloshinskii, A. M. Polyakov & P. Wiegmann, *Phys. Lett.*, **A127**(1988), 112.
[10] A. M. Polyakov, *Mod. Phys. Lett*, **A3**(1988), 325.

[11] S. Chakravarty, B. I. Haiperin & D. R. Nelson, *Phys. Rev. Lett.*, **60**(1988), 1057.
[12] X. G. Wen & A. Zee, *Phys. Rev. Lett.*, **63**(1989), 461.
[13] 高孝纯,汪涌,许晶波,李文铸,高能物理与核物理,**13**(1989),527.
[14] 葛墨林,牛云,科学通报,**34**(1989),1131; *J. Phys.* **A22**(1989), *L*987.
[15] G. Giaravarini, E. Gozzi, D. Rohrlich & W D. Thacker, *J. Phys.*, **A22**(1989), 3513.
[16] T. L. Olozyk, P. K. Panigrahi & S. Ramaswainy, *Z. Phys.*, **C45**(1990), 653.
[17] W. Marciano & H. Pagels, *Phys. Rep.*, **C36**(1978), 254.
[18] P. D. Peccei & Quinn. *Phys. Rev. Lett.*, **38**(1977), 1440; S. M, Bar, X. C. Gao (高孝纯) & D. B. Reiss. *Phys. Rev.*, **D26**(1982), 2176.
[19] B. Berg & M. Luscher, *Comm. Math. Phys.*, **69**(1979), 57; Nucl. Phys. **B160**(1979), 281; V. A. Fateev, I. V. Frolov & A. S. Schwarz, *Nucl. Phys.*, **B**(**154**) (1979), 1.

Removability of the Topological Term in the $O(3)$ Nonlinear σ-model

Gao Xiaochun　Xu Jingbo　Yan Jijin　Li Wenzhu

(*Department of Physics, Zhejiang University, Hangzhou* 310027)

Abstract

It is shown that the topological term in the $O(3)$ nonlinear σ-model can be removed by a suitable canonical transformation in the classical theory of the model. In this paper, the quantum unitary transformation corresponding to the classical canonical transformation is found. The meaning of the unitary transformation and the removability of the topological term are then discussed.