

# 用于 Wiggler 中的矩形钕铁硼 永磁体磁矩的实验测定\*

黄 敏 李永贵 吴庆武 庄杰佳

(中国科学院高能物理研究所, 北京 100039)

## 摘 要

本文描述一种确定矩形钕铁硼永磁体磁矩的实验方法。在磁体为均匀磁化的假定下, 用该法不仅能确定磁体磁矩的大小和空间取向, 而且能确定磁中心相对几何中心的偏离量。

## 一、前 言

近几年来, 自由电子激光作为一种新的光源, 已经得到了迅速的发展。Wiggler 是自由电子激光装置的核心部件, 其性能的好坏直接影响着自由电子激光的增益和能量转换效率。在永磁式平面 Wiggler 中, 大多数采用矩形钐钴 (SmCo) 和钕铁硼 (NdFeB) 磁块, 准确地测量这些磁块的磁矩是建造高质量 Wiggler 最重要的环节之一。

NdFeB 是近几年发展起来的一种新型材料。它与 SmCo 相比, 有更大的磁能级, 一般 NdFeB 的磁能级  $\sim 35(\text{T} \cdot \text{A}/\text{m})$ , SmCo 的磁能级  $\sim 15(\text{T} \cdot \text{A}/\text{m})$ , 在价格上, NdFeB 仅是 SmCo 的一半。此外 NdFeB 材料退磁曲线上较宽广的线性范围和近似等于 1 的相对导磁率, 不论是对材料的实际应用, 还是有关场分布的理论计算, 都提供了极大的方便。Halbach<sup>[1]</sup> 曾对 SmCo 永磁体的磁特性进行过分析, 并且用复势的办法计算过场分布; 刘茂三<sup>[2]</sup> 用磁标势计算了不同构形的 SmCo 永磁列阵的分布; Luccio<sup>[3]</sup> 和 Walker<sup>[4]</sup> 也分别对 SmCo 磁块的磁矩计算和测定提出了不同的方法。NdFeB 具有与 SmCo 完全相似的磁特性。本文采用面电流密度的模型对矩形 NdFeB 永磁体的场分布进行分析, 并以此为根据介绍一种我们使用过的精确测定磁矩的方法。

## 二、磁场计算

NdFeB 材料的正常退磁曲线如图 1 所示。在第四象限,  $B-\mu_0 H$  曲线在很大范围内呈直线分布, 该直线可用截距方程表示为:

本文 1990 年 11 月 22 日收到。

\* 国家高技术计划激光技术领域资助。

$$-\frac{H}{H_c} + \frac{B}{B_r} = 1, \quad (1)$$

定义导磁率  $\mu = \mu_r \mu_0 = B_r/H_c$ , 则(1)式变为:

$$B = \mu H + B_r. \quad (2)$$

对我们所用的材料,剩磁  $B_r = 1.05\text{T}$ , 矫顽力  $H_c = H_c = 10^7/4\pi(\text{A/m})$ ,  $H_c$  是内禀矫顽力,  $H$  为磁场强度.

对永磁体本身而言,磁感应强度  $B$  和磁化强度  $M$  之间存在关系式

$$B = \mu_0 H + M, \quad (3)$$

对照(2)、(3)式有:

$$M = B_r. \quad (4)$$

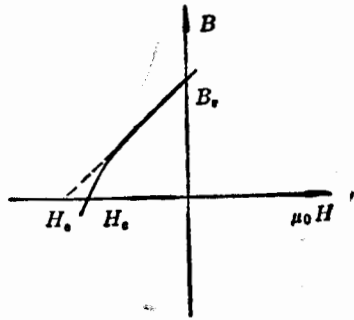


图1 NdFeB材料的正常退磁曲线

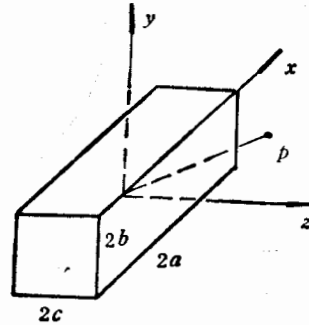


图2 矩形磁块在坐标中的取向

另一方面,若磁体内的磁化强度为  $M$ , 磁体外任意一点的矢势可表示为<sup>[5]</sup>:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{M} \times \mathbf{n}}{r} \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla \times \mathbf{M}}{r} \cdot dV, \quad (5)$$

其中  $\mathbf{n}$  是磁体表面上的外向法线单位矢量,  $r$  为被积面元到所求场点的矢径. 若磁体是均匀磁化,体积分部分为零. 按照定义  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , 得到:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{(\mathbf{M} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{r}}{r^3} \cdot d\mathbf{S}. \quad (6)$$

写成微分形式:

$$d\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi} \frac{(\mathbf{M} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{r}}{r^3} \cdot d\mathbf{S}. \quad (7)$$

设矩形磁块的长、宽、高分别为  $2a, 2b, 2c$ , 几何中心为坐标原点,坐标轴取向分别沿矩形的长、宽、高方向,如图2所示. 再设磁化强度  $\mathbf{M} = M_x \mathbf{i} + M_y \mathbf{j} + M_z \mathbf{k}$ , 显然由  $\mathbf{M}$  所引起的在磁体外任一空间点  $P$  的磁场为(6)式对磁体表面的积分. 对于仅沿  $Y$  方向充磁的磁块,其积分可求得为:

$$\mathbf{B}_{P,y} = B_{x,y} \mathbf{i} + B_{y,y} \mathbf{j} + B_{z,y} \mathbf{k}, \quad (8)$$

其中:

$$B_{x,y} = \frac{B_r \cdot \Delta}{4\pi} \int_{-b}^b dy' \left[ \int_{-c}^c \frac{(y-y') \cdot dz}{r_{|x'=a}^3} - \int_{-c}^c \frac{(y-y') \cdot dz'}{r_{|x'=-a}^3} \right]; \quad (8.1)$$

$$B_{yy} = \frac{B_r \cdot \Delta}{4\pi} \int_{-b}^b dy' \left[ \int_{-a}^a \frac{(z+c) \cdot dx'}{r_{|x'=-c}^3} - \int_{-a}^a \frac{(z-c) \cdot dx'}{r_{|x'=c}^3} \right. \\ \left. + \int_{-c}^c \frac{(x+a) dz'}{r_{|x'=-a}^3} - \int_{-c}^c \frac{(x-a) \cdot dz'}{r_{|x'=a}^3} \right]; \quad (8.2)$$

$$B_{xy} = \frac{B_r \cdot \Delta}{4\pi} \int_{-b}^b dy' \left[ \int_{-a}^a \frac{(y-y') \cdot dx'}{r_{|x=c}^3} - \int_{-a}^a \frac{(y-y') \cdot dx'}{r_{|x=-c}^3} \right], \quad (8.3)$$

此处  $r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$ ,  $\Delta = \pm 1$ .  $M_y$  沿  $Y$  的正方向取  $\Delta = 1$ ; 沿  $Y$  的负方向取  $\Delta = -1$ . 从上式可以看出:

当  $x = 0$  时,  $B_{py}(z = -z) = B_{py}(z = z)$ , 亦即  $B_{py}$  沿  $z = 0$  平面左右对称.

当  $z = 0$  时,  $B_{py}(x = -x) = B_{py}(x = x)$ , 亦即  $B_{py}$  沿  $x = 0$  平面前后对称.

同理, 根据矩形磁块的空间对称性, 将(8)、(8.1)(8.2)、(8.3)式中的变量作如下置换:

$$\begin{cases} x \rightarrow x, & y \rightarrow -z, & z \rightarrow -y; \\ a \rightarrow a, & b \rightarrow c, & c \rightarrow b \end{cases}$$

以及

$$\begin{cases} x \rightarrow -y, & y \rightarrow x, & z \rightarrow z \\ a \rightarrow b, & b \rightarrow a, & c \rightarrow c \end{cases}$$

可得到单独由  $M_x$  和  $M_x$  引起的场对点  $P$  的贡献为:

$$\mathbf{B}_{px} = B_{xx}\mathbf{i} + B_{yx}\mathbf{j} + B_{zx}\mathbf{k}; \quad (9)$$

$$\mathbf{B}_{px} = B_{xx}\mathbf{i} + B_{yx}\mathbf{j} + B_{zx}\mathbf{k}. \quad (10)$$

对于由任意值  $\mathbf{M}$  引起的场, 合并(8)、(9)、(10)式得到:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_p &= \mathbf{B}_{px} + \mathbf{B}_{py} + \mathbf{B}_{pz} \\ &= (B_{xx} + B_{xy} + B_{zx})\mathbf{i} + (B_{yx} + B_{yy} + B_{yz})\mathbf{j} \\ &\quad + (B_{zx} + B_{zy} + B_{zz})\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (11)$$

即:  $P$  点的场是单独由  $M_x$ 、 $M_y$ 、 $M_z$  所引起的场的线性矢量迭加.

### 三、测量原理

平面 Wiggler 是由成百上千个矩形磁块周期性排列而成. 由于制造过程中各种因素的影响, 其磁矩分布有很大的离散性, 这种离散性表现在磁矩的大小、空间取向以及磁中心相对于几何中心的偏离上. Wiggler 中的矩形磁块大都采用沿平行于某一边长方向磁化, 例如  $Y$  方向, 此时  $M_x$ 、 $M_z$  相对于  $M_y$  可看做小量, 同时, 磁中心相对于几何中心的偏离 ( $\Delta x$ 、 $\Delta y$ 、 $\Delta z$ ) 也视为小量. 考虑  $M_x$ 、 $M_y$ 、 $M_z$  以及  $\Delta x$ 、 $\Delta y$ 、 $\Delta z$  对  $P$  点  $B_y$  的影响, 由(11)式可得:

$$\begin{aligned} B_y &= B_{yx} + B_{yy} + B_{yz} \\ &= f_1 M_x + f_2 M_y + f_3 M_z, \end{aligned} \quad (12)$$

其中  $f_1$ 、 $f_2$ 、 $f_3$  完全由磁体的几何构形和测量点相对于磁块的几何位置所决定.

假设磁块是均匀磁化, 利用场分布的对称性, 考虑如图 3 所示的 10 个测量点. 图中坐标系的原点取在磁块的几何中心, 坐标轴分别平行于矩形的各棱.  $p_+$ 、 $p_-$  位于  $z = 0$

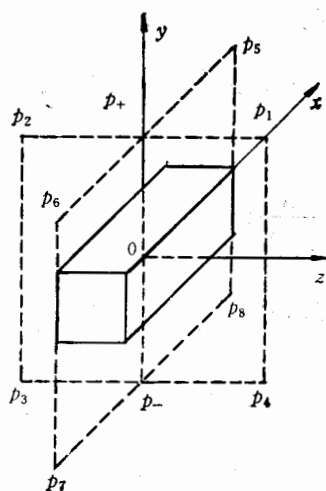


图 3 10 个测量点的位置分布

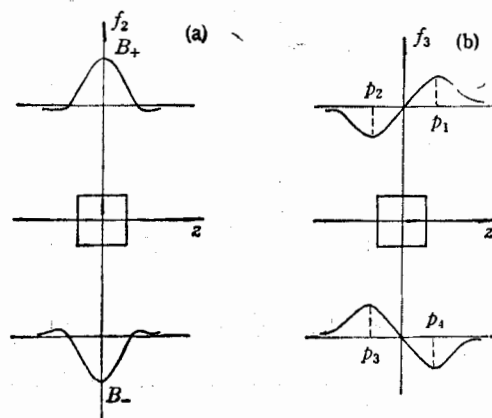


图 4 (a)  $f_2(0, \pm y, z)$  与位置的关系  
(b)  $f_3(0, \pm y, z)$  与位置的关系

平面内的  $y$  轴上,和磁块几何中心等距。 $p_1$ 、 $p_2$ 、 $p_3$ 、 $p_4$  位于  $x = 0$  平面内,  $p_5$ 、 $p_6$ 、 $p_7$ 、 $p_8$  在  $z = 0$  平面内,均对坐标原点呈中心对称分布。仅测量各点处的  $y$  向场分量  $B_y$ 。

首先考虑在  $x = 0$  平面内的测量点,由(8)、(9)、(10)中的  $j$  分量可求得  $f_1 = 0(x = 0)$ ;  $f_2$  和  $f_3$  如图 4(a)、(b) 所示的分布。可看出,  $M_x$  对  $B_y$  的影响为零。以  $\Delta x$ 、 $\Delta y$ 、 $\Delta z$  为小量将(12)式按泰勒级数展开,仅取一次项因子,得到:

$$\begin{aligned}
 B_y(M_y, M_x, \Delta x, \Delta y, \Delta z) = & f_2 M_y + \frac{\partial f_2}{\partial x} \cdot \Delta x \cdot M_y + \frac{\partial f_2}{\partial y} \cdot \Delta y \cdot M_y \\
 & + \frac{\partial f_2}{\partial z} \cdot \Delta z \cdot M_y + f_3 \cdot M_x + \frac{\partial f_3}{\partial x} \cdot \Delta x \cdot M_x \\
 & + \frac{\partial f_3}{\partial y} \cdot \Delta y \cdot M_x + \frac{\partial f_3}{\partial z} \cdot \Delta z \cdot M_x. \quad (13)
 \end{aligned}$$

若取  $p_1$ 、 $p_2$ 、 $p_3$ 、 $p_4$  测量点正好位于  $\frac{\partial f_3}{\partial x} = 0$  的位置上,考虑到在各测量点上,  $\frac{\partial f_2}{\partial x} = 0$ ,

表 1

$f \backslash B$	$B_+$	$B_-$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_+ + B_-$	$B_+ - B_-$	$\frac{(B_1 + B_3)}{-(B_2 + B_4)}$	$\frac{(B_1 + B_4)}{-(B_2 + B_3)}$
$f_2 \cdot M_y$	+	+	+	+	+	+	2+	0	0	0
$\frac{\partial f_2}{\partial y} \cdot \Delta y \cdot M_y$	+	-	+	+	-	-	0	2+	0	0
$\frac{\partial f_2}{\partial y} \cdot \Delta z \cdot M_y$	0	0	+	-	-	+	0	0	0	4+
$f_3 \cdot M_x$	0	0	+	-	+	-	0	0	4+	0
$\frac{\partial f_3}{\partial y} \cdot \Delta y \cdot M_x$	0	0	+	-	-	+	0	0	0	4+

$\frac{\partial f_3}{\partial x} = 0$ , (13) 式中的各项对测量点处  $B_y$  的贡献可列于表 1. “+”、“-”号分别表示该项对测量点场值贡献为正和负, 系数表示贡献的代数和. 由表 1 可以看出:

$$B_+ + B_- = 2f_2 M_y, \quad M_y = \frac{B_+ + B_-}{2f_2}; \quad (14)$$

$$B_+ - B_- = 2 \frac{\partial f_2}{\partial y} \cdot \Delta y \cdot M_y, \quad \Delta y = \frac{B_+ - B_-}{2M_y \cdot \frac{\partial f_2}{\partial y}}; \quad (15)$$

$$(B_1 + B_3) - (B_2 + B_4) = 4f_3 M_x, \quad M_x = \frac{(B_1 + B_3) - (B_2 + B_4)}{4f_3}; \quad (16)$$

$$(B_1 + B_4) - (B_2 + B_3) = 4 \cdot \left( \frac{\partial f_2}{\partial z} \cdot \Delta z \cdot M_y + \frac{\partial f_3}{\partial y} \cdot \Delta y \cdot M_x \right). \quad (17)$$

将(14)、(15)、(16)式中的  $M_y$ 、 $M_x$ 、 $\Delta y$  代入上式可准确地得到  $\Delta z$ . 当  $M_y \gg M_x$  时, 上式化为:

$$\Delta z = \frac{(B_1 + B_4) - (B_2 + B_3)}{4 \cdot M_y \cdot \frac{\partial f_2}{\partial z}}. \quad (18)$$

同理, 若考虑  $z = 0$  平面内的测试点  $p_5$ 、 $p_6$ 、 $p_7$ 、 $p_8$  以及条件  $M_y \gg M_x$ , 类似地得到:

$$M_x = \frac{(B_5 + B_7) - (B_6 + B_8)}{4f_1}; \quad (19)$$

$$\Delta x = \frac{(B_5 + B_8) - (B_6 + B_7)}{4M_y \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x}}. \quad (20)$$

式(14)到(20)是测量磁矩  $M_x$ 、 $M_y$ 、 $M_z$  的大小和磁中心相对几何中心偏离量  $\Delta x$ 、 $\Delta y$ 、 $\Delta z$  的主要公式. 其中  $f_2$  是式(8.2)  $B_{yy}$  中除去  $M_{yy}$  之后的几何因子项;  $f_1$ 、 $f_3$  是式(9)、(10)中  $B_{yx}$  和  $B_{yz}$  项中除去  $M_x$ 、 $M_z$  后所剩之几何因子项.  $\frac{\partial f_2}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial f_2}{\partial y}$ 、 $\frac{\partial f_2}{\partial z}$  是在各测量点上相应的偏导数. 这些系数完全由磁块的几何构形和被测点相对磁块的位置所决定, 与材料的磁特性无关.  $f_1$ 、 $f_2$ 、 $f_3$ 、 $\frac{\partial f_2}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial f_2}{\partial y}$ 、 $\frac{\partial f_2}{\partial z}$  可通过计算机计算得到, 只要测得  $B_+$ 、 $B_-$ 、 $B_1$ 、 $B_2$ 、 $B_3$ 、 $B_4$ 、 $B_5$ 、 $B_6$ 、 $B_7$ 、 $B_8$  10 个磁场值, 即可得到  $M_x$ 、 $M_y$ 、 $M_z$ 、 $\Delta x$ 、 $\Delta y$ 、 $\Delta z$  的值.

#### 四、测量装置和测量结果

图 5(a) 和 (b) 分别是测量系统的方框图及磁测支架示意图. 磁测支架受机械定位机构控制, 保证(b)图上部的霍尔 (Hall) 探头与被测磁体间的准确定位. 高斯计的读数通过并行接口板与计算机相连. 磁测支架上, 有三个精确定位的用于放置被测磁块的定位槽 I、II、III, 其间距为  $d$ . 测量前, 先将霍尔探头定位在中槽 I 正上方某一确定的距离  $h$  处, 并保证探头的测量面严格垂直于  $y$  轴. 测量时, 让被测磁体的充磁方向与  $y$  轴一致, 依

次将该磁体摆放在三个槽中,并读出各位置上高斯计相应的读数。然后,将被测磁体绕  $x$  轴旋转  $180^\circ$ ,再在三个槽的位置上依次摆放该磁体,并读出相应的高斯计读数。由此,获得  $B_1, B_2, B_3, B_4, B_+, B_-$  六个值,最后利用式(14)至(17),求得  $M_y, M_x, \Delta y, \Delta z$  的大小。

由于所用的磁体是  $7.5 \times 7.5 \times 40\text{mm}^3$  的矩形,磁体在  $x$  轴向上的长度为  $40\text{mm}$ ,在  $y$  轴向上的长度为  $7.5\text{mm}$ ,故  $M_x, \Delta x$  对磁场的影响可以忽略。实验中没有测量  $B_5, B_6, B_7, B_8$  的场。

SG-1A 型霍尔效应高斯计测量精度为  $5\%$ ,在  $\pm 0.5\text{T}$  范围内曾以  $0.005\text{T}$  的磁场间隔对该仪器进行定标,然后利用最小二乘法进行拟合,比较理想地克服了霍尔探头磁场值和输出电压的非线性特性和正、反向场不同响应的影响。

磁测支架上的霍尔探头和支架本身均配有定位调节机构。支架上三个定位槽间的位置误差为  $0.02\text{mm}$ 。

用该系统对 997 块  $7.5 \times 7.5 \times 40\text{mm}^3$  的 NdFeB 磁块进行了测量。结果表明,在

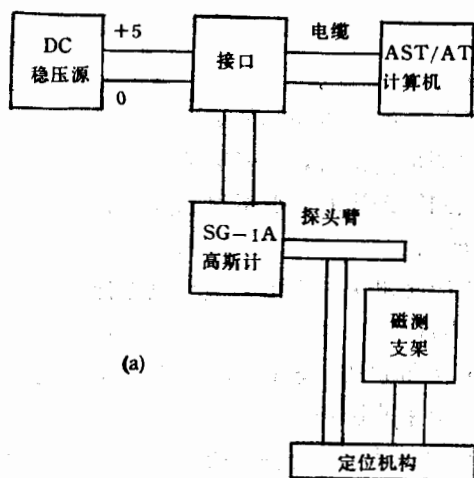


图 5(a) 磁测系统方框图

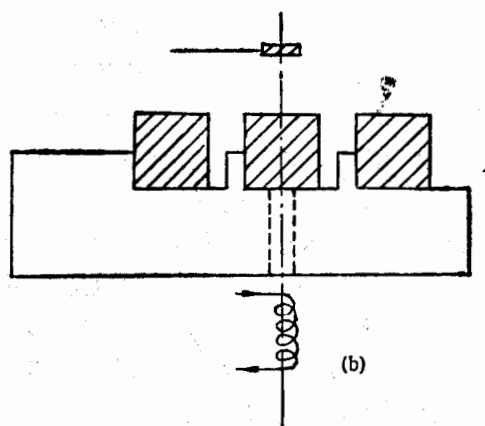
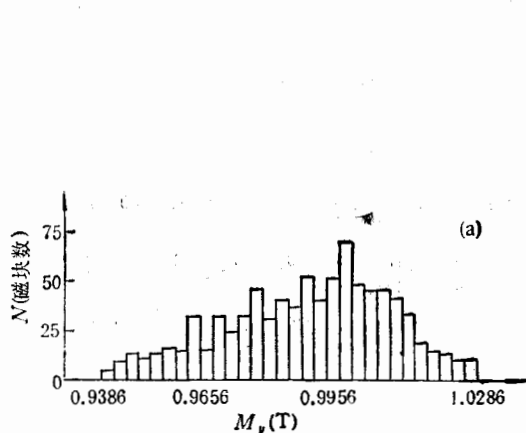
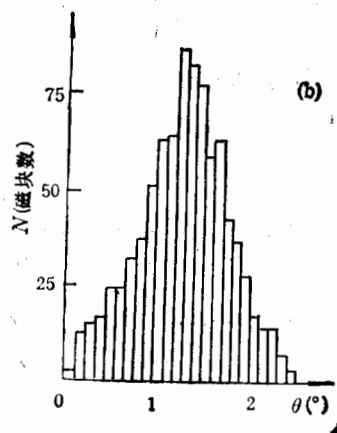


图 5(b) 磁测支架

图 6(a)  $N-M_y$  直方图图 6(b)  $N-\theta$  直方图

恒温条件下,对 0.5T 的磁场,系统的测量重复性优于1‰。对 997 块磁块沿  $y$  轴方向的磁矩  $M_y$  的测量结果如图 6(a) 所示。由  $M_y$  和  $M_x$  换算后得到的磁矩相对  $y$  轴的偏角  $\theta$  (即:  $\text{tg}^{-1} \frac{M_x}{M_y}$ , 忽略了  $M_x$  的影响) 的分布如图 6(b) 所示。从图 6(a)、(b) 可以看出:  $M_y$  与  $\theta$  均可近似地视为对称分布。 $M_y$  在 0.9956T 处有一峰值,  $\theta$  的分布大部分落在  $0^\circ-2^\circ$  之内。

## 五、影响测量精度的因素

通过对图 5 所示的测量系统的分析可看出,除了高斯计(包括霍尔探头和与其配接的二次测量仪表)本身的稳定性和测量精度外,该方法影响磁矩测量精度的主要因素是霍尔探头相对磁块的几何定位误差,特别是当探头相距磁块的距离较小时,定位精度的影响愈加明显。此处,由于被测空间点  $x$  向和  $z$  向场矢量的影响,要准确读出  $y$  向场值,霍尔探头的有效“感应面”不能太大。另外,测量时“感应面”同  $y$  轴的垂直度也有严格的要求。霍尔探头定位时,需要附加的夹具来确定探头“感应面”的取向。

从测量原理上看,在均匀磁化的假定下, NdFeB 磁块本身的机械加工误差直接影响着测量的准确度,尤其是当采用图 5(b) 所示的测量支架时,一般来说,磁块尺寸的加工精度至少应与霍尔探头的定位精度一样。对我们所采用的矩形磁块的尺寸,加工精度为  $-0.02\text{mm}$ , 而霍尔探头的定位误差也为  $0.02\text{mm}$ 。

同其它半导体器件一样,霍尔探头的温度效应是测量过程中必须予以充分注意的问题,适当的恒温是提高系统测量精度必不可少的措施。

NdFeB 磁块具有 1‰ 左右的温度系数。当对大批量磁块进行比较测量时,采用标准块比较的方法可以有效地消除由温度的慢变化所带来的影响。

综上所述,用本文所述的多点测量法确定矩形 NdFeB 磁块的磁矩是个简单易行的方法。曾用此法对北京自由电子激光所用的 Wiggler 中的约 1000 块矩形磁块进行了测量,结果表明该方法是切实可行的,测量重复性优于千分之一,测量精度也比较好。用这种方法测量的数据对 400 块磁块进行优化排列组合后,所组装的 Wiggler 也具有比较满意的磁场效果。

感谢谢家麟教授的指导以及自由电子激光组其他同志的帮助。

## 参 考 文 献

- [1] K. Halbach, *Nucl. Instr. and Meth.*, **187**(1981), 109; *Nucl. Instr. and Meth.*, **169**(1980), 1.
- [2] 刘茂三等,高能物理与核物理, **6**(1982), 764.
- [3] Alfredo Luccio, et al., *Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res.*, **219**(1983), 213.
- [4] R. P. Walker, et al., *J. Physique Coll. Cl*, **45**(1984), 321.
- [5] [美] J. D. 杰克逊著《经典电动力学》,朱培豫译,人民教育出版社,1978 年第一版,上册 p. 214.

## The Determination of Magnetization Vector of NdFeB Rectangular Permanent Magnet Used for Wiggler

HUANG MIN LI YONGGUI WU QINGWU ZHUANG JIEJIA

(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica, Beijing 100039*)

### ABSTRACT

An experimental method used for determining the magnetisation vector of NdFeB rectangular permanent magnet is described. On the supposition that the individual blocks are magnetized uniformly, this method can give not only the magnitude and direction of the magnetisation vector, but also the offsets between the magnetic and geometric center of the blocks.