

# IBM 跨壳激发的玻色子展开厄米途径

邓卫真\*

(中国科学院高能物理研究所,北京 100039)

杨泽森

(北京大学物理系,北京 100871)

## 摘 要

本文借助 Holstein-Primakoff 玻色子展开方法在 IBM 哈密顿量中引入厄米和有限形式的补充项,以描述跨壳激发,并推广内禀凝聚态方法处理闯入态。按照这种理论方法计算了 Sn 核的低能能谱,得到了与实验相符合的振动谱及附加的转动谱。

## 一、引 言

近年来在质子满壳核 Sn 的低能振动谱外,发现了附加的转动带<sup>[1]</sup>。实验表明,这些态不是由价中子激发造成的,因而必须考虑非价质子的 2p-2h 跨壳激发。

这在理论上,要求对 IBM 的观念作相应的扩充,将 2p-2h 跨壳激发看作是一个粒子玻色子和一个空穴玻色子同时激发。由此,唯象的 IBM 组态混合方案能较好地解释跨壳激发现象<sup>[2]</sup>,在微观理论方面也做了许多的工作。

在扩充以玻色子展开和 MJS 代换为基础的理论方案时,可以采用 Dyson 玻色子展开的非厄米途径<sup>[3]</sup>。本文采用 Holstein-Primakoff 玻色子展开方法,在 IBM 哈密顿量中引入厄米和有限的补充项,并推广内禀凝聚态方法,描述了跨壳激发现象和初步计算了 Sn 同位素的低能能谱。

## 二、IBM 跨壳激发的玻色子展开厄米途径

考虑到 Sn 核的非价质子跨壳激发,壳模型组态应包括非价质子能级,即为

$$(i_1^p i_2^p \cdots i_{x_p}^p)^{x_p} (i_1^h i_2^h \cdots i_{x_h}^h)^{x_h} \quad (1)$$

( $x_p, x_p, x_h$  为偶数)。

即有  $x_p$  个处于  $s_p$  条能级的价中子,  $x_p$  个处于  $s_p$  条能级的非价质子粒子和  $x_h$  个处于  $s_h$  条能级的非价质子空穴。对于质子满壳核 Sn, 应有

$$x_p - x_h = 0. \quad (2)$$

本文 1990 年 11 月 28 日收到。  
\* 现地址: 北京大学物理系。

体系的哈密顿量可以写成6部分之和

$$H_f = H_f^{(v)} + H_f^{(p)} + H_f^{(h)} + H_f^{(vp)} + H_f^{(vh)} + H_f^{(ph)}, \quad (3)$$

其中  $H_f^{(v)}$ ,  $H_f^{(p)}$ ,  $H_f^{(h)}$  分别为纯价中子、非价质子粒子和非价质子空穴部分,  $H_f^{(vp)}$ ,  $H_f^{(vh)}$ ,  $H_f^{(ph)}$  则为中子-质子粒子、中子-质子空穴和质子粒子-质子空穴相互作用.  $H_f^{(ph)}$  又可分为保持粒子数及空穴数守恒部分  $H_f^{(ph1)}$  和混合部分  $H_f^{(ph2)}$ , 即

$$H_f^{(ph)} = H_f^{(ph1)} + H_f^{(ph2)}, \quad (4)$$

其中  $H_f^{(v)}$ ,  $H_f^{(p)}$ ,  $H_f^{(h)}$  和  $H_f^{(vp)}$ ,  $H_f^{(vh)}$ ,  $H_f^{(ph1)}$  的具体形式与 IBM2 情形  $H_f^{(v)}$ ,  $H_f^{(p)}$  和  $H_f^{(p)}$  类似<sup>[4]</sup>, 混合部分为

$$H_f^{(ph2)} = \sum_{\substack{\alpha\beta>0 \\ \gamma\delta<0}} P_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(ph2)} [a_\alpha^{(p)+} a_\beta^{(p)+} a_\gamma^{(h)+} a_\delta^{(h)+} + \text{h.c.}], \quad (5)$$

$P_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(ph2)}$  为实数, 且满足

$$P_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(ph2)} = -P_{\beta\alpha\gamma\delta}^{(ph2)} = -P_{\alpha\beta\delta\gamma}^{(ph2)}. \quad (6)$$

根据我们的微观 IBM 理论方案<sup>[4]</sup>, 首先应采用玻色子展开方法把壳模型空间映射到理想玻色子空间, 并找到费米子哈密顿量的玻色子像即玻色子哈密顿量. 采用 Dyson 玻色子展开方法,  $H_f^{(ph2)}$  将得到非厄米的玻色子像<sup>[5]</sup>. 这里我们采用 Holstein-Primakoff 玻色子展开方法以得到厄米的玻色子哈密顿量.

在 Holstein-Primakoff 玻色子展开下, 费米子态矢量  $|\Psi\rangle$  由下式映射为玻色子态矢量  $|\Psi\rangle$

$$|\Psi\rangle = U_M |\Psi\rangle, \quad (7)$$

$$U_M = \langle 0 | \prod_{\sigma=v,p,h} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(2s)! \sqrt{2s-1}} \left( \sum_{\mu\nu} A_{\mu\nu}^{(\sigma)+} a_\nu^{(\sigma)} a_\mu^{(\sigma)} \right)^s | 0 \rangle, \quad (8)$$

$A_{\mu\nu}^{(\sigma)+}$  为玻色子产生算符, 携带两个核子量子数  $\mu\nu$ . 在 Holstein-Primakoff 玻色子展开下, 没有非价质子跨壳激发的费米子态, 其玻色子映像也没有非价质子玻色子激发

$$U_M |\Psi, x_p = x_h = 0\rangle = |\Psi, n_B^{(p)} = n_B^{(h)} = 0\rangle, \quad (9)$$

$n_B^{(\sigma)}$  为  $\sigma$  型玻色子数. 若费米子态包含 2p-2h 跨壳激发, 例如

$$|\Psi, x_p = x_h = 2\rangle = a_\alpha^{(p)+} a_\beta^{(p)+} a_\gamma^{(h)+} a_\delta^{(h)+} |\Psi, x_p = x_h = 0\rangle, \quad (10)$$

则对应玻色子态也激发一个质子粒子玻色子及一个质子空穴玻色子, 即为

$$|\Psi, n_B^{(p)} = n_B^{(h)} = 1\rangle = A_{\alpha\beta}^{(p)+} A_{\gamma\delta}^{(h)+} |\Psi, n_B^{(p)} = n_B^{(h)} = 0\rangle. \quad (11)$$

一个费米子算符  $g$  的玻色子像  $g_B$  按下式定义

$$U_M g = g_B U_M. \quad (12)$$

对于基本算符  $a_\mu^{(\sigma)} a_\nu^{(\sigma)}$ ,  $a_\mu^{(\sigma)+} a_\nu^{(\sigma)}$  和  $a_\mu^{(\sigma)+} a_\nu^{(\sigma)+}$  我们有

$$U_M a_\mu^{(\sigma)} a_\nu^{(\sigma)} = \frac{1}{\sqrt{1 + n_B^{(\sigma)}}} B_{\nu\mu}^{(\sigma)} U_M, \quad (13)$$

$$U_M a_\mu^{(\sigma)+} a_\nu^{(\sigma)} = \left( \sum_\lambda A_{\mu\lambda}^{(\sigma)+} A_{\nu\lambda}^{(\sigma)} \right) U_M, \quad (14)$$

$$U_M a_\mu^{(\sigma)+} a_\nu^{(\sigma)+} = B_{\nu\mu}^{(\sigma)+} \frac{1}{\sqrt{1 + n_B^{(\sigma)}}} U_M. \quad (15)$$

其中

$$\hat{n}_B^{(\sigma)} = \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}^{(\sigma)+} A_{\alpha\beta}^{(\sigma)}, \quad (16)$$

$$B_{\mu\nu}^{(\sigma)+} = A_{\mu\nu}^{(\sigma)+} - \sum_{\lambda\lambda'} A_{\mu\lambda}^{(\sigma)+} A_{\nu\lambda'}^{(\sigma)+} A_{\lambda\lambda'}^{(\sigma)}. \quad (17)$$

由(13)、(14)、(15)式可得费米子哈密顿量的玻色子像

$$U_M H_f = H_B U_M, \quad (18)$$

$$H_B = H_B^{(\nu)} + H_B^{(p)} + H_B^{(h)} + H_B^{(\nu p)} + H_B^{(\nu h)} \\ + H_B^{(ph1)} + H_B^{(ph2)}. \quad (19)$$

(19)式右边各项分别为(3)、(4)式中对应费米子部分的玻色子像

$$U_M H_f^{(\alpha)} = H_B^{(\alpha)} U_M, \quad \alpha = \nu, p, h, \nu p, \nu h, ph1, ph2, \quad (20)$$

其中保持粒子数守恒各项  $H_B^{(\nu)}, H_B^{(p)}, H_B^{(h)}$  及  $H_B^{(\nu p)}, H_B^{(\nu h)}, H_B^{(ph1)}$  与 Dyson 展开时相同, 它们的具体形式与 IBM2  $H_B^{(\nu)}, H_B^{(p)}$  及  $H_B^{(\nu p)}$  类似<sup>[4]</sup>. 利用(13)、(15)可得  $H_f^{(ph2)}$  对应的玻色子像  $H_B^{(ph2)}$

$$H_B^{(ph2)} = \sum_{\substack{\alpha\beta>0 \\ \gamma\delta<0}} P_{\alpha\beta\gamma\delta} \left[ B_{\alpha\beta}^{(\nu p)+} B_{\gamma\delta}^{(h)+} \frac{1}{\sqrt{(1 + \hat{n}_B^{(p)})(1 + \hat{n}_B^{(h)})}} + \text{h.c.} \right], \quad (21)$$

它的展开式是无穷级数, 这里我们不作展开.

适当定义 IBM  $s_\sigma, d_\sigma$  玻色子, 并进行  $s_\sigma, d_\sigma$  子空间截断, 即可得到跨壳激发 IBM 哈密顿量. 作为第一步, 我们仍从  $H_B^{(\sigma)}$  出发, 用最低能量单玻色子态定义  $s_\sigma, d_\sigma$  玻色子<sup>[4]</sup> 这样得到的截断哈密顿量为

$$h = h^{(\nu)} + h^{(p)} + h^{(h)} + h^{(\nu p)} + h^{(\nu h)} \\ + h^{(ph1)} + h^{(ph2)}, \quad (22)$$

其中  $h^{(\nu)}, h^{(p)}, h^{(h)}$  和  $h^{(\nu p)}, h^{(\nu h)}, h^{(ph1)}$  的形式及系数求法均与 IBM2 时类似<sup>[4]</sup>. 而由混合部分  $H_B^{(ph2)}$  得到的  $h^{(ph2)}$  即为描述跨壳激发的补充项, 它的形式为

$$h^{(ph2)} = \{u_1 s_p^+ s_h^+ + u_2 (d_p^+ d_h^+)_0 + \text{高阶项}\} \\ \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 + \hat{N}_p)(1 + \hat{N}_h)}} + \text{h.c.}, \quad (23)$$

其中

$$\hat{N}_\sigma = s_\sigma^+ s_\sigma + \sum_m d_{m\sigma}^+ d_{m\sigma}, \quad (24)$$

$$u_1 = (0 | s_p s_h H_B^{(ph2)} | 0), \quad (25)$$

$$u_2 = (0 | (d_p d_h)_0 H_B^{(ph2)} | 0). \quad (26)$$

对于  $S_n$ , 若仅考虑 2p-2h 跨壳激发, 则有

$$(\Psi, N_p = N_h = 1 | h^{(ph2)} | \Psi, N_p = N_h = 0) \\ = (\Psi, N_p = N_h = 1 | h_{\text{eff}}^{(ph2)} | \Psi, N_p = N_h = 0), \quad (27)$$

即  $h^{(ph2)}$  等效于

$$h_{\text{eff}}^{(ph2)} = \{u_1 s_p^+ s_h^+ + u_2 (d_p^+ d_h^+)_0\} + \text{h.c.}. \quad (28)$$

这样我们就得到了有限且厄米的跨壳激发补充项(28), 它在形式上与唯象组态混合 IBM

相似<sup>[2]</sup>。

### 三、用内禀凝聚态描述跨壳激发闯入态

在求解跨壳激发 IBM 时,只考虑 2p-2h 跨壳激发,对于  $S_n$  核,对  $N_p, N_h$  有如下限制:

$$N_p = N_h = 0 \text{ 或 } 1. \quad (29)$$

i)  $N_p = N_h = 0$

没有非价质子的跨壳激发,只有  $N_p$  个价中子玻色子,我们可以方便地使用 IBM1 振动极限  $SU(5)$  波函数为基矢。

ii)  $N_p = N_h = 1$

激发一个质子空穴玻色子和一个质子粒子玻色子。实验上所发现的附加转动带主要由它们构成,我们用内禀凝聚态来描述这种具有一定形变的附加转动带<sup>[5]</sup>

$$|g\rangle = (N_p!)^{-\frac{1}{2}} (b_p^\dagger)^{N_p} b_p^\dagger b_h^\dagger |0\rangle, \quad (30)$$

$$b_\sigma^\dagger = \frac{1}{\sqrt{1 + \beta_\sigma^2}} (s_\sigma^\dagger + \beta_\sigma d_{\sigma\sigma}^\dagger) \quad \sigma = p, h, \quad (31)$$

$\beta_\sigma$  由下面变分方程决定

$$\begin{cases} \delta E = 0, \\ E = \langle g | H | g \rangle. \end{cases} \quad (32)$$

我们暂不考虑凝聚态的内禀激发所带来的修正。由  $|g\rangle$  投影出具有确定角动量的态  $|g, I M\rangle$ , 将其与  $N_p = N_h = 0$  的纯中子 IBM1 空间一起对角化跨壳激发 IBM 哈密顿量,即可求得体系的低能能谱及波函数。

### 四、 $S_n$ 同位素的数值计算

我们计算了  $A = 112-118$   $S_n$  偶同位素。壳模型单粒子能级见表1、表2,我们尽量保持单粒子能量不随  $A$  变动,或只有缓慢的变化。同类核子之间相互作用仍选为对力、四

表 1  $^{112-118} S_n$  中子单粒子能量(单位: MeV)

$A$ \ $nlj$	$1h \frac{11}{2}$	$2d \frac{3}{2}$	$3s \frac{1}{2}$	$1g \frac{7}{2}$	$2d \frac{5}{2}$
112	6.1	5.5	4.9	4.45	4.0
114	6.1	5.5	4.9	4.35	4.0
116	6.1	5.5	4.9	4.35	4.0
118	6.1	5.5	4.9	4.35	4.0

极对力和四极-四极力,中子-质子相互作用仍为四极-四极力<sup>[6]</sup>。相互作用强度参数见表3,由于我们仅取了质子满壳下子壳层  $1g \frac{9}{2}$  一个能级,因此有关质子的有效相互作用参数

表 2  $^{112-118}\text{Sn}$  质子单粒子能量(单位: MeV)

$A$ \ $nlj$	$1h\frac{11}{2}$	$2d\frac{3}{2}$	$3s\frac{1}{2}$	$1g\frac{7}{2}$	$2d\frac{5}{2}$	$1g\frac{9}{2}$
112	6.8	6.0	5.3	4.3	4.0	0.2
114	6.8	6.0	5.4	4.3	4.0	0.1
116	6.8	6.0	5.5	4.3	4.0	0.0
118	6.8	6.0	5.5	4.3	4.0	0.0

注: 满壳上与满壳下能级用双竖线分开, 壳间能隙为  $\varepsilon_{1d\frac{5}{2}} - \varepsilon_{1g\frac{9}{2}} \approx 4.0\text{MeV}$ .

表 3  $^{112-118}\text{Sn}$  相互作用强度参数(单位: MeV)

$g_v$	$G'_v$	$K'_v$	$g_\pi$	$G'_\pi$	$K'_\pi$	$K'_{\pi\nu}$
0.043	0.011	0.010	0.056	0.085	0.100	0.100

比较大。表 4, 表 5 为求得的 IBM 参数。对于质子部分参数, 由于式(29)的限制, 我们只需要单玻色子能量  $E_s, E_d$ 。

表 4  $^{116}\text{Sn}$  跨壳激发 IBM 质子参数(单位: MeV)

	$E_s$	$E_d$	$T_2$	$T_4$	$u_1$	$u_2$
p	5.554	6.240	4.683	0.709	1.782	-1.118
h	-1.003	-0.278	3.416	0.704		

注: p, h 分别代表粒子玻色子、空穴玻色子部分参数,  $E_s, E_d, T_2, T_4$  具体定义见文献[4]。

表 5  $^{116}\text{Sn}$  跨壳激发 IBM 中子参数(单位: MeV)

$E_d - E_s$	$c_0$	$c_2$	$c_4$	$\nu_1$	$\nu_2$	$\nu_3$	$\nu_4$	$T_2$	$T_4$
1.421	-0.280	-0.050	-0.045	-0.090	-0.047	-0.027	-0.078	2.954	-0.325

注: 各参数具体定义见文献[4]。

图 1 为能级理论计算与实验的比较图。理论计算再现了所有低能集体态, 同时得到了振动态和附加的转动态, 但在量上的符合还有一定差距。

我们还计算了  $^{116}\text{Sn}$  的 E2 电磁跃迁。跨壳激发 IBM 电磁跃迁算符为

$$T_{2\mu} = e_\nu Q_{2\mu}^{(\nu)} + e_\pi (Q_{2\mu}^{(\pi)} + Q_{2\mu}^{(h)}), \quad (33)$$

四极矩  $Q_{2\mu}^{(\sigma)}$  为相应费米子四极矩的玻色子像<sup>[4]</sup>

$$Q_{2\mu}^{(\sigma)} = T_2^{(\sigma)}(d_{\mu\sigma}^+ s_\sigma + s_\sigma^+ d_{\mu\sigma}) / \sqrt{5} + \sqrt{5} T_4^{(\sigma)}(d_\sigma^+ d_\sigma)_{2\mu}, \quad (34)$$

有效电荷取为

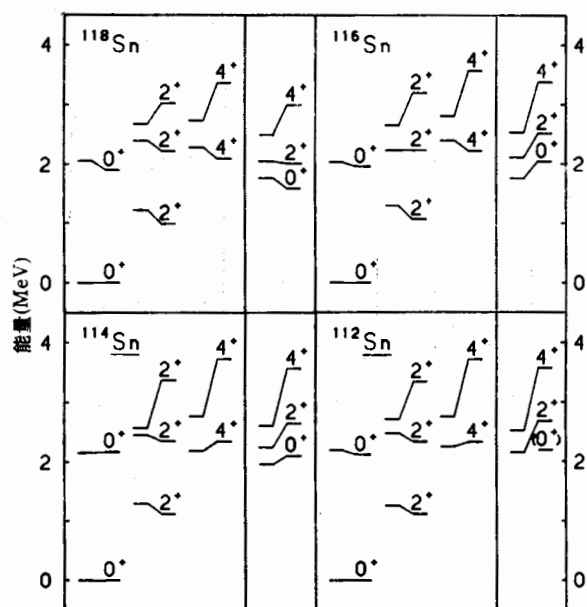


图1  $^{112-118}\text{Sn}$  能级理论计算值与实验值比较  
 左边为实验值,右边为理论计算值,振动能级与转动能级之间用竖线隔开。实验值取自文献[1,7]

$$e_v = 0.37, e_\pi = 0.93. \quad (35)$$

计算结果见表6。得到了实验上转动带内  $4_1^+ \rightarrow 2_1^+, 2_2^+ \rightarrow 0_1^+$  大的跃迁几率,以及由正常态与闯入态波函数相互混合所引起的大带际跃迁  $2_1^+ \rightarrow 0_2^+, 0_1^+ \rightarrow 2_1^+$ 。  $4_1^+ \rightarrow 2_1^+$  理论值比实验值小很多,是因为理论计算  $4_1^+$  中闯入态成份不够。

表6  $^{116}\text{Sn}$  E2 电磁跃迁理论计算值与实验值比较(单位: W.u.)

$J_i^+ \rightarrow J_f^+$	EXP.	CAL.	$J_i^+ \rightarrow J_f^+$	EXP.	CAL.
$2_1^+ \rightarrow 0_1^+$	13.	11.	$0_1^+ \rightarrow 2_1^+$	17.	18.
$2_2^+ \rightarrow 0_1^+$	0.06	2.6	$0_2^+ \rightarrow 2_1^+$	0.5	1.5
$\rightarrow 0_2^+$	26.	12.	$4_1^+ \rightarrow 2_1^+$	23.	11.
$\rightarrow 0_3^+$	32.	34.	$\rightarrow 2_2^+$	60.	0.67
$\rightarrow 2_1^+$	4.0	6.4	$\rightarrow 2_3^+$	<2	1.0
$2_3^+ \rightarrow 0_1^+$	0.05	0.18	$4_2^+ \rightarrow 2_1^+$	<0.003	1.0
$\rightarrow 0_2^+$	0.7	0.04	$\rightarrow 2_2^+$	>17.	34.
$\rightarrow 0_3^+$	<2	10.	$\rightarrow 2_3^+$	>0.3	0.77
$\rightarrow 2_2^+$	5.	13.			
$\rightarrow 2_3^+$	<3	13.			

注: 实验数据取自文献[6],  $0_1^+, 2_1^+, 4_1^+$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 依实验能量从小往大排列。

## 五、小 结

我们将理论形式加以扩充来描述跨壳激发现象,同时为了保持玻色子哈密顿量的厄

米性,采用了 Holstein-Primakoff 展开。

我们根据得到的跨壳激发 IBM 哈密顿量,推广内禀凝聚态方法,计算了 Sn 偶同位素的低能能谱,同时得到了振动能谱及附加的转动能谱,定性解释了 Sn 核的跨壳激发现象。我们还计算了  $^{116}\text{Sn}$  的 E2 电磁跃迁,得到了与实验相近的结果。

### 参 考 文 献

- [1] J. Bron, W. H. A. Hesselink, A. Van Poelgeest, et al., *Nucl. Phys.*, **A318** (1979),335.
- [2] P. D. Duval and B. R. Barrett, *Phys. Lett.*, **100B**(1981), 223.
- [3] 潘武明,刘庸和齐辉,高能物理与核物理, **14**(1990),49.
- [4] Yang Zesen, Liu Yong and Qi Hui, *Nucl. Phys.*, **A421** (1984), 297c; 杨泽森, 高能物理与核物理, **9**(1985),341.
- [5] Yang Zesen, Qi Hui, Yiu Yong and Deng Weizhen, International Symposium on Particle and Nuclear Physics, 1985 (Beijing).
- [6] A. Backlin, N. G. Jonsson, R. Julin, et al., *Nucl. Phys.*, **A351**(1981), 490.
- [7] Nuclear Data Sheets, **57**(1989), 443; **60**(1990), 139; **59**(1990), 333; **51**(1987), 329.

## Hermitian Boson Expansion Approach of IBM Toward Cross Shell Excitations

DENG WEIZHEN

(Institute of High Energy Physics, Beijing 100039)

YANG ZESEN

(Department of Physics, Peking University, Beijing 100871)

### ABSTRACT

By the Holstein-Primakoff boson expansion, an hermitian supplementary term with finite form is introduced into the IBM hamiltonian to describe the cross shell excitations. The method of intrinsic condensate is generalized to treat the intruder states. According to this scheme, the low-lying spectra of the Sn isotopes are calculated. Both the vibrational spectra and the additional rotational spectra are obtained.