第16卷 第5期　　高能物理与核物理　　Vol. 16, No. 5
1992年5月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　May, 1992

$SU_q(2)$ 代数的广义量子相干态表示

于　祖　荣
（同济大学物理系，上海 200092）

摘　　要

本文给出了 $SU_q(2)$ 代数的广义量子相干态表示，并指出由此可以得到 $SU_q(2)$ 的一个新的 Boson 实现，这样的 Boson 实现是广义的 q-Dyson 实现，但这类实现是不厄米的，可以引入一个新的变换使之变为厄米的。这种变换后的实现可以称为 q-Holstein-Primakoff 实现。我们找出了这样的变换矩阵。文中也指出这种方法推广到高阶群似乎不很容易。

一、引　　言

最近一个时期，在数学和物理两类文献上对量子群有着广泛讨论。从数学观点看，目前普遍感兴趣的量子群（量子代数）是一种特殊的 Hopf 代数，Drinfeld[1] 称它为准三角（Quasi-triangular）Hopf 代数。在物理上，至今虽不能说已有了满意的解释和应用，但人们（包括核物理学家在内[2,4]）正在积极地探索。在这些文献上列举的例子可能还是有问题的，因为量子代数 SU_q（2）毕竟不是描述普通三维空间的转动对称性，因此它的 Casimir 算子的本征值本质上不是描写普通三维转动激发的量子数。但是反过来看，既然 $SU_q(2)$ 方案能给出经验的两参数 $I(I+1)$ 公式，说明 $SU_q(2)$ 可以作为描述原子核的某种集体运动的模型，而完全不必与"转动"拉在一起。由此可见深入开拓量子群在核物理上的应用，对了解原子核的运动模式以及量子群的物理内涵都是有意义的。

本文撇开了物理，主要侧重于数学。我们拟将普通 Lie 代数的广义相干态理论[5,6]推广到量子群 $SU_q(2)$ 上，但对更高阶群，我们发现这种推广是有困难的。

在第二节，先扼要介绍量子代数 $SU_q(2)$；第三节要定义 q 自旋相干态，以及讨论它的主要性质，指出 q 自旋算符的相干态实现，就是广义的 q-Dyson 实现；第四节将讨论 q-Dyson 实现到 q-Holstein-Primakoff 实现的变换，并指出用类似手段推广到高阶群是困难的。

二、量子代数 $SU_q(2)$

量子代数 $SU_q(2)$ 由 $J_0, J_\pm$ 三个元素组成，满足下列对易关系：

本文 1991 年 5 月 15 日收到。

$$[J_0, J_\pm] = \pm J_\pm, \quad [J_+, J_-] = [2J_0], \tag{1}$$

这里

$$[x] = (q^x - q^{-x})/(q - q^{-1}) = [x]_{q\to q^{-1}}, \tag{2}$$

x 是数或算符. 在 $q \to 1, SU_q(2) \to SU(2)$. 此外 $SU_q(2)$ 是一个 Hopf 代数，它的 Hopf 代数结构如下:

余积 (Coproduct):
$$\begin{aligned} &\Delta(J_0) = J_0 \otimes 1 + 1 \otimes J_0, \\ &\Delta(J_\pm) = J_\pm \otimes q^{J_0} + q^{-J_0} \otimes J_\pm, \\ &\Delta(1) = 1 \otimes 1. \end{aligned} \tag{3a}$$

对极 (Antipode or Coinverse):
$$\begin{aligned} &S(J_0) = -J_0, \\ &S(J_\pm) = -q^{\pm 1} J_\pm. \end{aligned} \tag{3b}$$

余单位 (Counit):
$$\begin{aligned} &\varepsilon(J_0) = \varepsilon(J_{\pm 1}) = 0, \\ &\varepsilon(1) = 1. \end{aligned} \tag{3c}$$

只要 q 不是单位根，SU_q (2) 的有限维表示有普通 Lie 代数表示的相同结构. 令 $|jm\rangle$ 是表示空间的基,即

$$J_0 |jm\rangle = m |jm\rangle, \tag{4a}$$

$$J^2 |jm\rangle = \begin{cases} [j][j+1] |jm\rangle, & j = \text{整数} \\ \left[j + \frac{1}{2}\right]^2 |jm\rangle, & j = \text{半整数} \end{cases} \tag{4b}$$

这里 J^2 是 $SU_q(2)$ 的 Casimir 算子[7,8]

$$J^2 = \begin{cases} J_- J_+ + [J_0][J_0 + 1], & \text{对应 } j = \text{整数} \quad (5a) \\ J_- J_+ + \left[J_0 + \frac{1}{2}\right]^2, & \text{对应 } j = \text{半整数} \quad (5b) \end{cases}$$

由(1)和(4)式,立即可得

$$J_\pm |jm\rangle = \sqrt{[j \mp m][j \pm m + 1]}\, |jm \pm 1\rangle. \tag{6}$$

在文献上,经常给出 $SU_q(2)$ 的 q-Schwinger 玻色实现,令 $a_i^+, (a_i, i = 1,2)$ 是两个独立的 q 玻色子的产生(消灭)算符. 满足

$$[N_i, a_j^+] = \delta_{ij} a_j^+, [N_i, a_j] = -\delta_{ij} a_j, i, j = 1, 2 \tag{7a}$$

$$a_i a_i^+ - q a_i^+ a_i = q^{-N_i} \text{ 或 } a_i a_i^+ - q^{-1} a_i^+ a_i = q^{N_i}, i = 1, 2 \tag{7b}$$

这里 N_i 是数算符,但 $N_i \neq a_i^+ a_i$, 而 Fock 空间的基为

$$|n_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{[n]!}} (a_i^+)^n |0\rangle, \tag{8}$$

其中

$$[n]! = [n][n-1] \cdots [2][1], \tag{9}$$

以及

$$a_i |0\rangle = 0, \tag{10}$$

$|0\rangle$ 是 q 玻色子真空态.

从这些 q 玻色子算符,容易给出 $J_0, J_\pm$ 的 q-Schwinger 实现

$$J_0=\frac{1}{2}(N_1-N_2),\quad J_+=a_1^+a_2, J_-=a_1a_2^+ \tag{11}$$

以及

$$|jm\rangle=\frac{(a_1^+)^{j+m}(a_2^+)^{j-m}}{\sqrt{[j+m]![j-m]!}}|0\rangle, \tag{12}$$

这里

$$a_1|0\rangle=a_2|0\rangle=0. \tag{13}$$

三、q 自旋相干态

现在定义非归一的 q 自旋相干态

$$|Z\rangle=e_q(Z^*J_-)|jj\rangle, \tag{14}$$

这里 $|jj\rangle$ 是最高权态，从(6)式知

$$J_+|jj\rangle=0, \tag{15}$$

而 $e_q(x)$ 是 q 指数函数，定义为[9]

$$e_q(x)=\sum_n x^n/[n]!, \tag{16}$$

用等式

$$[2j]+[2j-2]+[2j-4]+\cdots+[2j-n+2]=[n][2j-n+1], \tag{17}$$

相干态(14)式可重新写作

$$|Z\rangle=\sum_{n=0}^{2j}(Z^*)^n\sqrt{[2j]!/[n]![2j-n]!}\,|j,j-n\rangle, \tag{14'}$$

其中

$$|j,j-n\rangle=\sqrt{[2j-n]!/[2j]![n]!}\,J_-^n|jj\rangle. \tag{18}$$

从(14′)容易知道

$$\langle Z'|Z\rangle=\sum_{n=0}^{2j}(Z^*Z')^n\frac{[2j]!}{[2j-n]![n]!}, \tag{19}$$

定义

$$(1+Z^*Z')_q^{2j}=\sum_{n=0}^{2j}(Z^*Z')\frac{[2j]!}{[2j-n]![n]!}, \tag{20}$$

则相干态(14)的归一因子 $\mathscr{N}$ 为

$$\mathscr{N}^{-1}=(1+|Z|^2)_q^{2j}, \tag{21}$$

注意 $(1+|Z|^2)_q^m$ 与普通函数 $(1+|Z|^2)^m$ 是完全不同的.

类似普通的自旋相干态，对 q 自旋相干态(14)也存在单位算符分解：

$$I=\int|Z\rangle\langle Z|\mathrm{d}_q\mu(Z), \tag{22}$$

这里相干态测度 $\mathrm{d}_q\mu(Z)$ 定义为

$$d_q\mu(Z)=\frac{[2j+1]}{2\pi}(1+|Z|^2)_q^{-2j-2}d_q(|Z|^2)d\theta, \tag{23}$$

注意(23)式对θ的积分是普通积分，而对 $|Z|^2$ 的积分是所谓q积分，q积分是q微分[9]的逆操作，q微分由下式定义

$$\frac{d}{d_qx}f(x)=\frac{f(qx)-f(q^{-1}x)}{qx-q^{-1}x}, \tag{24}$$

用分部积分的办法，我们可以得到下列q积分

$$\int x^n(1+x)^{-m}d_qx=\frac{q^{-n}[n]}{[m-1]}\int x^{n-1}(1+x)_q^{-m+1}d_qx$$

$$=\frac{q^{-n}[n]q^0}{[m-1]}\cdot\frac{q^{-n+1}[n-1]q}{[m-2]}\cdots\frac{q^{-1}[1]q^{n-1}}{[m-n]}\int(1+q^{-n}x)_q^{-m+n}d_qx,$$

又因

$$\int(1+q^{-n}x)_q^{-m+n}d_qx=q^n/[m-n+1],$$

于是我们有

$$\int x^n(1+x)_q^{-m}d_qx=\frac{[n]![m-n-2]!}{[m-1]!}, \tag{25}$$

这是通常的β函数的q类似，使用(25)式我们立即可以验证(22)式是正确的。

用(22)式，我们可以将任一态矢量 $|\phi\rangle$ 写成

$$|\phi\rangle=\int|Z\rangle\langle Z|\phi\rangle d_q\mu(Z)=\int|Z\rangle\phi(Z)d_q\mu(Z), \tag{26}$$

这里

$$\phi(Z)=\langle Z|\phi\rangle, \tag{27}$$

是态矢量的泛函实现，因此两个态矢量 $|\phi_1\rangle$ 和 $|\phi_2\rangle$ 的标积可写作

$$\langle\phi_1|\phi_2\rangle=\int\phi_1^*(Z)\phi_2(Z)d_q\mu(Z)\equiv\langle\phi_1(Z)|\phi_2(Z)\rangle, \tag{28}$$

显然

$$\phi_{jn}(Z)=\langle Z|j,j-n\rangle=\sqrt{[2j]!/[n]![2j-n]!}\,Z^n, \tag{29}$$

以及

$$\phi_{jj}(Z)=\langle Z|jj\rangle=1. \tag{30}$$

用(22)式我们也可给出任一算符 $\hat{O}$ 的q自旋相干态实现

$$|\phi\rangle=\hat{O}|\phi\rangle\to\phi(Z)=\mathscr{O}\phi(Z), \tag{31a}$$

这里 $\mathscr{O}$ 由下式定义

$$\langle Z|\hat{O}|Z'\rangle=\mathscr{O}\langle Z|Z'\rangle. \tag{31b}$$

从定义(31)，我们立即可以得到

$$\mathscr{T}_+=\partial_q,\ \mathscr{T}_0=j-Z\partial,\ \mathscr{T}_-=Z[2j-Z\partial]. \tag{32}$$

从现在起，为书写方便，我们定义两个简写符号：$\partial=\frac{\partial}{\partial Z}$，普通微分；$\partial_q=\frac{\partial}{\partial_qZ}$，$q$微分．用(32)和(29)式容易验证

$$\mathscr{T}_+\psi_{jn}(Z)=\sqrt{[n][2j-n+1]}\psi_{jn-1}(Z), \tag{33a}$$

$$\mathscr{T}_-\psi_{jn}(Z)=\sqrt{(n+1)[2j-n]}\psi_{jn-1}(Z), \tag{33b}$$

$$\mathscr{T}_0\psi_{jn}(Z)=(j-n)\psi_{jn}(Z), \tag{33c}$$

如果令(33)式中的 $n=j-m$,(33)式即为(6)和(4a)式.

对于测度(23),我们可以证明 $\psi_{jn}(Z)$ 是正交归一的. 算符 $\mathscr{T}_0,\mathscr{T}_\pm$ 是厄米的,即 $\mathscr{T}_0^+=\mathscr{T}_0$, $\mathscr{T}_-^+=\mathscr{T}_+$. 现在如果在 Z 空间重新定义测度

$$d_q\mu(Z)_B=\frac{1}{2\pi}e_q(-|Z|^2)d_q(|Z|^2)d\theta, \tag{34}$$

称为 q-Bargmann 测度. 则容易验证对此新测度 $\psi_{jn}(Z)$ 不再正交归一了. 此时正交归一基矢量是

$$\chi_n(Z)=Z^n/\sqrt{[n]!}, \tag{35}$$

对于测度(34)还可验证算符 Z 和 ∂_q 满足

$$Z^+=\partial_q, \tag{36}$$

所以对新测度,算符 $\mathscr{T}_0,\mathscr{T}_\pm$ 将是部分非厄米数,即 $\mathscr{T}_-^+\neq\mathscr{T}_+$, 但 $\mathscr{T}_0^+=\mathscr{T}_0$. 这种部分非厄米性的根源是基矢 $\psi_{jn}[Z]$ 对测度(34)的非正交归一性. 所以可以指望找到一个变换,使变换后的 $\psi_{jn}(Z)$ 是正交归一的,则相应的,变换后的算符 $\mathscr{T}_0,\mathscr{T}_\pm$ 将恢复为厄米的了.

在给出变换之前,我们来讨论 $SU_q(2)$ 代数一种新的玻色实现. 为此首先注意到

$$(\partial_qZ-qZ\partial_q)\chi_n(Z)=q^{-n}\chi_n(Z), \tag{37}$$

由于 $\{\chi_n(Z)\}$ 是完备的,所以(37)式对任一 Z 的解析函数均成立,于是有

$$\partial_qZ-qZ\partial_q=q^{-Z\partial}, \tag{38}$$

结合(36)和(38)式,我们可以定义一组 q 玻色算符 a^+ 和 a,满足

$$[\hat{N},a^+]=a^+,\ [\hat{N},a]=-a, \tag{39a}$$

$$aa^+-qa^+a=q^{-\hat{N}}, \tag{39b}$$

这里 $\hat{N}$ 是玻色数算符,但 $\hat{N}\neq a^+a$, 使这组玻色算符与 Z 和 ∂_q 有下列对应

$$Z\to a^+,\partial_q\to a,Z\partial\to\hat{N}, \tag{40}$$

以及

$$\chi_n(Z)\to\frac{1}{\sqrt{[N]!}}(a^+)^n|0)\equiv|n\rangle, \tag{41}$$

$|0)$(以下均用圆括表示 q 玻色态)是 q 玻色真空态,满足

$$a|0)=0, \tag{42}$$

显然

$$\psi_{jj}(Z)=|0), \tag{43}$$

于是

$$\mathscr{T}_+\to\mathscr{T}_+^{(D)}=a, \tag{44a}$$

$$\mathscr{T}_-\to\mathscr{T}_-^{(D)}=a^+[2j-\hat{N}], \tag{44b}$$

$$\mathscr{T}_0\to\mathscr{T}_0^{(D)}=j-\hat{N}, \tag{44c}$$

可以称 $\mathscr{T}_0^{(D)},\mathscr{T}_\pm^{(D)}$ 为 $SU_q(2)$ 的 q-Dyson 实现,与 q-Schwinger 实现不同,现在只

有一个 q 玻色算符.

四、q-Holstein-primakoff 实现

(32)式或(44)式中的 $\mathscr{T}_0, \mathscr{T}_\pm$ 或 $\mathscr{T}_0^{(D)}, \mathscr{T}_\pm^{(D)}$ 的非厄米性可以引入一个相似变换使之变成厄米的.

$$\mathscr{T}_0 = V^{-1}\mathscr{T}_0 V, \tag{45a}$$

$$\mathscr{T}_\pm = V^{-1}\mathscr{T}_\pm V, \tag{45b}$$

因为 $\mathscr{T}_0$ 本身已是厄米的,见(32)式. 所以可以选择 V 使它与 $\mathscr{T}_0$ 对易,即是说对于量子数 n, V 是对角的,由于要求

$$\begin{aligned}\mathscr{T}_- = (\mathscr{T}_+)^+ = (V^{-1}\mathscr{T}_+ V)^+ = V^+(\mathscr{T}_+^+)(V^{-1})^+ \\ = V^+ Z (V^{-1})^+,\end{aligned} \tag{46}$$

以 V 乘上式左右两边,并假定 $V^+ = V$ 和用(45)式,即得

$$\mathscr{T}_- V^2 = V^2 Z, \tag{47}$$

以(35)式中的 $\chi_n(Z)$ 在右边, $\chi_{n+1}(Z)$ 在左边,取上式的矩阵元可得

$$V_{n+1}/V_n = \sqrt{[2j-n]}, \tag{48}$$

这里 $V_n \equiv V_{n,n}$. 以 $V_0 = 1$ 开始则有

$$V_n = \sqrt{[2j]!/[2j-n]!}, \tag{49}$$

于是由(46)式我们立即可得

$$\begin{aligned}(\chi_{n+1}(Z)|\mathscr{T}_-|\chi_n(Z)\rangle = V_{n+1}/V_n\langle\chi_{n+1}(Z)|Z|\chi_n(Z)\rangle \\ = \sqrt{[n+1][2j-n]},\end{aligned} \tag{50a}$$

以及

$$\langle\chi_n(Z)|\mathscr{T}_+|\chi_{n+1}(Z)\rangle = \langle\chi_{n+1}(Z)|\mathscr{T}_-|\chi_n(Z)\rangle^*, \tag{50b}$$

和

$$\langle\chi_n(Z)|\mathscr{T}_0|\chi_n(Z)\rangle = j-n. \tag{50c}$$

于是

$$\mathscr{T}_0 = j - \hat{N}, \tag{51a}$$

$$\mathscr{T}_+ = \sqrt{[2j-N]}\partial_q, \tag{51b}$$

$$\mathscr{T}_- = Z\sqrt{[2j-\hat{N}]}, \tag{51c}$$

或者写成

$$\mathscr{T}_0 \to \mathscr{T}_0^{(HP)} = j - \hat{N}, \tag{52a}$$

$$\mathscr{T}_+ \to \mathscr{T}_+^{(HP)} = \sqrt{[2j-N]}a, \tag{52b}$$

$$\mathscr{T}_- \to \mathscr{T}_-^{(HP)} = a^+\sqrt{[2j-\hat{N}]}, \tag{52c}$$

(52)式可以称作 $SU_q(2)$ 的 q-Holstein-Primakoff 表示.

显然现在的方法可用到量子代数 $SU_q(1,1)$ 上,其结果是相似的. 但从上面的讨论

可以看出，若将这个方法推广到更高阶的量子群上去是有困难的，若改用矢量相干态方法[10,11]对于低阶群则手续更简单[12]，但对高阶群似乎同样也是困难的。

此工作部分由国家自然科学基金支持。感谢叶家琛教授的有益的帮助。

参　考　文　献

[1] V. G. Drienfeld, In Proceeding of Inter. Congress of Math. (MSRI, Berkely 1988) p. 798.
[2] P. P. Paychev, et al., *J. Phys.*, **G16**(1990), L137.
[3] D. Bonatsos, et al., *Phys. Lett.*, **B251**(1990), 477.
[4] J. Meng, C. S. Wu & J. Y. Zeng As-ITP-91-06.
[5] J. Dobaczewski, *Nucl. Phys.*, **A369**(1981), 213, 237.
[6] Zurong Yu *J. Phys.*, **A23**(1990), L939.
[7] T. L. Curtright, et al., *Phys. Lett.*, **B243**(1990), 237.
[8] Zurong Yu, *J. Phys.*, **A24**(1991), L399.
[9] R. W. Gray, et al., *J. Phys.*, **A23**(1990), L945.
[10] K. T. Hecht, *Lec. Notes in Phys.*, Vol. **290**(1987), p. 1.
[11] D. J. Rowe, *Rep. Prog. Phys.*, **48**(1985), 1419.
[12] Pan Feng *Chinese Phys. Lett.*, **8**(1991), 56.

The Generalized q-Coherent State Representation of the Quantum Algebra $SU_q(2)$

Yu Zurong

(*Department of Physics, Tongji University, Shanghai* 200092)

Abstract

The generalized q-coherent state of the quantum group $SU_q(2)$ is defined. The q-coherent state realization of the quantum algebra $SU_q(2)$ is given. This realization may be considered as q-Dyson realization. In analogy to the usual Lie algebra $SU(2)$, the q-Holstein-Primakoff representation is also found from the q-Dyson representation. The transformation matrix between the q-Dyson and Holstein-Primakoff representation is obtained.