

振动-转动相变的解析描述

王保林

(淮阴师专, 223001)

摘 要

本文用 $1/N$ 展开技术, 计算了 Sm 同位素的低能谱和 $E2$ 性质, 并与 T. Otsuka 等人的精确计算结果进行系统比较, 表明振动-转动相变可以用近似的解析方法描述。

一、引 言

在稀土区和铜系区, 许多原子核同位素随着满壳外中子数的增加, 其基态从球形相向四极形变相过渡, 即低能核谱表现为从振动特征到转动特征的相变。用相互作用玻色子模型 (IBM) 来描述这种相变的工作很多^[1-3], 但除了极限情况以外, 对过渡区核的能谱、 $E2$ 跃迁性质等的计算, 都是采用数值方法进行的。S. Kuyucak 和 A. Morrison 提出的 $1/N$ 展开技术 (ONET)^[4], 给出了一般玻色子系统的近似解析方法。对于振动-转动相变这样的典型核结构问题, 用 ONET 进行解析描述应该是可行的。

文献[5]采用 ONET 给出了含玻色子能量时 sdg IBM 的非 $SU(3)$ 内禀态, 并讨论了 ONET 与 Dukelsky 等人提出的相互作用玻色子体系的多体方法 (HB、TDA 及 CHA) 的关系, 进而研究了 ONET 的精确度和局限性。本文拟对具有振动-转动相变特性的同位素的低能谱、 $E2$ 性质等物理量, 进行统一的解析计算, 并与 Otsuka 等人精确的数值计算进行比较。除特别说明外, 本文所采用的符号均与文献[4,5]相同。

二、理论公式

根据文献[2]的讨论, 在 sdg IBM 下描述振动-转动相变, 可采用下列 Hamiltonian:

$$H = H_0 - \kappa Q \cdot Q, \quad (1)$$

其中 $H_0 = \sum_l \epsilon_l \hat{n}_l$ ($l = 0, 2, 4$), ϵ_l 和 \hat{n}_l 分别为单玻色子能量和相应的粒子数算符。基带内禀态

$$|\phi_0\rangle = (b^+)^N |-\rangle. \quad (2)$$

对激发带, 在计算能量时, 可忽略单、双声子的混合项, 取激发带的内禀态为

$$|\phi_K\rangle = (b^+)^{N-1} b_K^+ |-\rangle, (K = 0, 1, 2, 3, 4). \quad (3)$$

为了统一计算同位素的能量和 $E2$ 算符的约化矩阵元,我们按照 k 体算符 \mathcal{O} 的矩阵元的一般 $1/N$ 展开形式^[4]

$$\langle \mathcal{O} \rangle = N^k \sum_{n,m} \frac{C_{n,m}}{N^m} \left(\frac{\bar{L}}{N^2} \right)^n, \quad (4)$$

对(1)式中的两项矩阵元,分别计算到第一层次,其中的四极相互作用项已由文献[4]给出.对单体的玻色子能量项 H_ε ,计算到第一层次时,基带矩阵元为

$$\langle H_\varepsilon \rangle_{\varepsilon,L} = N \left[W_0 + \frac{1}{N} \left(W_0 - \frac{W_1}{2y} \right) + \frac{\bar{L}}{yN^2} \left(-W_0 + \frac{W_1}{2y} \right) \right]. \quad (5)$$

按文献[4]的计算步骤,很容易得到激发带的矩阵元,展开到第一层次时,

$$\langle H_\varepsilon \rangle_{\kappa,L} = N \left[W_0 + \frac{1}{N} \left(W(K) - W_0 - \frac{W_1}{2y} \right) + \frac{\bar{L}}{yN^2} \left(-W_0 + \frac{W_1}{2y} \right) \right]. \quad (6)$$

其中

$$W(K) = \sum_i \varepsilon_i x_i^2 / (-\kappa), (K = 0, 1, 2, 3, 4) \quad (7)$$

与基带的差别只在 C_{01} 层次上.结合文献[4]的结果,(1)式 Hamiltonian 的矩阵元为:
基带

$$\begin{aligned} \langle H \rangle_{\varepsilon,L} = & -\kappa N^2 \left\{ A^2 + \frac{1}{N} \left[A^2 - \frac{D_1}{2y} + C + W_0 + \frac{1}{N} \left(W_0 - \frac{W_1}{2y} \right) \right] \right. \\ & \left. + \frac{\bar{L}}{yN^2} \left[-A^2 + \frac{D_1}{4y} + \frac{1}{N} \left(-W_0 + \frac{W_1}{2y} \right) \right] \right\}; \quad (8) \end{aligned}$$

激发带

$$\begin{aligned} \langle H \rangle_{\kappa,L} = & -\kappa N^2 \left\{ A^2 + \frac{1}{N} \left[-A^2 + 2AA(K) + 2B^2(K) - \frac{D_1}{2y} \right. \right. \\ & \left. \left. + C + W_0 + \frac{1}{N} \left(W(K) - W_0 - \frac{W_1}{2y} \right) \right] \right. \\ & \left. + \frac{\bar{L}}{yN^2} \left[-A^2 + \frac{D_1}{4y} + \frac{1}{N} \left(-W_0 + \frac{W_1}{2y} \right) \right] \right\}. \quad (9) \end{aligned}$$

内禀参数由(8)、(9)两式变分确定.由于本文对 H_ε 项的矩阵元计算,比文献[5]多取一层次,变分结果亦有所区别.变分后得到的基带内禀参数满足的本征模方程为

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_i x_i - 2\kappa(N+1)A \sum_j \bar{q}_{ij} x_j \\ + \kappa \sum_j h_{ji}^{(1)} x_j + \kappa \frac{\bar{L}}{N} \sum_j h_{ji}^{(2)} x_j = \varepsilon x_i. \quad (10) \end{aligned}$$

式中的

$$\tilde{\varepsilon}_i = \varepsilon_i - \frac{5\kappa}{2l+1} \sum_j q_{ij}^2, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} h_{ji}^{(1)} = & \frac{A}{2y} \bar{q}_{ij} + \frac{1}{2y} (IA - 6A + 2A_1) \bar{q}_{ij} \\ & + \left[\frac{D_1}{2y} + \frac{1}{N} \left(\frac{\varepsilon_i}{\kappa} + \frac{W_1}{2y} \right) \right] \left(1 - \frac{l}{2y} \right) \delta_{ij}, \quad (12) \end{aligned}$$

$$h_{ij}^{(2)} = -\frac{A}{4y^2} \bar{j} \bar{q}_{ij} - \frac{1}{4y^2} (\bar{l}A - 8yA - 6A + 2A_1) \bar{q}_{ij} + \left[\frac{A^2}{y} - \frac{D_1}{2y^2} - \frac{1}{yN} \left(\frac{\epsilon_i}{\kappa} - W_0 + \frac{W_1}{y} \right) \right] \left(1 - \frac{\bar{l}}{2y} \right) \delta_{ij}. \quad (13)$$

对激发带的内禀参数, 近似地取激发带中基态玻色子 (b^+) 的参数 (x_i) 为基带内禀态的解^[5]. 略去(9)式中不含 x_{iK} 的项后, 对 x_{iK} 变分可得到 x_{iK} 满足的本征模方程

$$\epsilon_i x_{iK} - 2\kappa (-1)^K N A \sum_j \langle jKl - K | 20 \rangle q_{ij} x_{iK} - 2\kappa N \sum_j \sum_{kk'} \langle kKk'0 | 2K \rangle q_{kk'} x_{kK} x_{k'} \langle lKj0 | 2K \rangle q_{ij} x_i = \epsilon_K x_{iK}. \quad (14)$$

对内禀参数的计算, 也可以用文献[4,5]的方法进行解析计算. 基带内禀参数展开为

$$x_i = x_i^0 + \frac{y_i}{N} + \frac{\bar{l}}{N^2} x_i; \quad (15)$$

激发带的内禀参数, 在本文所取的层次上可展开成

$$x_{iK} = x_{iK}^0 + \frac{y_{iK}}{N}. \quad (16)$$

但这样计算的结果形式冗长, 对偏离 $SU(3)$ 比较远的区域, 可靠性也较差, 因而我们直接对(10)式和(14)式进行数值求解.

文献[4]采用自洽的 Q 形式, $E2$ 算符定义为

$$T_M^{(E2)} = e_2 Q_M, \quad (17)$$

e_2 为有效电荷), 对 $E2$ 跃迁的约化矩阵元做了系统推导. 基带内电四极矩的计算公式为

$$Q(L) = -e_2 \sqrt{\frac{16\pi}{5}} \frac{L}{2L+3} \left[NA + A - \frac{A_1 - 3A}{2y} - \frac{\bar{l}}{2yN} \left(A + \frac{A_2 - A_{11} - 10A_1 + 12A}{8y} \right) \right]; \quad (18)$$

基带内 $E2$ 跃迁的约化矩阵元为

$$P_2(L) \equiv \langle L+2 \| Q \| L \rangle_e = N \sqrt{2L+1} \langle L020 | L+2 \ 0 \rangle \left[A + \frac{1}{N} \left(A - \frac{A_1 - 3A}{2y} \right) - \frac{L(L+3)}{2yN^2} \left(A - \frac{A_2 - A_{11} + 6A_1 - 12A}{24y} \right) \right]. \quad (19)$$

则 $E2$ 跃迁几率按下式计算

$$B(E2, L_i \rightarrow L_f) = \frac{e_2^2}{2L_i + 1} |\langle L_i \| Q \| L_f \rangle|^2. \quad (20)$$

三、计算结果及讨论

文献[2]在 sdg IBM 下, 从内禀态出发, 用角动量投影后变分的方法, 数值计算内禀

参数和能量。这和 ONET 的思想是完全一致的, ONET 正是在此基础上发展起来的近

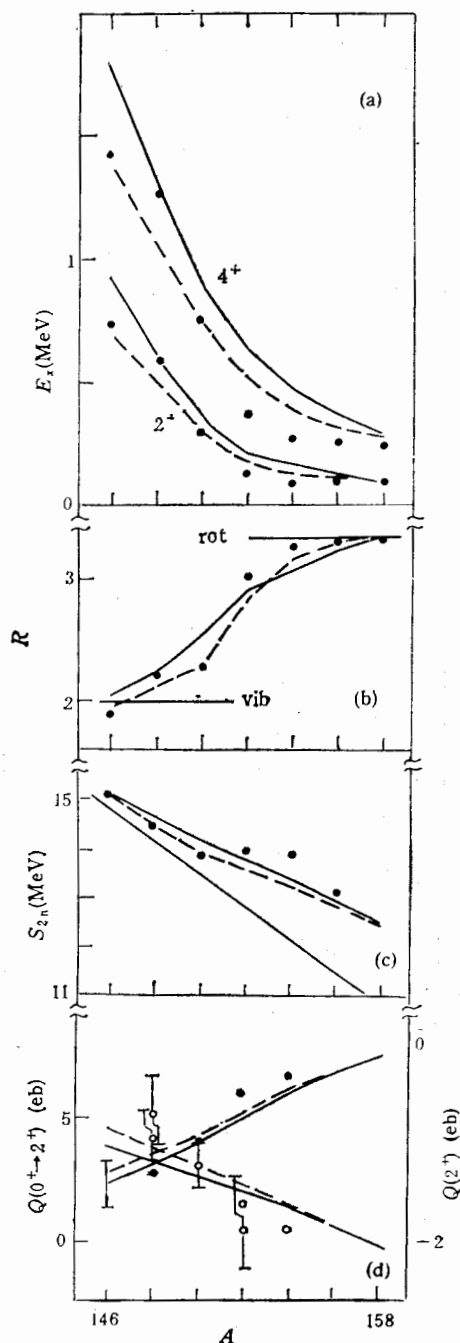


图1 Sm 同位素的振动-转动相变特性
(a); 2_1^+ 和 4_1^+ 态的能谱; (b) 激发能之比值; (c) 双中子分离能; (d) $0_1^+ \rightarrow 2_1^+$ 的跃迁矩和 2_1^+ 态的四极矩 (Q)
——本文计算结果, - - - 文献[2]的计算结果, ●○实验值(取自[2]及其参考文献)。

到接近 1。如对 ^{148}Sm , $L = 0_1^+, 2_1^+$ 时, \bar{n}_d 分别为 1.55 和 2.46, 而文献[2]的结果是 0.74

似解析方法。在文献[2]中,作者基于他们关于 g 玻色子重整化的思想,通过微观分析和计算,固定所有可调参数,统一计算了 Sm 同位素的基带能谱和电四极矩等。由于文献[2]的计算没有做任何近似,其结论正好为检验本文结果的精确度提供了参考标准。为了研究 ONET 的可靠性和适用范围,我们完全采用文献[2]的参数,对 Sm 同位素进行系统计算,并与文献[2]的精确数值结果进行比较。

在 sdg IBM1 下,文献[2]采用的四极参量为 $SU(3)$ 极限值,而四极相互作用强度 $\kappa = 0.0375\text{MeV}$,单玻色子能量分别为 $\varepsilon_d = 1.3\text{MeV}$ 和 $\varepsilon_g = 1.8\text{MeV}$ 。用这些参数,对(10)和(14)式的本征模方程进行数值求解,由此即可进行系统的解析计算。图 1(a) 给出 Sm 同位素的 2_1^+ 和 4_1^+ 态的能谱计算结果。图 1(b) 为激发能之比 $R = E_x(4_1^+)/E_x(2_1^+)$ 。在转动区域,即 N 比较大时,结果与文献[2]比较接近,而在振动区域,结果与文献[2]有一定偏差,这是 ONET 本身的局限性造成的。总体的相变特征还是显著的。由文献[2]知,在 sdg IBM1 下,双中子分离能由下式计算:

$$S_{2n} = a_0 + a_1 N_n + E(N) - E(N+1), \quad (21)$$

N_n 为中子玻色子数, E 为 $L = 0_1^+$ 时(8)式的计算值,取 $a_0 = 15.60\text{MeV}$, $a_1 = -0.68\text{MeV}^{[2]}$ 时,计算结果与文献[2]基本吻合(图 1(c))。

对内禀参数的数值求解结果表明,在振动区域,随着 L 的增加, x_0 下降, x_2 上升很快, x_4 亦有上升。 L 从 $0_1^+ \rightarrow 2_1^+$ 时,相应的 d 玻色子数期望值 \bar{n}_d 增加

和 1.80。但在转动区, x_i 随 L 的变化很小, 这与文献[2]的结论完全相符。如对 ^{158}Sm , $L = 0_1^+, 2_1^+$ 时, $\bar{n}_d = 6.08, \bar{n}_g = 1.05$ 和 $\bar{n}_d = 6.14, \bar{n}_g = 1.08$; 文献[2]的结果是 $\bar{n}_d = 6.17, \bar{n}_g = 1$ 和 $\bar{n}_d = 6.20$ 和 $\bar{n}_g = 1$ 。

电磁跃迁是检验理论好坏的重要依据。对 $E2$ 性质的计算, 按文献[2], 取 $e_2 = 0.1125\text{eb}$, 2_1^+ 态的四极矩由(18)式给出, 结合(19)式 $0_1^+ \rightarrow 2_1^+$ 的跃迁矩

$$Q(0_1^+ \rightarrow 2_1^+) = \sqrt{\frac{16\pi}{5}} e_2 P_2(0) \quad (22)$$

计算结果(图1(d))与文献[2]比较, 只在振动区有所偏差。此外我们还计算了与 e_2 无关的分支比 $r = B(E2, 4_1^+ \rightarrow 2_1^+)/B(E2, 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)$ (表 1), 与几何模型的结论^[6]比较, 在转动区 ($r = 10/7$) 基本相符, 在振动区 ($r = 2$) 亦比较接近。

表 1 $B(E2, 4_1^+ \rightarrow 2_1^+)/B(E2, 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)$ 的计算结果

A	146	148	150	152	154	156	158
r	2.62	2.23	1.76	1.53	1.47	1.45	1.43

综上所述, 采用 ONET, 计算到第一层次时, 对基带的计算是很好的近似, 近似程度随 N 的增大而提高。在(1)式的 Hamiltonian 下, 对具有振动-转动相变性质的原子核同位素, 可以在一组固定的参数下, 进行统一的解析描述, 相变随中子数的增加自然产生。在振动区域, 误差较大, 而在转动区则相当可靠。对基带能谱的计算表明: 在转动区, (1)式中的单粒子能量项贡献较小, 以四极相互作用的贡献为主, 表现为集体性加强; 而在振动区, 则以单粒子项的贡献比较大。对激发带, 由于展开到第一层次时, 无法反映转动对态的影响, 因而计算结果将比较差。

为了改善与实验的符合程度, 可以仿照 sd IBM 的做法^[1], 适当调整玻色子能量。作者对吴华川教授的精心指导和帮助表示感谢。

参 考 文 献

- [1] O. Scholten et al., *Ann. Phys.* (N.Y), **115**(1978), 325.
- [2] T. Otsuka et al., *Phys. Lett.*, **B215**(1988). 205.
- [3] 赵晓凤, 李先胤, 高能物理与核物理, **15**(1991), 240.
- [4] S. Kuyucak and A. Morrison, *Ann. Phys.*, 181(1988), 79.
- [5] 吴华川, 荣钟麟, 王振, 高能物理与核物理, **15**(1991), 256.
- [6] 曾谨言, 孙洪洲, 原子核结构理论, 上海科学技术出版社, (1987), 165.

Analytical Calculation of The Vibrator-Rotor Transition in the Sdg Interacting Boson Model

WANG BAOLIN

(Huaiyin Teachers College, 223001)

ABSTRACT

Analytical calculation of the vibrator-rotor transition is given by utilizing the $1/N$ expansion technique in the sdg IBM. The phase transition of low-lying energy spectrum and $E2$ transition for Sm isotopes are calculated.