第16卷 第9期 高能物理与核物理 Vol. 16, No. 9
1992年9月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Sept., 1992

多体关联 Green 函数动力学*

I. 多体关联 Green 函数的运动方程

左 维 王顺金
(兰州大学现代物理系，730001)

摘 要

从多体系统的哈密顿量及海森堡方程出发，通过引进非线性变换，完成了体系的多体 Green 函数的关联分离，并建立起非相对论性的多体关联 Green 函数的动力学方程组。这个方程组为描述多体系统提供了一种完整的、系统的非微扰计算方法。

一、引 言

Green 函数方法是量子多体理论和量子场论的基本方法，它在物理学的许多领域中有着非常广泛的应用[1-6]。然而，传统的 Green 函数方法实际上是一种按相互作用强度展开的级数微扰论[7]。对于具有强相互作用和排斥硬心的多体系统，微扰论则显得无能为力。对于这样的系统，必须发展非微扰的计算方法。最直接的方法是修改微扰的 Green 函数理论，把级数展开方法和部分无穷求和规则结合起来[3]。这就是已有的以 Green 函数为基础的非微扰计算方法。显然，这种依赖 Feynman 图和选择某类图形无穷序列的规则的非微扰的计算方法，是缺乏系统性和完整性的。因此，目前需要建立一种完整的、系统的非微扰的 Green 函数理论。本文的目的正是为了发展这样一种非微扰的多体关联 Green 函数的动力学理论，它能对复杂的相互作用的多体系统提供一种系统的近似描述方法，其近似程度随着所概括的多体关联等级的升级而提高；而每一级近似，都导致一种描述某一等级的多体关联的非微扰的、非线性的耦合方程组。其最低阶的多体关联近似是目前计算机可以处理的；随着计算机技术的发展，将可以描述越来越高阶的多体关联，从多体系统提取越来越多的信息。这种近似方法正好与自然界存在的从低阶到高阶的多体关联结构相对应，是反映多体相互作用系统的自然本性的处理方法。

建立非微扰的多体关联 Green 函数理论的动机与信心，也来自密度矩阵形式的多体关联动力学理论的成功及其在核物理中越来越广泛的应用[8-11]。密度矩阵是 Green 函数的一种特殊的等时极限，是量子多体问题的另一条重要途径。本文将多体关联密度矩阵

本文1991年9月21日收到。
* 国家自然科学基金和国家教委博士点基金资助的课题。

动力学理论中的方法[8] 加以推广，得到了非相对论多体关联 Green 函数的动力学方程组，为建立相对论量子场的多体关联动力学创造了条件.

二、多体 Green 函数及其运动方程

为了简单，考虑相互作用的费米子多体系统，其场算符为 $\hat{\phi}(\boldsymbol{x}t)$ 和 $\hat{\phi}^+(\boldsymbol{x}t)$，其二体相互作用哈密顿量为[3]

$$\hat{H}=\int \hat{\phi}^+(\boldsymbol{x}t)t(\boldsymbol{x})\hat{\phi}(\boldsymbol{x}t)\mathrm{d}^3\boldsymbol{x} + \iint \hat{\phi}^+(\boldsymbol{x}t)\hat{\phi}^+(\boldsymbol{x}'t)v(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')\hat{\phi}(\boldsymbol{x}',t)\hat{\phi}(\boldsymbol{x}t)\mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3x'. \tag{2.1}$$

运用海森堡方程和 $\hat{H}$ 的表达式以及场算符的反对易关系，求得场算符时间演化服从的方程

$$i\frac{\partial}{\partial t}\hat{\phi}(x)=t(\boldsymbol{x})\hat{\phi}(x)+\int \mathrm{d}^4x'\hat{\phi}^+(x')V(x,x')\hat{\phi}(x')\hat{\phi}(x), \tag{2.2a}$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\hat{\phi}^+(x)=-t(\boldsymbol{x})\hat{\phi}^+(x)-\int \mathrm{d}^4x'\hat{\phi}^+(x)\hat{\phi}^+(x')V(x,x')\hat{\phi}(x'), \tag{2.2b}$$

其中

$$V(x,x')=V(x',x)=\delta(t-t')v(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'), \tag{2.3}$$

为书写简明，略去自旋、同位旋指标，并用 j 代表 $x_j=(\boldsymbol{x}_j,t_j)$.

按通常定义，n 体 Green 函数为

$$i^nG^{(n)}(1\cdots n;1'\cdots n')=\langle T\hat{\phi}(1)\cdots\hat{\phi}(n)\hat{\phi}^+(n')\cdots\hat{\phi}^+(1')\rangle,\quad (n=1,2\cdots\cdots) \tag{2.4}$$

其中 T 是编时算子. 对多体系统初态 $\hat{\rho}$ 的量子和系综平均定义为 $\langle\cdots\rangle=\mathrm{Tr}(\cdots\hat{\rho})/\mathrm{Tr}\hat{\rho}$. 由 (2.2a,b)，求得多体 Green 函数满足的运动方程

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t_1}-t(1)\right]G(1;1')=\delta^{(4)}(1,1')-i\int \mathrm{d}^42V(1,2)G^{(2)}(1,2;1',2^+), \tag{2.5a}$$

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t_1}-t(1)\right]G^{(2)}(1,2;1',2')=\delta^{(4)}(1,1')G(2;2')-\delta^{(4)}(1,2')G(2;1') - i\int \mathrm{d}^43V(1,3)G^{(3)}(1,2,3;1',2',3^+), \tag{2.5b}$$

$$\cdots$$

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t_1}-t(1)\right]G^{(n)}(1\cdots n;1'\cdots n')=\sum_{j=1}^{n}\delta^{(4)}(1,j')(-)^{j-1}G^{(n-1)}(2\cdots n;1'\cdots(j-1)',(j+1)'\cdots n') - i\int \mathrm{d}^4(n+1)V(1,n+1)G^{(n+1)}(1\cdots(n+1);1'\cdots(n+1)^+), \tag{2.5c}$$

其中 $t(1)=t(\boldsymbol{x}_1)=-\frac{1}{2m}\nabla_1^2$，$(n+1)^+$ 表示 $(\boldsymbol{x}_{n+1},t^+_{n+1})$. 对其它的四维坐标 x_i 或 x'_i，可得类似的运动方程. 与密度矩阵形式的 BBGKY 系列相似，上述多体 Green 函数

的运动方程有两个主要缺点：(i) 方程组 (2.5a—c) 本身不能提供一个合理的截断近似方案，因而其本身也就无法求解，失去了它们的实际应用价值；(ii) 方程组 (2.5a—c) 包含大量的不连接图形的时间演化过程，因而使大量的不必要的信息重复。为克服上述缺点，需要从不连接 Green 函数的运动方程过渡到不可约因子——关联 Green 函数的运动方程。

三、关联 Green 函数及其运动方程

建立关联 Green 函数的动力学有两个关键步骤。第一步，从多体 Green 函数中分离出多体关联 Green 函数；第二步，把多体 Green 函数的运动方程转变为多体关联 Green 函数的运动方程。

推广分离关联密度矩阵的方法[8]，只要在粒子的变量中包含时间变量，就可以得到 n 体 Green 函数的分离公式

$$G^{(n)}(1\cdots n;1'\cdots n')=G_c^{(n)}(1\cdots n;1'\cdots n')$$

$$+\underset{\{1'\cdots n'\}}{A_p}\ \underset{\left\{\begin{smallmatrix}2\cdots n\\ 2'\cdots n'\end{smallmatrix}\right\}}{S_p}\sum_{k=1}^{n-1}G_c^{(k)}(1\cdots k;1'\cdots k')G^{(n-k)}((k+1)\cdots n;(k+1)'\cdots n'),$$

$$(n=2,3\cdots\cdots)\tag{3.1}$$

其中 $\underset{\{\vdots\}}{S_p}$ 表示对出现在括号$\{\vdots\}$中的粒子时空坐标对 $\{x_i, x_i'\}$ 和 $\{x_j, x_j'\}$ 的完全对称化运算，$\underset{\{\cdots\}}{A_p}$ 表示对出现在 $\{\cdots\}$ 中的粒子坐标 x_j' 和 x_i' 的完全反对称化运算。同时施行 S_p 和 A_p 运算时，重复的项目应当去掉。另外，在(3.1)中还引进了约定符号 $G_c^{(1)}=G^{(1)}=G$。分离方程(3.1)有以下一些性质：

(i) $G^{(n)}$ 可按任何变量对 $\{x_i,x_i'\}$ 进行展开，从(3.1)式出发，经过多次展开，$G^{(n)}$ 可变换为多体关联 Green 函数的高度非线性的展式；而且由于完全对称化和完全反对称化的运算，不论每一步按何指标展开，其最终结果都是相同的。

(ii) $G_c^{(n)}$、$A_pS_pG_c^{(k)}G^{(n-k)}$ 具有与 $G^{(n)}$ 相同的对称性，算子 A_pS_p 具有下述性质

$$\underset{\{\cdots\}_1}{A_p}\ \underset{\{\vdots\}_1}{S_p}\ \underset{\{\cdots\}_2}{A_p}\ \underset{\{\vdots\}_2}{S_p}=\underset{\{\cdots\}_1}{A_p}\ \underset{\{\vdots\}_1}{S_p}\ ,\quad 若\{\cdots\}\supseteq\{\cdots\}_2且\{\vdots\}_1\supseteq\{\vdots\}_2$$

(iii) $G^{(n)}$ 包含 n 个粒子间所有一切可能的关联。　(3.2)

分离方程(3.1)的优点是粒子变量 x_1 固定在 $G_c^{(k)}$ 中；根据性质 (i)，在进行关联分离时，可取任意一个坐标固定在 $G_c^{(k)}$ 中。已经检验分离方程(3.1)与利用生成泛函方法建立的不连接 Green 函数与连接 Green 函数的关系是一致的。这里的关联 Green 函数就是连接 Green 函数。

把分离方程代入 (2.5b,c) 中，经计算，得到低阶关联 Green 函数的运动方程

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t_1}-t(1)\right]G_c^{(2)}(1,2;1',2')$$

$$=-i\int d3V(1,3)\{-G^{(2)}(1,3;1',2')G(2;3)+(1-P_{13})[G_c^{(2)}(1,2;1',2')G(3;3^+)]$$

$$+(1-P_{13})(1-P_{1'2'})[G_c^{(2)}(2,3;2',3^+)G(1;1')]+G_c^{(3)}(1,2,3;1',2',3^+)\}, \quad (3.3a)$$

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t_1}-t(1)\right]G_c^{(3)}(1,2,3;1',2',3')$$
$$=-i\int d4V(1,4)\{(1-P_{1'2'}-P_{1'3'})[G_c^{(2)}(2,3;4,1')G(1,4;3',2')]$$
$$+(1-P_{14})(1-P_{1'3'}-P_{2'3'})[G_c^{(2)}(1,2;1',2')G_c^{(2)}(3,4;3',4^+)$$
$$-G_c^{(2)}(1,2;1',2')G(3;4)G(4;3')]$$
$$+(1-P_{14})(1-P_{1'2'}-P_{3'2'})[G_c^{(2)}(1,3;1',3')G_c^{(2)}(2,4;2',4^+)$$
$$-G_c^{(2)}(1,3;1',3')G(2;4)G(4;2')]$$
$$+(1-P_{14})(1-P_{1'4^+}-P_{2'4^+}-P_{3'4^+})[G_c^{(3)}(1,2,3;1',2',3')G(4;4^+)]$$
$$-(1-P_{23})[G_c^{(3)}(1,4,3;1',2',3')G(2;4)]+G_c^{(4)}(1,2,3,4;1',2',3',4^+)\}, \quad (3.3b)$$

其中 P_{ij} 是 i 和 j 之间的置换算子。利用文献[8]中引进的连接项和不连接项的概念，可以发现（3.3a,b）右边各项有四个特点：(1)所有的项目都是连接的，连接或者由相互作用来实现(相互作用关联)，或者由 Pauli 反对称化造成(称为 Pauli 关联)；(2) 二体相互作用和反对称化最多能把三个因子连接起来，对于 n 体关联方程来说，其右边只能有 $V(1,n+1)G_c^{(n+1)}$、$V(1,n+1)G_c^{(k)}G_c^{(l)}\delta_{k+l,n+1}$ 和 $V(1,n+1)G_c^{(k)}G_c^{(l)}G_c^{(m)}\delta_{k+l+m,n+1}$ 三种形式；(3)方程两边具有相同的变量交换对称性；(4)对 n 体关联的运动方程，其右边涉及第 $(n+1)$ 个粒子，并对这个粒子的连续变量积分，不连续变量求和。

按上述特点，可把 $G_c^{(n)}$ 的运动方程写成

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t_1}-t(1)\right]G_c^{(n)}(1\cdots n;1'\cdots n')$$
$$=-i\int d(n+1)V(1,n+1)\{G_c^{(n+1)}(1\cdots n,(n+1);1'\cdots n',(n+1)^+)$$
$$+\underset{\{1'\cdots n'\}}{A_p}\ \underset{\left\{\begin{smallmatrix}2\cdots n\\ 2'\cdots n'\end{smallmatrix}\right\}}{S_p}\Bigg[\sum_{k=1}^{n}G_c^{(k)}(1\cdots k;1'\cdots k')G_c^{(n+1-k)}((k+1)\cdots n,$$
$$(n+1);(k+1)'\cdots n',(n+1)^+)$$
$$-\sum_{k=1}^{n}G_c^{(k)}(1\cdots k;1'\cdots(k-1)',(n+1)^+)G_c^{(n+1-k)}((k+1)\cdots n,$$
$$(n+1);(k+1)'\cdots n',k')$$
$$-\sum_{k=2}^{n}G_c^{(k)}(1\cdots(k-1),(n+1);1'\cdots k')G_c^{(n+1-k)}((k+1)\cdots n,k;$$
$$(k+1)'\cdots n',(n+1)^+)$$
$$-\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{p=1}^{n-k}G_c^{(k)}(1\cdots k;1'\cdots k')G_c^{(p)}((k+1)\cdots(k+p-1),(n+1);$$
$$(k+1)'\cdots(k+p)')$$
$$\times G_c^{(n+1-k-p)}((k+p+1)\cdots n,(k+p);$$
$$(k+p+1)'\cdots n',(n+1)^+)\Bigg]\Bigg\}. \quad (3.4)$$

附录中严格证明了，(3.4) 是正确的. 利用文献[8]中引进的算子 $\underset{(n+1)}{AS}$ 及连接和不连接的概念,并且考虑到 $G^{(n)}$、$G_c^{(n)}$ 对所有变量的对称性,能够以简洁的形式写出关于一般变量 $(\boldsymbol{x}_j t_j)$ 的运动方程

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t_1}-t(1)\right]G(1;1')=\delta^{(4)}(1,1')-i\int \mathrm{d}2V(1,2)[G(1;1')G(2;2^+)$$
$$-G(1;2^+)G(2;1')+G_c^{(2)}(1,2;1',2^+)], \tag{3.5a}$$

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t_j}-t(j)\right]G_c^{(n)}=-i\Big[\underset{(n+1)'=(n+1)^+}{\mathrm{Tr}}V(j,n+1)\underset{(n+1)}{AS}$$
$$\times\sum_{k\geqslant l\geqslant m=0}\sum\sum G_c^{(k)}G_c^{(l)}G_c^{(m)}\delta_{k+l+m,n+1}\Big]_L \quad (n\geqslant 2, j=1,2\cdots\cdots) \tag{3.5b}$$

和

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t_1'}+t(1')\right]G(1;1')=-\delta^{(4)}(1,1')+i\int \mathrm{d}2V(1',2)[G(1;1')G(2^-;2)$$
$$-G(1;2)G(2^-;1')+G_c^{(2)}(1,2^-;1',2')], \tag{3.5c}$$

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t_j'}+t(j')\right]G_c^{(n)}=i\Big[\underset{(n+1)=(n+1)'^-}{\mathrm{Tr}}V(j',(n+1)')\underset{(n+1)}{AS}$$
$$\times\sum_{k\geqslant l\geqslant m=0}\sum\sum G_c^{(k)}G_c^{(l)}G_c^{(m)}\delta_{k+l+m,n+1}\Big]_L, \quad (n\geqslant 2, j'=1',2'\cdots\cdots) \tag{3.5d}$$

其中四维求迹运算定义为先取 $\begin{cases}\boldsymbol{x}'_{n+1}=\boldsymbol{x}_{n+1}\\ t'_{n+1}=t^+_{n+1}\end{cases}$ 后再进行积分,即

$$\underset{(n+1)'=(n+1)^+}{\mathrm{Tr}}=\int \mathrm{d}^4x_{n+1}\left(\begin{matrix}\boldsymbol{x}'_{n+1}=\boldsymbol{x}_{n+1}\\ t'_{n+1}=t^+_{n+1}\end{matrix}\right). \tag{3.6}$$

(3.5a—d) 构成了多体关联 Green 函数动力学的基本方程组. 该方程组有下述优点: (1)其基本物理量是多体关联 Green 函数，它们的解为多体系统提供了充分而必要的信息,并且不存在信息重复的问题;(2)它们是非线性的、非微扰的、耦合的动力学方程组,反映相互作用产生多体关联以及各阶多体关联之间相互影响和反馈的动态过程; (3)如果多体关联随着等级的增加而逐渐减弱(多体系统常常如此)，则上述方程组自然地提供了一个按多体关联等级而不是按相互作用强度的幂次展开的非微扰的截断近似方案.

值得注意的是,在整个推导和证明过程中,对初态密度矩阵 $\hat{\rho}$ 未加任何限制,因而方程组 (3.5a—d) 本身完全适用于非平衡态情形， Green 函数的计算靠求解相应的运动方程的初值问题. 另外，方程组 (3.5a—d) 还可以推广到闭路 Green 函数的情形. 定义一条有序的闭合时间回路(图 1)和回路上的时序算子 P[6],

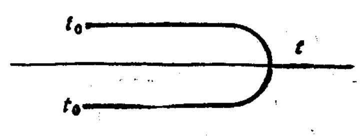

图 1

并且引进回路上的 Green 函数

$$i^n \underline{G}^{(n)}(1\cdots n;1'\cdots n') = \langle P\hat{\psi}(1)\cdots\hat{\psi}(n)\hat{\psi}^+(n')\cdots\hat{\psi}^+(1')\rangle, \tag{3.7}$$

以及相应的关联 Green 函数 $\underline{G}_c^{(n)}$. 这里,用下加一横表示相应的闭路上的量. 显然,只要在我们的推导和得到的结果中,作下述替换.

(i) 所有时间变量都定义在回路上;所有的 Green 函数都变为闭路 Green 函数,即 $G^{(n)} \to \underline{G}^{(n)}, G_c^{(n)} \to \underline{G}_c^{(n)}$.

(ii) 定义回路上的阶跃函数

$$\underline{\theta}(t_1,t_2) = \begin{cases} 1, & (\text{回路上 } t_1 \text{ 比 } t_2 \text{ 迟}) \\ 0, & (\text{回路上 } t_1 \text{ 比 } t_2 \text{ 早}) \end{cases} \tag{3.8}$$

对时间变量的积分变为回路积分

$$\oint = \int(\text{上半支}) - \int(\text{下半支}). \tag{3.9}$$

时间的 δ 函数定义为

$$\oint \underline{\delta}(t_1,t_2)\underline{F}(t_1)\mathrm{d}t_1 = \underline{F}(t_2), \tag{3.10}$$

则本文所得结果推广到闭路 Green 函数的情形.

四、讨　论

本文建立起了非相对论性多体关联 Green 函数的动力学方程组. 这个方程组是非微扰和非线性的, 它能够系统而自然地为描述多体系统提供一个按多体关联等级截断的近似方案,而且每一个截断近似方程组都概括一定类型的图形的无穷序列的贡献,这是通常的 Green 函数微扰论所不具备的新特点. 与密度矩阵形式的关联动力学相比,多时形式的关联 Green 函数动力学,对于理论的相对论性推广是必不可少的.

温度 Green 函数理论在平衡态量子统计力学中起着十分重要的作用. 如果把实时间的多体关联 Green 函数理论向虚时间延拓, 并且考虑虚时多体 Green 函数的周期性边界条件(即把初值问题变为适当的边值问题),能否建立起温度 Green 函数的非微扰的多体关联理论? 这一问题的研究是十分有意义的.

A. 附　录

下面我们用数学归纳法证明方程(3.4)

(i) 在方程(3.4)中,令 $n=2$,所得方程与方程 (3.3a) 一致;令 $n=3$, 所得方程与 (3.3b) 一致. 因此,当 $2\leqslant n\leqslant 3$ 时,方程(3.4)正确.

(ii) 假定当 $2\leqslant n\leqslant m$ 时,方程(3.4)成立,下面证明当 $n=m+1$ 时,它也成立. 由 (3.1) 式可得

$$\begin{aligned} G_c^{(m+1)}(1\ldots(m+1);1'\ldots(m+1)') &= G^{(m+1)}(1\ldots(m+1);1'\ldots(m+1)') \\ &- \underset{\{1'\ldots(m+1)'\}}{A_p}\ \underset{\left\{\begin{smallmatrix}2\ldots(m+1)\\2'\ldots(m+1)'\end{smallmatrix}\right\}}{S_p} \sum_{k=1}^{m} G_c^{(k)}(1\ldots k;1'\ldots k')G^{(m+1-k)}((k+1)\ldots(m+1); \\ &\quad (k+1)'\ldots(m+1)'). \end{aligned} \tag{A.1}$$

在 (A.1) 中，指标 1 总是固定在 $G_c^{(k)}$ 中，而不出现在 $G^{(m+1-k)}$ 中，利用这一特点得到

$$
\begin{aligned}
&\left[i\frac{\partial}{\partial t_1}-\varepsilon(1)\right]G_c^{(m+1)}(1\ldots(m+1);1'\ldots(m+1)')\\
&\quad=\left[i\frac{\partial}{\partial t_1}-\varepsilon(1)\right]G^{(m+1)}(1\ldots(m+1);1'\ldots(m+1)')\\
&\quad\quad-\underset{\{1'\ldots(m+1)'\}}{A_p}\ \underset{\left\{\begin{smallmatrix}2\ldots(m+1)\\2'\ldots(m+1)'\end{smallmatrix}\right\}}{S_p}\sum_{k=1}^{m}\left\{\left[\left(i\frac{\partial}{\partial t_1}-\varepsilon(1)\right)G_c^{(k)}(1\ldots k;1'\ldots k')\right]\right.\\
&\quad\quad\left.G^{(m+1-k)}((k+1)\ldots(m+1);(k+1)'\ldots(m+1)')\right\}.
\end{aligned}
\tag{A.2}
$$

将 (2.5c) 代入 (A.2) 式，对 $G_c^{(1)}=G$ 使用方程 (3.5a)，而对于 $2\leqslant k\leqslant m$ 用方程(3.4)，并注意到(3.2)式，经计算，得

$$
\begin{aligned}
&\left[i\frac{\partial}{\partial t_1}-\varepsilon(1)\right]G_c^{(m+1)}(1\ldots(m+1);1'\ldots(m+1)')\\
&=-i\int d(m+2)V(1,m+2)\left\{G^{(m+2)}(1\ldots(m+1),(m+2);1'\ldots(m+1)',(m+2)^+)\right.\\
&\quad-\underset{\{1'\ldots(m+1)'\}}{A_p}\ \underset{\left\{\begin{smallmatrix}2\ldots(m+1)\\2'\ldots(m+1)'\end{smallmatrix}\right\}}{S_p}\left(\sum_{k=1}^{m}\left[G_c^{(k+1)}(1\ldots k,(m+2);1'\ldots k',(m+2)^+)\right.\right.\\
&\quad+\sum_{p=1}^{k}G_c^{(p)}(1\ldots p;1'\ldots p')G_c^{(k+1-p)}((p+1)\ldots k,(m+2);(p+1)'\ldots k',(m+2)^+)\\
&\quad\left.-\sum_{p=1}^{k}G_c^{(p)}(1\ldots p;1'\ldots(p-1)',(m+2)^+)G_c^{(k+1-p)}((p+1)\ldots k,(m+2);(p+1)'\ldots k',p')\right]\\
&\quad\times G^{(m+1-k)}((k+1)\ldots(m+1);(k+1)'\ldots(m+1)')\\
&\quad-\sum_{k=2}^{m}\left[\sum_{p=2}^{k}G_c^{(p)}(1\ldots(p-1),(m+2);1'\ldots p')G_c^{(k+1-p)}((p+1)\ldots k,p;(p+1)'\ldots k',(m+2)^+)\right.\\
&\quad+\sum_{p=1}^{k-1}\sum_{l=1}^{k-p}G_c^{(p)}(1\ldots p;1'\ldots p')G_c^{(l)}((p+1)\ldots(p+l-1),(m+2);(p+1)'\ldots(p+l)')\\
&\quad\left.\times G_c^{(k+1-p-l)}((p+l+1)\ldots k,(p+l);(p+l+1)'\ldots k',(m+2)^+)\right]\\
&\quad\left.\left.\times G^{(m+1-k)}((k+1)\ldots(m+1);(k+1)'\ldots(m+1)')\right)\right\}.
\end{aligned}
\tag{A.3}
$$

为进一步计算，我们写出下列关系式

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{p=1}^{k}=\sum_{p=1}^{m}\sum_{k=p}^{m}, \tag{A.4a}$$

$$\sum_{k=2}^{m}\sum_{p=2}^{k}=\sum_{p=2}^{m}\sum_{k=p}^{m}, \tag{A.4b}$$

$$\sum_{k=2}^{m}\sum_{p=1}^{k-1}\sum_{l=1}^{k-p}=\sum_{p=1}^{m-1}\sum_{l=1}^{m-p}\sum_{k=p+l}^{m}. \tag{A.4c}$$

根据这些求和次序变换关系及(3.2)式，经过一些推演，方程 (A.3) 右边简化为

$$
\begin{aligned}
\text{第六项}=&-i\int d(m+2)V(1,m+2)\underset{\{1'\ldots(m+1)'\}}{A_p}\ \underset{\left\{\begin{smallmatrix}2\ldots(m+1)\\2'\ldots(m+1)'\end{smallmatrix}\right\}}{S_p}\sum_{p=1}^{m}\sum_{l=1}^{m+1-p}G_c^{(p)}(1\ldots p;1'\ldots p')\\
&\times G_c^{(l)}((p+1)\ldots(p+l-1),(m+2);(p+1)'\ldots(p+l)')
\end{aligned}
$$

$$\times [G^{(m+2-p-l)} - G_c^{(m+2-p-l)}]((p + l + 1)\cdots(m + 1), (p + l); (p + l + 1)'\cdots(m + 1)', (m + 2)^+). \tag{A.5a}$$

在得到 (A.5a) 式时,用到了约定符号 $G_c^{(1)} = G^{(1)} = G$

第三项+第六项

$$= i\int d(m + 2)V(1, m + 2) \mathop{A_p}_{\{1'\cdots(m + 1)'\}} \mathop{S_p}_{\begin{Bmatrix}2\cdots(m + 1)\\2'\cdots(m + 1)'\end{Bmatrix}} \sum_{p=1}^{m}\sum_{l=1}^{m+1-p} G_c^{(p)}(1\cdots p; 1'\cdots p')$$

$$\times G_c^{(l)}((p + 1)\cdots(p + l - 1), (m + 2); (p + 1)'\cdots(p + l)')G_c^{(m+2-p-l)}((p + l + 1)\cdots(m + 1), (p + l); (p + l + 1)'\cdots(m + 2)^+)$$

$$+ i\int d(m + 2)V(1, m + 2) \mathop{A_p}_{\{1'\cdots(m + 1)'\}} \mathop{S_p}_{\begin{Bmatrix}2\cdots(m + 1)\\2'\cdots(m + 1)'\end{Bmatrix}} \sum_{p=1}^{m+1} G_c^{(p)}(1\cdots p; 1'\cdots p')$$

$$\times [G^{(m+2-p)} - G_c^{(m+2-p)}]((p + 1)\cdots(m + 2); (p + 1)'\cdots(m + 2)^+), \tag{A.5b}$$

类似地,可以求得第四项、第五项的表达式. 将这些表达式代入 (A.3),最后得到

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t_1} - t(1)\right]G_c^{(m+1)}(1\cdots(m + 1); 1'\cdots(m + 1)')$$

$$= -i\int d(m + 2)V(1, m + 2)\Big\{G_c^{(m+2)}(1\cdots(m + 1), (m + 2); 1'\cdots(m + 1)', (m + 2)^+)$$

$$+ \mathop{A_p}_{\{1'\cdots(m + 1)'\}} \mathop{S_p}_{\begin{Bmatrix}2\cdots(m + 1)\\2'\cdots(m + 1)'\end{Bmatrix}} \Big[\sum_{p=1}^{m+1} G_c^{(p)}(1\cdots p; 1'\cdots p')G_c^{(m+2-p)}((p + 1)\cdots(m + 2); (p + 1)'\cdots(m + 2)^+)$$

$$- \sum_{p=1}^{m+1} G_c^{(p)}(1\cdots p; 1'\cdots(p - 1)', (m + 2)^+)G_c^{(m+2-p)}((p + 1)\cdots(m + 2); (p + 1)'\cdots(m + 1)', p')$$

$$- \sum_{p=2}^{m+1} G_c^{(p)}(1\cdots(p - 1), (m + 2); 1'\cdots p')G_c^{(m+2-p)}((p + 1)\cdots(m + 1), p; (p + 1)'\cdots(m + 2)^+)$$

$$- \sum_{p=1}^{m}\sum_{l=1}^{m+1-p} G_c^{(p)}(1\cdots p; 1'\cdots p')G_c^{(l)}((p + 1)\cdots(p + l - 1), (m + 2); (p + 1)'\cdots(p + l)')$$

$$\times G_c^{(m+2-p-l)}((p+l + 1)\cdots(m + 1), (p+l); (p + l + 1)'\cdots(m+1)', (m + 2)^+)\Big]\Big\}, \tag{A.6}$$

方程 (A.6) 正是方程(3.4)中 $n = m + 1$ 的结果. 因此,如果当 $2\leqslant n\leqslant m$ 时,方程(3.4)正确, 则当 $n = m + 1$ 时,方程(3.4)也正确. 所以方程(3.4)对任何 $n\geqslant 2$ 都成立. 结论得证.

参 考 文 献

[1] J. D. Bjorken and S. D. Drell, Relativistic Quantum Mechanics, McGraw-Hill Book Company, 1964.
[2] J. D. Bjorken and S. D. Drell, Relativistic Quantum Field, McGraw-Hill Book Company, 1964.
[3] A. L. Fetter and J. D. Walecka, Quantum Theory of Many Particle System, McGraw-Hill Book Company, 1971.
[4] A. A. Abrikosov et al., Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics, (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1963);
蔡建华等著,《量子统计的格林函数理论》,科学出版社,1982.
[5] P. C. Martin and J. Schwinger, *Phys. Rev.*, **115**(1959), 1342;
L. P. Kadanoff and G. Baym, Quantum Statistical Mechanics, W. A. Benjamin, 1962.
[6] P. Danielewicz, *Ann. Phys.* (*N. Y.*), **152**(1984), 238, 305;

K. C. Chou, Z. B. Su, B. L. Hao and L. Yu, *Phys. Rep.*, **118**(1985), 1;
E. Calzetla and B. L. Hu, *Phys. Rev.*, **D37**(1988), 2878;
W. Botermans and R. Malfliet, *Phys. Rep.*, **198**(1990), 115.
[7] R. P. Feynman, *Phys. Rev.*, **76**(1949), 749, 769.
[8] S. J. Wang and W. Cassing, *Ann. Phys.*, **159**(1985), 328.
[9] S. J. Wang and W. Cassing, *Nucl. Phys.*, **A495**(1989), 371C;
W. Cassing and S. J. Wang, *Z. Phys.*, **A337**(1990), 1;
W. Cassing and U. Mosel, *Progr. in Part and Nucl. Phys.*, **25**(1990), 235;
[10] S. J. Wang et al., *Ann. Phys.*, **209**(1991), 251;
B. A. Li and W. Bauer, *Phys. Lett.*, **B254**(1991), 335;
B. A. Li and W. Bauer, Pion Spectra in a Hadronic Transport Model for Relativistic Heavy Ion Collisions, to be published in Phys. Rev. C.
[11] M. Tohyama and M. Gong, *Z. Phys.*, **A332**(1989), 269;
M. Gong and M. Tohyama, *Z. Phys.*, **A335**(1990), 153;
M. Gong, M. Tohyama and J. Randrup, *Z. Phys.*, **A335**(1990), 331.

Dynamics of Many-Body Correlation Green's Functions

I. The Equations of Motion for Many-Body Correlation Green's Functions

ZUO WEI WANG SHUNJIN
(*Lanzhou University*, 730001)

ABSTRACT

By means of introducing a nonlinear transformation, the n-body correlation Green's functions $G_c^{(n)}$ are separated out from the n-body Green's functions $G^{(n)}$. A set of non-relativistic dynamic equations for the time evolution of $G_c^{(n)}$ is derived which provides a complete, systematic and non-perturbative approach for describing quantum many-body systems.