第 17 卷 第 1 期　　高能物理与核物理　　Vol. 17, No. 1
1993 年 1 月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Jan., 1993

Skyrme 模型中新的附加质量项对重子及其共振态的影响

林进虎　张　寿　郑哲洙
(延边大学物理系,延吉　133002)

摘　要

本文研究了由于对 Skyrme 模型的拉氏量进行量子力学处理后产生的新的附加质量对重子及其共振态的影响.

一、引　言

不少作者[1-6]研究了非线性理论的量子化,文[7]把这些结果推广到 Skyrme 模型,得到了和文[8]不同的结果.K.Fuzii 等人[7]认为, G. S. Adkims 等人[8]提出的集体坐标框架内,Skyrme 模型的量子化步骤中存在不确定性,它跟孤粒子质量和 f_π 联系在一起. 为了解决这种不确定性,文[7]提出了用量子力学处理拉氏量的方法, 得到了新的附加质量 ΔM, 它对孤粒子质量有负的贡献. 这一点正好给我们提供了改进 f_π 等物理参数值的可能性. 因此, 本文一方面估计附加质量 ΔM 对核子静态性质的影响, 另一方面引进 ΔM 后推出一个统一描述重子及其共振态的能量公式.

二、Skyrme 模型中新的附加质量 ΔM 对核子静态性质的影响

$SU(2)$ 的 Skyrme 模型的拉氏密度可写成

$$\mathscr{L} = \frac{f_\pi^2}{16}\mathrm{Tr}(U_{L\rho}U_{L\rho}) + \frac{1}{32e^2}\mathrm{Tr}[U_{L\rho},U_{LK}]^2. \tag{2.1}$$

其中 $U_{L\rho} = (\partial_\rho U)U^+$, f_π 为 π 衰变常数, e 为无量纲参数.

按照文 [7], $U(\boldsymbol{x},t) = A(t)\sigma(\boldsymbol{x})A^+(t)$, 集体坐标 $A(t)(\in SU(2))$ 由一组实参数 $\{q^b; b = 1,2,3\}$ 确定. 由于 $A^+\left(\frac{\partial A}{\partial q^a}\right)$ 属于李代数,它可写成

$$A^+\frac{\partial A}{\partial q^a} = \frac{i}{2}\tau_B C(q)^B_a, \tag{2.2}$$

其中变量 $\{C(q)^B_a\}$ 满足如下关系

本文 1992 年 3 月 17 日收到.

$$C^b_E C^D_b = \delta^D_B,\quad C^b_E C^E_a = \delta^b_a. \tag{2.3}$$

现假定

$$[\dot{q}^d, q^b] = -if^{db}(q),\ \left(\dot{q}^d = \frac{dq^d}{dt}\right) \tag{2.4}$$

并引进新变量 W^B 的同时定义 $\dot{A} = \frac{dA}{dt}$ 的量子化形式

$$W^B \equiv \frac{1}{2}\{\dot{q}^a, C^B_a\}. \tag{2.5}$$

$$\dot{A}(q) \equiv \frac{1}{2}\left\{\dot{q}^a,\ \frac{\partial A}{\partial q^a}\right\}. \tag{2.6}$$

于是，

$$\frac{i}{2}\tau_B W^B = \frac{1}{2}\left[\dot{q}^a,\ A^+\frac{\partial A}{\partial q^a}\right] = A^+\dot{A} + \frac{1}{2}[\dot{q}^a, A^+]\frac{\partial A}{\partial q^a}$$

或

$$A^+\dot{A} = \frac{i}{2}\tau_B W^B + \frac{i}{8}f^{BB}, \tag{2.7}$$

其中

$$f^{BD}_{(q)} = C(q)^B_a C(q)^D_b f(q)^{ab}. \tag{2.8}$$

容易验证，

$$A^+\dot{A} + \dot{A}^+A = \dot{A}A^+ + A\dot{A}^+ = 0. \tag{2.9}$$

其次，引进与 q^a 相应的共轭动量 p^a

$$p^a = \frac{\partial \mathscr{L}(U_{L\rho})}{\partial \dot{q}^a} = \frac{1}{2}\{\dot{q}^b, g_{ab}\}. \tag{2.10}$$

现在强加对易关系

$$[p_a, q^b] = -i\delta^b_a,\ \text{其他}=0. \tag{2.11}$$

那么，由此可得

$$f^{ab}g_{ad} = \delta^b_d; \tag{2.12}$$

$$A^+\dot{A} = \frac{i}{2}\tau_B W^B + \frac{3i}{8a(\sigma)}. \tag{2.13}$$

$$[W^B, A] = A\tau_B/2a(\sigma). \tag{2.14}$$

对于 $R_B \equiv -\{p_a, C^a_B\}$，可以从 $C^b_E\partial_b C^a_B - C^b_B\partial_b C^a_F = -\varepsilon_{EBF}C^a_F$ 证明

$$[R_B, R_D] = -i\varepsilon_{BDE}R_E. \tag{2.15}$$

$$R_B = -a(\sigma)W^B. \tag{2.16}$$

利用上述关系可得

$$L(U_{L\rho}) \equiv \int d^3x\mathscr{L}(U_{L\rho}; \boldsymbol{x}, t) = \frac{a(\sigma)}{2}W^BW^B - [M(\sigma) + \Delta M(\sigma)]$$

$$= R_BR_B/2a(\sigma) - [M(\sigma) + \Delta M(\sigma)]. \tag{2.17}$$

如果 σ 取 hedgehog ansatz，即 $\sigma = \exp[iF(r)\hat{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{\tau}]$ 则

$$a(\sigma) = a(F) = \frac{8\pi}{3}\int_0^\infty dr\, r^2\sin^2F\left[\frac{f_\pi^2}{4} + \frac{1}{e^2}\left(F'^2 + \frac{\sin^2F}{r^2}\right)\right]. \tag{2.18}$$

$$M(F) = 2\pi\int_0^\infty dr\, r^2\left\{\frac{f_\pi^2}{4}\left(F'^2 + \frac{2\sin^2F}{r^2}\right)\right.$$

$$+\frac{\sin^2 F}{e^2 r^2}\left(2F'^2+\frac{\sin^2 F}{r^2}\right)\Big\}. \tag{2.19}$$

$$\Delta M(F)=-\frac{3}{4a(F)}+\frac{\pi}{e^2 a(F)^2}\int_0^\infty \mathrm{d}r \sin^4 F. \tag{2.20}$$

最后,量子化的哈密顿本征值为

$$H_l(F)=M(F)+\Delta M(F)+\frac{l(l+1)}{2a(F)}. \tag{2.21}$$

其中 $l(l+1)=I^2=J^2$, 从(2.21)可得核子和Δ的质量公式

$$M_N=M(F)+\Delta M(F)+\frac{3}{8a(F)}. \tag{2.22}$$

$$M_\Delta=M(F)+\Delta M(F)+\frac{15}{8a(F)}. \tag{2.23}$$

为了确定(2.22)和(2.23)中的 $F(r)$, 我们在这里采用文[9]导出的量子化的孤粒子运动方程

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{2\sin^2 F}{\tilde r^2}\right)F''+\frac{F'}{2\tilde r}+\frac{F'^2}{\tilde r^2}\sin 2F-\frac{\sin 2F}{4\tilde r^2}-\frac{1}{\tilde r^4}\sin^2 F\sin 2F$$
$$-\frac{2}{5a^2(F)e^2 f_\pi^2}\left[l(l+1)+\frac{1}{2}\right]\Big(F'^2\sin 2F$$
$$+\frac{2F'}{\tilde r}\sin^2 F+F''\sin^2 F-\frac{2}{\tilde r^2}\sin^2 F\sin 2F\Big)=0.$$

$$(\tilde r=ef_\pi r) \tag{2.24}$$

从(2.22)、(2.23)和(2.24)定出 $f_\pi=134.64\mathrm{MeV}$, $e=4.88$, 电荷半径、磁矩、轴矢耦合常数 g_A 等物理量均按文[8]的方式算出,其结果列表如下:

表 1

QUANTITY	OUR WORK	G. S. ADKINS[8]	EXPERIMENT
e	4.88	5.45	
M_N	*938.9(MeV)	*938.9(MeV)	938.9(MeV)
M_Δ	*1232(MeV)	*1232(MeV)	1232(MeV)
f_π	134.64(MeV)	129(MeV)	186(MeV)
$\langle r^2\rangle^{1/2}_{I=0}$	0.63(fm)	0.59(fm)	0.72(fm)
$\langle r^2\rangle^{1/2}_{M,I=0}$	0.72(fm)	0.92(fm)	0.81(fm)
μ_p	2.32	1.87	2.79
μ_n	−1.66	−1.31	−1.91
$\|\mu_p/\mu_n\|$	1.40	1.43	1.46
g_A	0.70	0.61	1.23
$g_{\pi NN}$	9.76	8.9	13.5

* 表示输入值

三、重子及其共振态能级公式

现在人们普遍把 Skyrme 提出的 $SU(2)\times SU(2)$ 手征理论的孤粒子理解为重子。按照 S. Adkins 等人提出的 Skyrme 模型，重子 N 和 Δ 分别看作是同一个孤粒子的不同转动激发态。不少作者在 Skyrme 模型框架内引进振动机制（等于把 $U(x)$ 中的 $i\boldsymbol{\tau}\cdot\hat{\boldsymbol{x}}F(r)$ 变换成 $i\boldsymbol{\tau}\cdot\hat{\boldsymbol{x}}F(r)+\xi(r,t)$）描述了重子的共振态，问题是能否引进一种振动机制，既能把重子看作孤粒子的转动激发态，又能把重子的共振态看作同一个孤粒子的振动激发态，推出一个统一描述重子及其共振态的能量公式，在这里我们考虑到振动激发态的能级差远比转动激发态的能级差大，用重子数不变的标度变换[10]引进振动机制的同时加进了附加质量 ΔM 的影响。

为此，我们从(2.1)出发，作标度变换 $U(x)\to A(t)U(xe^{\lambda(t)})A^{+}(t)$ 的同时重复上一节采用的量子力学处理方法，经过计算之后得到

$$L=\frac{1}{2}Q(\lambda)\dot{\lambda}^{2}-B(\lambda)+\frac{C(\lambda)}{2}W^{B}W^{B}-\frac{D(\lambda)}{C^{2}(\lambda)},\tag{3.1}$$

其中，

$$Q(\lambda)=e^{-3\lambda}Q_{2}+e^{-\lambda}Q_{4}.\tag{3.2}$$

$$B(\lambda)=e^{-\lambda}V_{2}+e^{\lambda}V_{4}.\tag{3.3}$$

$$C(\lambda)=e^{-3\lambda}I_{2}+e^{-\lambda}I_{4}.\tag{3.4}$$

$$D(\lambda)=D_{1}e^{-3\lambda}+e^{-\lambda}D_{2}.\tag{3.5}$$

$$Q_{2}=\frac{\pi}{e^{3}f_{\pi}}\int_{0}^{\infty}d\tilde{r}\,\tilde{r}^{4}F'^{2}.\tag{3.6}$$

$$Q_{4}=\frac{8\pi}{e^{3}f_{\pi}}\int_{0}^{\infty}d\tilde{r}\,\tilde{r}^{2}F'^{2}\sin^{2}F.\tag{3.7}$$

$$V_{2}=\frac{\pi f_{\pi}}{2e}\int_{0}^{\infty}d\tilde{r}\,\tilde{r}^{2}\left(F'^{2}+\frac{2\sin^{2}F}{\tilde{r}^{2}}\right).\tag{3.8}$$

$$V_{4}=\frac{2\pi f_{\pi}}{e}\int_{0}^{\infty}d\tilde{r}\sin^{2}F\left(2F'^{2}+\frac{\sin^{2}F}{\tilde{r}^{2}}\right).\tag{3.9}$$

$$I_{2}=\frac{4\pi}{3f_{\pi}e^{3}}\int_{0}^{\infty}d\tilde{r}\,\tilde{r}^{2}\sin^{2}F.\tag{3.10}$$

$$I_{4}=\frac{16\pi}{3f_{\pi}e^{3}}\int_{0}^{\infty}d\tilde{r}\,\tilde{r}^{2}\sin^{2}F\left(F'^{2}+\frac{\sin^{2}F}{\tilde{r}^{2}}\right).\tag{3.11}$$

$$D_{1}=-\frac{2\pi}{f_{\pi}e^{3}}\int_{0}^{\infty}d\tilde{r}\,\tilde{r}^{2}\sin^{2}F.\tag{3.12}$$

$$D_{2}=-\frac{\pi}{f_{\pi}e^{3}}\int_{0}^{\infty}d\tilde{r}\,\tilde{r}^{2}\sin^{2}F\left(2F'^{2}+\frac{\sin^{2}F}{\tilde{r}^{2}}\right).\tag{3.13}$$

从(3.1)出发，经过通常的正则量子化步骤我们可得到如下的能级公式

$$E_{n,l}=(V_{2}+V_{4})+\frac{l(l+1)}{2(I_{2}+I_{4})}+\frac{D_{1}+D_{2}}{(I_{2}+I_{4})^{2}}$$

$$+\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{V_2+V_4+\alpha_2+\beta_2}{Q_2+Q_4}\right)^{1/2}-\frac{(\alpha_1+\beta_1)^2}{2(V_2+V_4+\alpha_2+\beta_2)}, \tag{3.14}$$

其中，

$$\alpha_1=\frac{l(l+1)}{2}\frac{3I_2+I_4}{(I_2+I_4)^2}. \tag{3.15}$$

$$\alpha_2=\frac{l(l+1)}{2}\frac{9I_2^2+2I_2I_4+I_4^2}{(I_2+I_4)^3}. \tag{3.16}$$

$$\beta_1=\frac{3D_1I_2-D_1I_4+5I_2D_2+D_2I_4}{(I_2+I_4)^3}. \tag{3.17}$$

$$\beta_2=\frac{I_2^2(9D_1+25D_2)+I_2I_4(2D_2-14D_1)+I_4^2(D_1+D_2)}{(I_2+I_4)^4}. \tag{3.18}$$

现在我们把 $E_{0,\frac{1}{2}}$ 看作核子N的基态能级，$E_{1,\frac{1}{2}}$ 看作核子的振动激发态 N(1440) 的能级；$E_{0,\frac{3}{2}}$ 看作Δ的基态能级，$E_{1,\frac{3}{2}}$ 看作Δ的振动激发态 Δ(1690) 的能级，输入 $E_{0,\frac{1}{2}}=939\mathrm{MeV}$, $E_{0,\frac{3}{2}}=1232\mathrm{MeV}$ 后从(3.14)重新定出的参数值分别是 $f_\pi=155.7\mathrm{MeV}$, $e=6.2$，再由(3.14)计算 $E_{1,\frac{1}{2}}$ 和 $E_{1,\frac{3}{2}}$ 其结果如表 2 所示。

表 2

能 级	本文(不计 ΔM)	本文(计入 ΔM)	实验值
$E_{0,\frac{1}{2}}$	939MeV (输入)	939MeV (输入)	939MeV
$E_{0,\frac{3}{2}}$	1232MeV (输入)	1232MeV (输入)	1232MeV
$E_{1,\frac{1}{2}}$	1316MeV	1248MeV	1440MeV
$E_{1,\frac{3}{2}}$	1815MeV	1682MeV	1690MeV

四、结论和讨论

$SU(2)$ Skyrme 模型按文[7]的方式量子化，其结果产生新的附加质量项，从表 1 可以看出，π 衰变常数 f_π、轴矢流耦合常数 g_A、磁矩等物理量的理论值比起文[8]有不同程度的改进，这说明附加质量项 ΔM 作为量子效应不仅起到了转动孤粒子的稳定作用而且对物理参数的影响也是不可忽视的. 同时从表 2 可以看出，它对重子及其共振态能级也起着微妙的调节作用，不过在这里需要特别指出的是：

(1) 在(3.1)式中若令 $\lambda=0$，则(3.14)就变成文[7]的结果；若再不计 ΔM，则可以回到文[8]的结果。因此在这个意义上，(3.14)可以称为统一描述重子及其共振态的能级公式. 不过在推导(3.14)的过程中我们做了谐振子近似处理。

(2) 从(3.14)定出的参数值 ($f_\pi=155.7\mathrm{MeV}$, $e=6.2$)，重新计算其他物理量，大多数和文[8]得到的结果差不多，但 f_π 和 g_A 的理论值仍有较大的改进。

(3) 以上结果只限于 $I=J$ 的情况，至于推广到 $I\neq J$ 的情况，需要考虑 Coriolis 耦合，对于这方面的研究将在另文中给出。

参考文献

[1] D. Kiang, K. Nakazawa, and R. Sugano, *Phys. Rev.*, **181**(1969), 1380.

[2] H. E. Lin, W. C. LIn, and R. Sugano, *Nucl. Phys.*, **B16**(1970), 431.
[3] R. Sugano, *Prog. Theor. Phys.*, **46**(1971), 297.
[4] T. Kimura, *Prog. Theor. Phys.*, **46**(1971), 126.
[5] T. Kimura and R. Sugano, *Prog. Theor. Phys.*, **47**(1972), 1004.
[6] R. Marnelius, *Mucl. Phys.*, **B142**(1978), 108.
[7] Kanji Fujii, A. Kobushki, K. Sato and N. Tovota, *Phys. Rev.*, **D35**(1987), 1896.
[8] G. S. Adkins, C. R. Nappi and E. Witen, *Nucl. Phys.*, **B228**(1983), 552.
[9] Bing-An Li et al. *Phys. Rev.*, **B35**(1987), 1693.
[10] L. C. Biedenharn, Y. Dothan and M. Tarlini, *Phys. Rev.*, **D31**(1985), 649.

The Influence on the Baryon and Its Resonances From a New Additional Mass Term in the Skyrme Model

LIN JINHU　ZHANG SHOU　ZHENG ZHEZHU

(*Department of Physics, Yanbian University, Yanji* 133002)

ABSTRACT

This paper studied the influence on the baryon and its resonances from a new additional mass term which is derived by the Skyrme Lagr ngian after quantum mechanical treatment.