第 17 卷 第 11 期
1993 年 11 月

高能物理与核物理
HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS

Vol. 17, No. 11
Nov., 1993

带 Wilson 费米子的格点 Schwinger 模型中 $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ 的变分研究*

许国材　江俊勤
(广东教育学院物理系，广州　510303)
陈启洲
(中山大学物理系，广州　510275)

摘　要

本文用变分方法计算带 Wilson 费米子的格点 Schwinger 模型中的手征对称破缺的序参数 $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$，得到较好的结果.

一、引　言

Schwinger 模型[1]是描写 1+1 维 QED 的严格可解的模型，它具有电荷禁闭和手征对称破缺的特征[2]. 这些特征是 QCD 理论的主要性质. 利用格点规范理论研究 Schwinger 模型对于弄清非微扰 QCD 效应是有启发的. 这一研究可望推广到三维空间，对于澄清 3+1 维微扰 QED 存在的"零电荷"问题[3]也会有帮助.

近来，我们用变分法研究了哈密顿形式的格点 Schwinger 模型，计算了手征对称性自发破缺的序参数 $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ 及矢量介子的质量，取得了较好的结果. 本文在以前工作的基础上[4-7]，在幺正变换算符中加入三链项，得到的 $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ 值更为接近严格值，而且有较好的标度行为，以及不明显依赖于 Wilson 参数 r 的重要结果.

二、幺正变换与变分法

1+1 维带 Wilson 费米子的格点 Schwinger 模型的哈密顿量为[5]

$$H = \frac{g^2}{2a}\sum_x E_j^2(x) + \frac{1}{2a}\sum_{x,k}\bar{\psi}(x)\gamma_k U(x,k)\psi(x+k)$$

$$+ \frac{r}{2a}\sum_{x,k}[\bar{\psi}(x)\psi(x) - \bar{\psi}(x)U(x,k)\psi(x+k)] + m\sum_x\bar{\psi}(x)\psi(x). \qquad (1)$$

其中 $E_j(x)$ 为 $U(1)$ 规范群的生成元，$U(x,k)$ 为点阵 x 在 k 方向的规范链变量，$k=\pm1$，j

* 国家自然科学基金和中山大学高等学术中心资助.

本文 1992 年 6 月 8 日收到.

$=1,\gamma_{-k}=-\gamma_k$ 为泡利矩阵：

$$\gamma_1=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix};\quad \gamma_0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix};$$

$$\gamma_5=i\gamma_0\gamma_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}. \tag{2}$$

a、r、m 分别为格距、Wilson 参数、"quark"质量(以后计算中取 $m=0$). 无量纲的裸耦合常数 $g=ea$，e 为带质量量纲的裸耦合常数. 二分量的旋量场 $\psi(x)$ 表示为

$$\psi(x)=\begin{pmatrix}\xi(x)\\ \eta^+(x)\end{pmatrix}, \tag{3}$$

裸真空定义为 $\xi(x)|0\rangle=\eta(x)|0\rangle=E_1^2(x)|0\rangle=0$.

我们引入带费米子的规范场系统的变分真空态 $|\Omega\rangle$：

$$|\Omega\rangle=\mathrm{e}^{i\theta_1S_1+i\theta_2S_2+i\theta_3S_3}|0\rangle, \tag{4}$$

其中：

$$\begin{aligned}S_1&=i\sum_{x,k}\psi^+(x)\gamma_kU(x,k)\psi(x+k),\\ S_2&=i\sum_{x,k}\psi^+(x)\gamma_kU(x,2k)\psi(x+2k),\\ S_3&=i\sum_{x,k}\psi^+(x)\gamma_kU(x,3k)\psi(x+3k),\end{aligned} \tag{5}$$

θ_1，θ_2，θ_3 分别为变分参数，它们由真空能量

$$\mathscr{E}_\Omega=\frac{a\langle\Omega|H|\Omega\rangle}{N_l} \tag{6}$$

取极小值的条件确定，即它们满足以下方程：

$$\frac{\partial\mathscr{E}\varepsilon_\Omega}{\partial\theta_1}=0,\ \frac{\partial\mathscr{E}_\Omega}{\partial\theta_2}=0,\ \frac{\partial\mathscr{E}_\Omega}{\partial\theta_3}=0. \tag{7}$$

把(4)代入(6)，经计算得：

$$\mathscr{E}_\Omega=\frac{1}{2}g^2A-\frac{1}{2}B-rC+\frac{r}{2}D, \tag{8}$$

其中：

$$\begin{aligned}A=&\frac{1}{2}(2\theta_1)^2-\frac{1}{4}(2\theta_1)^4+\frac{5}{144}(2\theta_1)^6\\ &+(2\theta_2)^2-\frac{1}{2}(2\theta_2)^4+\frac{5}{72}(2\theta_2)^6\\ &+\frac{3}{2}(2\theta_3)^2-(2\theta_3)^4+\frac{4}{15}(2\theta_3)^6.\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}B=&[2(2\theta_1)-2(2\theta_1)(2\theta_2)^2-(2\theta_1)^3+\frac{1}{2}(2\theta_1)(2\theta_2)^4\\ &+\frac{5}{6}(2\theta_1)^3(2\theta_2)^2+\frac{1}{6}(2\theta_1)^5]\times[1-(2\theta_3)^2+\frac{1}{4}(2\theta_3)^4]\\ &+[\frac{1}{2}(2\theta_1)^2-\frac{1}{2}(2\theta_2)^2+\frac{1}{4}(2\theta_1)^2(2\theta_2)^2-\frac{5}{24}(2\theta_1)^4+\frac{1}{6}(2\theta_2)^4]\end{aligned}$$

$$\times[2(2\theta_3)-(2\theta_3)^3]. \tag{10}$$

$$\begin{aligned}C=&[1-(2\theta_1)^2-(2\theta_2)^2+(2\theta_1)^2(2\theta_2)^2+\frac{1}{4}(2\theta_1)^4\\&+\frac{1}{4}(2\theta_2)^4-\frac{1}{36}(2\theta_1)^6-\frac{1}{36}(2\theta_2)^6-\frac{1}{4}(2\theta_1)^2(2\theta_2)^4\\&-\frac{5}{24}(2\theta_1)^4(2\theta_2)^2]\times[1-(2\theta_3)^2+\frac{1}{4}(2\theta_3)^4-\frac{1}{40}(2\theta_3)^6]\\&+[\frac{1}{2}(2\theta_1)(2\theta_2)^2-\frac{1}{6}(2\theta_1)(2\theta_2)^4-\frac{1}{6}(2\theta_1)^3-\frac{1}{12}(2\theta_1)^3(2\theta_2)^2\\&+\frac{1}{24}(2\theta_1)^5]\times[2(2\theta_3)-(2\theta_3)^3].\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}D=&[-2(2\theta_1)(2\theta_2)+(2\theta_1)(2\theta_2)^3+\frac{2}{3}(2\theta_1)^3(2\theta_2)\\&-\frac{1}{6}(2\theta_1)(2\theta_2)^5-\frac{1}{3}(2\theta_1)^3(2\theta_2)^3+\frac{1}{12}(2\theta_1)^5(2\theta_2)]\\&\times[1-(2\theta_3)^2+\frac{1}{4}(2\theta_3)^4]\\&+[-(2\theta_2)+\frac{1}{2}(2\theta_1)^2(2\theta_2)+\frac{1}{2}(2\theta_2)^3-\frac{1}{12}(2\theta_1)^5\\&-\frac{1}{3}(2\theta_1)^2(2\theta_2)^3-\frac{1}{24}(2\theta_1)^4(2\theta_2)]\\&\times[2(2\theta_3)-(2\theta_3)^3+\frac{1}{6}(2\theta_3)^5].\end{aligned} \tag{12}$$

从(7)式可求得 θ_1、θ_2、θ_3 依赖于 $1/g^2$ 和 r 的值，把这些值代入

$$\begin{aligned}\frac{\langle\bar{\psi}\psi\rangle_l}{N_l}&=\frac{\langle\Omega|\sum_x\bar{\psi}(x)\psi(x)|\Omega\rangle}{N_l}\\&=\frac{\langle 0|e^{-i\theta_3S_3-i\theta_2S_2-i\theta_1S_1}\sum_x\bar{\psi}\psi e^{i\theta_1S_1+i\theta_2S_2+i\theta_3S_3}|0\rangle}{N_l}\\&=-C\end{aligned} \tag{13}$$

三、带自由 Wilson 费米子的格点理论[5]

带自由 Wilson 费米子的格点哈密顿量是

$$\begin{aligned}H=&\frac{1}{2a}\sum_{x,k}\bar{\psi}(x)\gamma_k\psi(x+k)+m\sum_x\bar{\psi}(x)\psi(x)\\&+\frac{r}{2a}\sum_{x,k}\bar{\psi}(x)[\psi(x)-\psi(x+k)].\end{aligned} \tag{14}$$

最后一项在连续极限下为零，使得当 $m=0$ 时手征对称被恢复. 这哈密顿量的物理真空态也类似地被确定为：

$$|\Omega\rangle=\exp(i\sum_p\theta_pS_p)|0\rangle, \tag{15}$$

其中

$$S_p=-\frac{1}{A_p}\sum_j \psi^+(p)\gamma_j\psi(p)\frac{\sin(p\ j\ a)}{a}$$

$$A_p=\left[\sum_j\left(\frac{\sin\ p\ j\ a}{a}\right)^2\right]^{1/2}. \tag{16}$$

经变分计算出 θ_p 后,代入可得[5]:

$$\langle\bar\psi\psi\rangle_{\rm free}=\langle 0|\exp(-i\sum_p\theta_pS_p)\Sigma\bar\psi\psi\exp(i\sum_p\theta_pS_p)|0\rangle$$

$$=-\frac{N_l}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}}{\rm d}(pa)\frac{2r\sin^2pa/2}{[(2r\sin^2pa/2)^2+\sin^2pa]^{1/2}}$$

$$=\begin{cases}0\\ -\dfrac{N_l\,r}{\pi\sqrt{1-r^2}}\left[\ln\left(\dfrac{r^2}{2}\right)-\ln\left(1-\dfrac{r^2}{2}-\sqrt{1-r^2}\right)\right],0<r<1\\ -\dfrac{2N_l}{\pi},\quad r=1\end{cases} \tag{17}$$

对于 $r\neq0$(Wilson 费米子),由于 H_r 明显地使手征对称性破缺,$\bar\psi\psi$ 会和恒等算符混合,即使在弱耦合极限下,Wilson 项也会给出非零的贡献,因此要比较其标度性时,应把它减除[5]

$$\frac{\langle\bar\psi\psi\rangle_C}{e}=\frac{\langle\bar\psi\psi\rangle_l-\langle\bar\psi\psi\rangle_{free}}{g\ N_l}. \tag{18}$$

把(13)和(17)进行具体的数值计算,并代入(18),可得如图 1 和图 2 所示的结果.

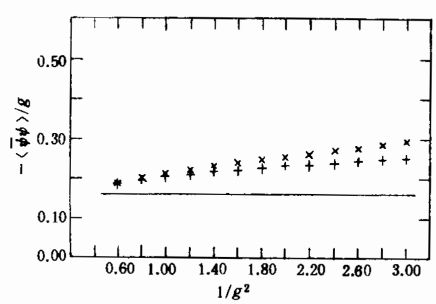

图 1　$r=1$ 时,$-(\langle\bar\psi\psi\rangle_l-\langle\bar\psi\psi\rangle_{\rm free})/gN_l$ 对 $1/g^2$ 的关系.

实线为连续理论的准确解,×和+分别表示只考虑一、二链态和考虑一、二、三链态.

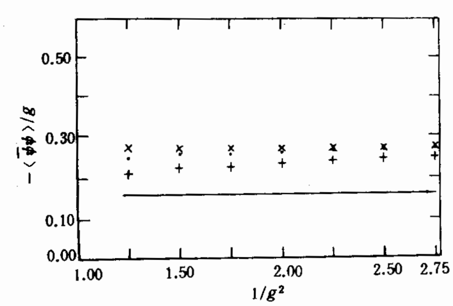

图 2　$r=1$、0.5、0.2 时,$-\langle\bar\psi\psi\rangle/g$ 与 $1/g^2$ 的关系.

×,·,+分别表示,$r=0.2$、0.5、1.0 的结果(考虑一、二、三链态),实线为连续理论的准确解.

四、讨　　论

在 Naive 费米子的 Schwinger 模型中,由 $\mathscr{E}_\Omega$ 取极值的条件可知双链项贡献为零[6].而在 Wilson 费米子的 Schwinger 模型中,双链项对压低 $\mathscr{E}_\Omega$ 起重要作用,故文献[5]中考

虑了一、二链的贡献. 本文在进行幺正变换时,进一步考虑了三链项的贡献,使计算所得的$\langle\bar{\psi}\psi\rangle$标度性较好(标度区比文献[5]有扩展),且其值与连续理论的值($\langle\bar{\psi}\psi\rangle_{\text{cont}}/e = -e^{r}/2\pi^{3/2} = -0.16$)更接近. 见图 1.

本文还计算了 Wilson 参数 r 取不同值时的$\langle\bar{\psi}\psi\rangle$. 结果表明,它对 r 的依赖关系不明显. 这符合过渡到连续理论的要求,见图 2.

参　考　文　献

[1] J. Schwinger, *Phys. Rev.*, **128**(1962), 2425.

[2] W. Marciano, H. Pagels, *Phys. Rev.*, **36C**(1978), 1043.

[3] L. Landau, in Niels Bohr and the Development of Physics, edited by W. Pauli(Pergamon, London, 1955).

[4] Lou Xiang-qian, Chen Qi-zhou, *J. Phys.*, **G16**(1990), 181.

[5] Chen Qi-zhou, Luo Xiang-qian, *Phys. Rev.*, **D42**(1990), 1293.

[6] 陈启洲,郑维宏,罗向前,方锡岩,高能物理与核物理,**15**(1991),23.

[7] 陈启洲,方锡岩,许国材,刘金明,罗向前,高能物理与核物理,**15**(1991),518.

Variational Study of $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ in the Lattice Schwinger Model with Wilson Fermions

XU GUOCAI　　JIANG JUNQIN

(*Department of Physics, Guandong College of Education, Guangzhou*, 510303)

CHEN QIZHOU

(*Department of Physics, Zhonshan University, Guangzhou* 510275)

ABSTRACT

We used the variational method in lattice gauge theory to calculate the chiral order parameter $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ in the Schwinger model with Wilson fermions.