# 背景场中夸克模型的味无关轴矢流*

陈 崑
(中国科学技术大学近代物理系,合肥 230026)

阎 沐 霖1)
(中国科学技术大学基础物理中心,合肥 230026)

## 摘 要

对于以赝标介子场为背景场的夸克模型，我们使用 Seeley-DeWitt 系数算出了味无关轴矢流，这个流与质子中的夸克自旋成分直接相关. 在大 $N_c$ 展开下,这个流是 $O(1)$.

1988年，EMC 实验意外发现[1,2]:

$$\left.\begin{aligned}\Delta u+\Delta d+\Delta s &= 0.120\pm0.094\pm0.138,\\ \Delta u &= +0.782\pm0.032\pm0.046,\\ \Delta d &= -0.472\pm0.032\pm0.046,\\ \Delta s &= -0.190\pm0.032\pm0.046,\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

这一发现对原有朴素的组份夸克模型是一挑战.近年来有很多关于该课题的理论工作,其中用背景场中夸克模型来做的分析[3,4]定量地给出了与实验相符的结果，引人注目. 这一模型研究的关键是用背景场方法来导出味无关轴矢流. 如所周知，这个流是不能直接用传统的流代数等效拉氏量求得的. [3,4] 的作者用他们所发展的传播子微分展开方法计算了这个流. 由于 Schwinger 的固有时展开法[6]是被充分研究过的标准背景场方法，将它用于手征对称性模型也有很多研究[5]，因此有必要用 Schwinger 方法来计算这个味无关轴矢流. 这对于进一步探索在背景场中有手征规范场的情形是重要的. 本文旨在用 Seeley-DeWitt 系数计算存在赝标介子背景场时的味无关轴矢流.

背景场中夸克模型的拉氏量是[3,4]:

$$\mathscr{L}=\bar{\Psi}\{i\partial\!\!\!/-mu(x)\}\Psi,\ u(x)=\exp\left\{i\gamma_5\sum_{a=1}^{8}\lambda^a\phi^a(x)\right\}, \tag{2}$$

其中,$\Psi$是夸克场，$\phi^a(x)$ 是作为背景场的赝标介子场,$m$是一参数. 味无关轴矢流为

$$A_\mu(x)=\langle\bar{\Psi}(x)\gamma_\mu\gamma_5\Psi(x)\rangle=-i\mathrm{Tr}\{\gamma_\mu\gamma_5S_F(x,y)\}|_{y\to x}, \tag{3}$$

其中，Tr{···} 对 Lorentz 空间、味空间和色空间都求迹. 拉氏量(2)式给出

$$(i\partial\!\!\!/_x-mu(x))S_F(x,y)=\delta^{(4)}(x-y), \tag{4}$$

本文1991年8月1日收到.
* 国家自然科学基金和高校博士点基金资助.
1) 中国科学院理论物理研究所客座研究人员.

$$S_F(x,y)=(i\not\partial_x+m\hat{u}(x))G^M(x,y), \tag{5}$$

$$\hat{u}(x)=\exp\left\{-i\gamma_5\sum_{a=1}^{8}\lambda^a\phi^a(x)\right\}, \tag{6}$$

其中，$\partial_x$ 表示对 $x$ 的偏导数．将(5)式代入(4)式可得

$$[\partial_x^2-im(\not\partial_x\hat{u}(x))+m^2]G^M(x,y)=-\delta^{(4)}(x-y), \tag{7a}$$

$$\Delta=\partial_x^2-im(\not\partial_x\hat{u}(x))+m^2. \tag{7b}$$

在 Schwinger 表示中，热扩散核 (heat kernel) 展开为[5]

$$\mathscr{G}(x,y;\tau)=(x|e^{-\tau\Delta}|y)=\frac{1}{(4\pi\tau)^{d/2}}e^{-|x-y|^2/4\tau}F(x,y;\tau), \tag{8a}$$

$$F(x,y;\tau)\underset{\tau\to0}{\sim}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x,y)\tau^n, \tag{8b}$$

其中，$\tau$ 是 Schwinger 固有时．(8)式满足扩散方程

$$-\frac{\partial\mathscr{G}(x,y;\tau)}{\partial\tau}=\Delta_x\mathscr{G}(x,y;\tau), \tag{9a}$$

$\mathscr{G}(x,y;\tau)$ 满足固有时 $\tau$ 的初始条件

$$\lim_{\tau\to0}\mathscr{G}(x,y;\tau)=\mathscr{G}(x,y;0)=\delta^d(x-y). \tag{9b}$$

欧氏 Green 函数为

$$G^E(x,y)\equiv(x|\Delta^{-1}|y)=\int_0^\infty d\tau(x|e^{-\tau\Delta}|y). \tag{10}$$

将(8)式代入(9)式，可得 Seeley-DeWitt 系数的递推关系为[5]：

$$\left.\begin{aligned}&a_0(x,y)=1,\\&na_n(x,y)+(x-y)_\mu\partial_\mu^x a_n(x,y)=-\Delta_x a_{n-1}(x,y),\ n\geqslant1,\\&\Delta=-\partial^2+Y,\ Y\ \text{是}\ C^\infty\ \text{矩阵函数}.\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

使用[5]中的记号

$$a_n|\equiv a_n(x,y)|_{x=y},\quad \vec{\partial}_\mu a_n|\equiv\partial_\mu^x a_n(x,y)|_{x=y},$$
$$\{A,B\}\equiv AB+BA,\ \{A|B|C\}\equiv ABC+CBA,$$

利用递推关系式(11)进行计算，精确到 $O(\partial^5)$，并注意到 $Y\propto O(\partial)$（见后面），我们有：

$$a_0|=1, \tag{12a}$$

$$a_1|=-Y, \tag{12b}$$

$$a_2|=\frac{1}{2}Y^2-\frac{1}{6}\partial^2Y, \tag{12c}$$

$$a_3|=-\frac{1}{6}Y^3+\frac{1}{12}(\{Y,\partial^2Y\}+\partial_\sigma Y\partial_\sigma Y)-\frac{1}{60}\partial^2\partial^2Y, \tag{12d}$$

$$\begin{aligned}a_4|=&\frac{1}{24}Y^4-\frac{1}{40}\{\partial^2Y,Y^2\}-\frac{1}{30}Y\partial^2YY-\frac{1}{30}\{Y,\partial_\sigma Y\partial_\sigma Y\}\\&-\frac{1}{60}\partial_\sigma YY\partial_\sigma Y+O(\partial^6),\end{aligned} \tag{12e}$$

$$a_5|=-\frac{1}{120}Y^5+O(\partial^6), \tag{12f}$$

$$\vec{\partial}_\mu a_0| = 0, \tag{13a}$$

$$\vec{\partial}_\mu a_1| = -\frac{1}{2}\partial_\mu Y, \tag{13b}$$

$$\vec{\partial}_\mu a_2| = \frac{1}{3}\partial_\mu YY + \frac{1}{6}Y\partial_\mu Y - \frac{1}{12}\partial_\mu\partial^2 Y, \tag{13c}$$

$$\begin{aligned}\vec{\partial}_\mu a_3| = & -\frac{1}{8}\partial_\mu YY^2 - \frac{1}{12}Y\partial_\mu YY - \frac{1}{24}Y^2\partial_\mu Y \\ & + \frac{1}{20}\partial_\mu\partial^2 YY + \frac{1}{40}\partial^2 Y\partial_\mu Y + \frac{1}{20}\partial_\mu\partial_\sigma Y\partial_\sigma Y \\ & + \frac{1}{30}\partial_\sigma Y\partial_\mu\partial_\sigma Y + \frac{7}{120}\partial_\mu Y\partial^2 Y + \frac{1}{30}Y\partial_\mu\partial^2 Y \\ & + O(\partial^6),\end{aligned} \tag{13d}$$

$$\begin{aligned}\vec{\partial}_\mu a_4| = & \frac{1}{30}\partial_\mu YY^3 + \frac{1}{40}Y\partial_\mu YY^2 + \frac{1}{60}Y^2\partial_\mu YY \\ & + \frac{1}{120}Y^3\partial_\mu Y + O(\partial^6).\end{aligned} \tag{13e}$$

注意,(12)式和(13)式是在欧氏空间中得到的。

经过从欧氏空间到闵氏空间的转动后,将(10)式代入(5)式得

$$\begin{aligned}S_F(x,y)|_{y\to x} &= (i\not\partial_x + m\hat{u}(x))(-i)\int_0^\infty d\tau(x|e^{-\tau\Delta}|y)|_{y\to x} \\ &= (-i)(i\not\partial_x + m\hat{u}(x))\int_0^\infty d\tau(x|e^{-\tau[\partial_x^2 - im(\not\partial_x\hat{u}(x)) + m^2]}|y)|_{y\to x} \\ &= (-i)(i\not\partial_x + m\hat{u}(x))\int_0^\infty d\tau(x|e^{-\tau\Delta'}|y)|_{y\to x}e^{-\tau m^2},\end{aligned} \tag{14}$$

其中,

$$\Delta' = \partial_x^2 - im(\not\partial_x\hat{u}(x)) = \partial_x^2 + Y,\quad Y = -im(\not\partial_x\hat{u}(x)). \tag{15}$$

利用(8)式展开 $(x|e^{-\tau\Delta'}|y)$,

$$S_F(x,y)|_{y\to x} = (-i)\int_0^\infty \frac{d\tau}{(4\pi\tau)^{d/2}}\sum_{n=0}^\infty (i\gamma^\nu\vec{\partial}_\nu a'_n| + m\hat{u}(x)a'_n|)\cdot\tau^n e^{-\tau m^2}. \tag{16}$$

注意在上式中,$a'_n|$ 和 $\vec{\partial}_\nu a'_n|$ 分别由 $a_n|$ 和 $\vec{\partial}_\nu a_n|$ 旋转至闵氏空间而得。由于不含微分符号的因子 $e^{-\tau m^2}$ 已经分离出来,$Y\propto\partial$, 所以这时 $S_F$ 对固有时 $\tau$ 的展开式(16)也是对微分 $\partial$ 的展开式。我们进而得到味无关轴矢流为

$$A_\mu(x) = \sum_{n=0}^\infty\int_0^\infty \frac{d\tau}{(4\pi\tau)^{d/2}}\tau^n e^{-\tau m^2}\mathrm{Tr}\{\gamma_5\gamma_\mu(i\gamma^\nu\vec{\partial}_\nu a'_n| + m\hat{u}(x)a'_n|)\}, \tag{17}$$

这是 $A_\mu(x)$ 的微分展开式,即

$$A_\mu(x) = \sum_{n=0}^\infty A_\mu(\partial^n). \tag{17'}$$

由于是低能展开,微分次数低的项在物理上重要。我们还要进行大 $N_c$ 展开分析,找出 $A_\mu(x)$ 的领头项。最后由于

$$\overline{A}_3 = \int d^3x\langle p|A_3(x)|p\rangle \propto \Delta u + \Delta d + \Delta s, \tag{18}$$

我们只需讨论 $A_\mu$ 的空间分量的平均值 $\overline{A}_i(i=1,2,3)$，舍去其为 0 的项。

首先完成(17)式右边对 $\gamma$ 矩阵的求迹运算. 由于对奇数个 $\gamma$ 矩阵求迹为 0，直接的计算表明，所有含有偶数次微分运算的项为 0，即

$$A_\mu(\partial^0) = A_\mu(\partial^2) = A_\mu(\partial^4) = \cdots = 0. \tag{19}$$

由(12)、(13)和(17)式得，含一次微分的项为

$$A_\mu(\partial) = \int_0^\infty \frac{d\tau}{(4\pi\tau)^{d/2}}\tau e^{-\tau m^2}\mathrm{Tr}\{\gamma_5\gamma_\mu m\hat{u}(x)(-Y)\}$$

$$= \frac{-iN_c}{2\pi^2}\frac{m^2}{\varepsilon}\mathrm{Tr}(\partial_\mu UU^+), \tag{20}$$

式中 $\varepsilon = 4-d$，$d$ 是时空维数，$\mathrm{Tr}(\cdots)$ 只对味空间求迹，

$$U = A(t)\exp(i\boldsymbol{\tau}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}F(r))A^+(t),$$

由于

$$\overline{A_i(\partial)} = 0, \tag{21}$$

$A_\mu(\partial)$ 可以舍去. 同理可得三次微分项为

$$A_\mu(\partial^3) = \int_0^\infty \frac{d\tau}{(4\pi\tau)^{d/2}}\tau^2 e^{-\tau m^2}\mathrm{Tr}\left\{\gamma_5\gamma_\mu m\hat{u}(x)\frac{1}{6}\partial^2 Y\right\}$$

$$+ \int_0^\infty \frac{d\tau}{(4\pi\tau)^{d/2}}\tau^3 e^{-\tau m^2}\mathrm{Tr}\left\{\gamma_5\gamma_\mu m\hat{u}(x)\left(-\frac{1}{6}Y^3\right)\right\}$$

$$+ \int_0^\infty \frac{d\tau}{(4\pi\tau)^{d/2}}\tau^2 e^{-\tau m^2}\mathrm{Tr}\left\{\gamma_5\gamma_\mu i\gamma^\nu\left(\frac{1}{3}\partial_\nu YY + \frac{1}{6}Y\partial_\nu Y\right)\right\}$$

$$= -\frac{iN_c}{24\pi^2}\mathrm{Tr}(\partial^2 U\partial_\mu U^+ - \partial^2 U^+\partial_\mu U - \partial^2(\partial_\mu UU^+) + L_\mu L_\nu L^\nu), \tag{22}$$

式中 $L_\mu = \partial_\mu UU^+$. (22) 式不为 0 的项是

$$-\frac{iN_c}{24\pi^2}\mathrm{Tr}(\partial_t^2 U\partial_i U^+ - \partial_t^2 U^+\partial_i U + L_i L_0 L^0), \tag{23}$$

在大 $N_c$ 展开下，上式中的 $\partial_t \propto \frac{1}{N_c}$，所以可见

$$A_\mu(\partial^3) \propto O(1/N_c), \tag{24}$$

与文献[3]一致. 下面我们将看到 $A_\mu(\partial^5)\propto O(1)$，所以 $A_\mu(\partial^3)$ 并不是领头项，一些作者把这一项当作领头项来加以研究显然是不正确的[7,8]. 利用 Seeley-DeWitt 系数 $a_3|$、$a_4|$、$a_5|$ 和 $\overline{\partial}_\nu a_3|$、$\overline{\partial}_\nu a_4|$ (方程 (12)(13) 式)，通过和上面一样的直接计算，可以求得 $A_\mu(\partial^5)$. 舍去对 $A_i(\partial^5)$ 没有贡献的项，只保留 $A_\mu(\partial^5)$ 的领头项，我们有

$$A_\mu(\partial^5) = -\frac{N_c}{15m^2(4\pi)^2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Tr}(L^\nu L^\rho L^\lambda\partial_\lambda L^\sigma + R^\nu R^\rho R^\lambda\partial_\lambda R^\sigma), \tag{25}$$

其中 $R^\nu = U^+\partial^\nu U$. 容易看出，由于有全反对称张量 $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$，所以 $A_i(\partial^5)$中仅有一次对时间的微分，可见在大 $N_c$ 展开下，

$$A_\mu(\partial^5)\propto O(1). \tag{26}$$

这样,由(17),式,在低能大 $N_c$ 展开下,我们有

$$A_\mu(x) = -\frac{N_c}{15m^2(4\pi)^2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Tr}(L^\nu L^\rho L^\lambda\partial_\lambda L^\sigma + R^\nu R^\rho R^\lambda\partial_\lambda R^\sigma) + O(1/N_c). \tag{27}$$

进一步由这个流来计算质子的夸克自旋成份,需要使用 $F(r)$ 的运动方程。由于 $A_\mu$ 中的微分数目大于3,我们同样需要考虑等效拉氏量中高次微分项对 $F(r)$ 运动方程的贡献,李和阎曾做过这样的定量计算,得到与实验相符的结果[4]。但是由于有来自背景场方法的所谓不稳定项[9],这种计算有一定的人为性和不确定性,对此,进一步的研究正在进行。最后,$A_\mu(x)$ ((27)式)的反常数学结构,是个有趣的数学物理问题,它的拓扑起源、它和规范理论中反常的关系有待进一步探讨。

## 参考文献

[1] J. Ashman et al. (EMC collaboration), *Phys. Lett.*, **206B**, (1988), 364.
[2] J. Ashman et al. (EMC collaboration), *Nucl. Phys.*, **B328**(1989), 1.
[3] Bing An Li, Mu Lin Yan and Keh Fei Liu, *Phys. Rev.*, **D43**(1991), 1515.
[4] Bing An Li and Mu Lin Yan, *Phys. Lett.*, **B282**(1992), 435.
[5] R. D. Ball, *Phys. Reports*, **182**(1989), 1—189.
[6] J. Schwinger, *Phys. Rev.*, 93(1951), 664.
[7] S. Brodsky, J. Ellis and M. Karliner, *Phys. Lett.*, **B206**(1988), 309.
[8] Z. Ryzak, *Phys. Lett.*, **B217**(1989), 325.
[9] I. Aitchison et al., *Phys. Lett.*, **165B**(1985), 162.

# Flavor-Singlet Axial-Vector Current in Quark Model Within Background Field

CHEN KUN
*(University of Science and Technology of China, Hefei, 230026)*

YAN MULIN
*(Fundamental Physics Center, University of Science and Technology of China, Hefei 230026)*

ABSTRACT

We calculate the flavor-singlet axial-vector current in a quark model within pseudoscalar background-field through the Seeley-DeWitt coefficients. This current is responsible for the quark spin content of proton, and is of $O(1)$ in the large-$N_c$ expansion.