第 17 卷 第 5 期
1993 年 5 月
高能物理与核物理
HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS
Vol. 17, No. 5
May, 1993

从可积条件到共形对称：玻色超共形 Toda 模型

赵 柳
（西北大学现代物理研究所 西安 710069）

摘 要

本文研究从 WZNW 模型的二阶共形约化得到的新模型—玻色超共形 Toda 模型. 从约化过程得出了模型的运动方程及 Lax pair 线性方程组，进而在主阶化的特殊情形下求出了 r 矩阵、基本 Poisson 关系. 手征交换代数以及经典顶角算子.

一、引 言

可积系与共形场是(1＋1)维物理学中十分重要的课题. 在经典水平上，如果一个(1＋1)维动力系统是共形不变的，那么它一定可积，但反过来则不一定. 在共形的可积理论中，Toda 模型受到了相当多的重视. 对这种模型，共形性与可积性互为因果，而联系这两种重要属性的手段之一是经典交换代数[1].

可积意味着存在 Yang-Baxter 方程. 对 Toda 模型，前人已通过寻找基本 Poisson 关系给出了经典 Yang-Baxter 方程的解(r 矩阵)[1−3]，而且，通过 Dressing 变换，相应的量子模型的量子群对称也得到了解释[4].

共形性的标志是共形 Virasoro 代数及其扩张—W 代数. Toda 模型的 W 代数对称性也已获得了众多的研究[5,6]，最近的一个重要进展是了解到这种对称性可以利用 WZNW 模型的共形约化来解释. 同时这种约化手段本身也提供了构造更多的共形可积模型及广义 W 代数的一种途径[7−9].

本文研究 WZNW 模型在二阶共形约化下得到的新模型—玻色超共形 Toda 模型[9]. 这种模型具有扩展 W 代数 $W[\mathscr{G}(H,2)]$的对称性[10]，其中 H 标识约束所相应的李代数的阶化. 我们在主阶化的特殊情形下研究相应模型的可积性质，建立了由经典 r 矩阵标志的基本 Poisson 括号，进而给出了平征算子满足的交换代数. 本文的结果显示，我们的模型和通常的 Toda 模型有相似的性质，如共同的 r 矩阵、相似的交换代数等等，而且也有可能从它的可积性出发获得与其共形对称性有关的各种信息.

本文 1992 年 1 月 8 日收到.

二、模型的构造

设 $\mathscr{G}$ 是一个 n 秩有限维实李代数,具有不可分解的对称化 Cartan 短阵 K. $\mathscr{G}$ 的 Chevalley 生成关系为

$$\begin{aligned} &[H_i,E_j]=K_{ij}E_j, && [H_i,F_j]=-K_{ij}F_j, \\ &[H_i,H_j]=0, && [E_i,F_j]=\delta_{ij}H_j, \\ &(adE_i)^{1-K_{ij}}E_j=0, && (adF_i)^{1-K_{ij}}F_j=0, \qquad (i\neq j) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Killing 型的不平庸分量为

$$\langle H_i,H_j\rangle=K_{ij}, \qquad \langle E_i,F_j\rangle=\delta_{ij}. \tag{2.2}$$

在 $\mathscr{G}$ 的 Cartan 子代数中选一个元素 H,可将 $\mathscr{G}$ 按 $ad(H)$ 的本征值作整数阶化[10]. 在每一阶化方案下,$\mathscr{G}$ 有唯一确定的分解

$$\mathscr{G}=N_-\oplus D\oplus N_+, \tag{2.3}$$

其中 $N_\pm=\oplus N^{(\pm k)}$ 分别为正、负阶子代数,D 为零阶子代数.

假定我们已选定一个阶化方案. 在 $N^{(\pm 2)}$ 中分别选择一个不退化的常元素 μ,ν,即

$$ad(H)\mu=2\mu, \qquad ad(H)\nu=-2\nu. \tag{2.4}$$

考虑如下的作用量

$$\begin{aligned} I(g,A_\pm,\Psi_\pm)=&S_{\mathrm{WZNW}}(g)+\frac{\kappa}{2}\int d^2\xi\langle\bar{\Psi}_-\,\partial_+\Psi_-+\bar{\Psi}_+\,\partial_-\Psi_+\rangle \\ &+\kappa\int d^2\xi\langle A_-\,\partial_+ gg^{-1}+A_+\,g^{-1}\partial_- g+A_-\,gA_+\,g^{-1}\rangle-\kappa\int d^2\xi\langle A_-\,U+A_+\,V\rangle, \end{aligned} \tag{2.5}$$

式中

$$U=\bar{\Psi}_++\mu, V=\bar{\Psi}_-+\nu, \bar{\Psi}_+=[\mu,\Psi_+], \bar{\Psi}_-=[\Psi_-,\nu], \tag{2.6}$$

而且场 $\Psi_\pm\in N^{(\mp1)}$, $A_\pm\in N_\pm$. 可以验证,作用量(2.5)在如下的规范变换下不变,

$$\begin{aligned} &g\to\alpha g, && g\to g\beta^{-1}, \\ &A_-\to\alpha A_-\,\alpha^{-1}+\alpha\partial_-\,\alpha^{-1}, && A_+\to\beta A_+\,\beta^{-1}+\partial_+\,\beta\beta^{-1}, \\ &\Psi_+\to\Psi_+-(\log\alpha)^{(-1)}, && \Psi_-\to\Psi_-+(\log\beta)^{(1)}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

其中 $\alpha\in\exp(N_-)$, $\beta\in\exp(N_+)$, $X^{(k)}\in N^{(k)}$.

相应于(2.5)式的 Enler-Lagrange 方程为

$$\partial_-\,(\partial_+\,gg^{-1}+gA_+\,g^{-1})+[A_-,\partial_+\,gg^{-1}+gA_+\,g^{-1}]+\partial_+\,A_-=0, \tag{2.8a}$$

$$\partial_+\,(g^{-1}\partial_-\,g+g^{-1}A_-\,g)+[g^{-1}\partial_-\,g+g^{-1}A_-\,g,A_+]+\partial_-\,A_+=0, \tag{2.8b}$$

$$\langle N_-,\partial_+\,gg^{-1}+gA_+\,g^{-1}-U\rangle=0, \tag{2.8c}$$

$$\langle N_+,g^{-1}\partial_-\,g+g^{-1}A_-\,g-V\rangle=0, \tag{2.8d}$$

$$\partial_+\,\Psi_--(A_+)^{(1)}=0, \tag{2.8e}$$

$$\partial_-\,\Psi_+-(A_-)^{(-1)}=0. \tag{2.8f}$$

由于规范对称性(2.7),这些运动方程并不完全独立. 按(2.3)式,我们可将群元 $g(x)$ 局域地写为

$$g = ABC, A \in \exp(N_-), B \in \exp(D), C \in \exp(N_+). \tag{2.9}$$

于是，利用规范条件

$$g = B, \tag{2.10a}$$

我们得到

$$A_+ = B^{-1}UB, \qquad A_- = BVB^{-1}. \tag{2.10b}$$

将(2.10)代入(2.8)，我们有

$$\partial_-(\partial_+ BB^{-1}) + [B\bar{\Psi}_- B^{-1}, \bar{\Psi}_+] + [B\nu B^{-1}, \mu] = 0, \tag{2.11a}$$

$$\partial_+(B^{-1}\partial_- B) - [B^{-1}\bar{\Psi}_+ B, \bar{\Psi}_-] - [B^{-1}\mu B, \nu] = 0, \tag{2.11b}$$

$$\partial_+ \Psi_- = B^{-1}\bar{\Psi}_+ B, \tag{2.11c}$$

$$\partial_- \Psi_+ = B\bar{\Psi}_- B^{-1}. \tag{2.11d}$$

方程组(2.11)被称为相应于 H 的整数阶化下的玻色超共形 Toda 模型[10].

模型(2.11)的 Lax pair 表示也可以从上述规范固定过程中得到. 将(2.8a、b)两式视为如下线性组的兼容性条件，

$$\begin{cases} \partial_+ T_L = (\partial_+ gg^{-1} + gA_+ g^{-1})T_L, \\ \partial_- T_L = - A_- T_L, \end{cases} \tag{2.12}$$

$$\begin{cases} \partial_+ T_R = A_+ T_R, \\ \partial_- T_R = - (g^{-1}\partial_- g + g^{-1}A_- g)T_R. \end{cases} \tag{2.13}$$

将规范条件(2.10)分别代入(2.12)及(2.13)即得如下的 Lax pair，

$$\begin{cases} \partial_+ T_L = (\partial_+ BB^{-1} + \bar{\Psi}_+ + \mu)T_L, \\ \partial_- T_L = - (B\bar{\Psi}_- B^{-1} + B\nu B^{-1})T_L; \end{cases} \tag{2.14}$$

$$\begin{cases} \partial_+ T_R = (B^{-1}\bar{\Psi}_+ B + B^{-1}\mu B)T_R, \\ \partial_- T_R = - (B^{-1}\partial_- B + \bar{\Psi}_- + \nu)T_R. \end{cases} \tag{2.15}$$

易见，这两个线性组仅差一规范变换

$$T_L = BT_R. \tag{2.16}$$

三、主阶化的情形

系统(2.11)的有效作用量为

$$I[B, \Psi_\pm] = S_{WZNW}(B) + \frac{\kappa}{2}\int d^2\xi \langle \bar{\Psi}_+ \partial_- \Psi_+ + \bar{\Psi}_- \partial_+ \Psi_- \rangle$$
$$- \kappa\int d^2\xi \langle B^{-1}\bar{\Psi}_+ B\bar{\Psi}_- + B^{-1}\mu B\nu \rangle. \tag{3.1}$$

在主阶化下，选取

$$B = \exp\Psi \equiv \exp(\sum_{i=l}^{n}\varphi^i H_i), \Psi_+ = \sum_{i=1}^{n}\psi_i^+ F_i, \Psi_- = \sum_{i=1}^{n}\psi_i^- E_i, \tag{3.2}$$

同时约束矩阵 μ 和 ν 选为

$$\mu = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{sign}(i-j)[E_i, E_j], \nu = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{sign}(j-i)[F_i, F_j], \tag{3.3}$$

将这些参数化代入(3.1)中去，我们得到

$$\begin{aligned}
I[\varphi,\psi^\pm] = & \frac{\kappa}{2}\int \mathrm{d}^2x \sum_{i,j}\sum_{\mu,\nu} g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi^i K_{ij}\partial_\nu\varphi^j \\
& + \frac{\kappa}{2}\int \mathrm{d}^2\xi \sum_{ij}\mathrm{sign}(i-j)(\psi_i^- K_{ij}\partial_+\psi_j^- + \psi_i^+ K_{ij}\partial_-\psi_j^+) \\
& - \kappa\int \mathrm{d}^2\xi\{\sum_{i,j,k}\mathrm{sign}(i-j)\mathrm{sign}(k-j)\psi_i^+ K_{ij}\psi_k^- K_{kj}\omega_j - \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\\(i\neq j)}}\omega^i\omega^j K_{ij}\}, \\
& \omega^j \equiv \exp(-\sum_i \varphi^i K_{ij}).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

相应地，系统的运动方程可以写为

$$\partial_+\partial_-\varphi^j - \sum_{i,k}\mathrm{sign}(i-j)\mathrm{sign}(k-j)\psi_i^- K_{ij}\psi_k^+ K_{kl}\omega_j + \sum_{\substack{i\\(i\neq j)}}\omega_i\omega_j K_{ij} = 0, \tag{3.5a}$$

$$\partial_+\psi_j^- = \sum_i \mathrm{sign}(i-j)\psi_i^+ K_{ij}\omega_j, \tag{3.5b}$$

$$\partial_-\psi_j^+ = \sum_i \mathrm{sign}(i-j)\psi_i^- K_{ij}\omega_j. \tag{3.5c}$$

Lax pair(2.14)及(2.15)也可用上述参数化重新写出．为简单计，我们采用如下的简短的形式

$$\begin{cases}\partial_+ T_\mathrm{L} = (\partial_+\Phi + \bar{\Psi}_+ + \mu)T_\mathrm{L}, \\ \partial_- T_\mathrm{L} = -(\mathrm{e}^{ad\Phi}\bar{\Psi}_- + \mathrm{e}^{ad\Phi}\nu)T_\mathrm{L};\end{cases} \tag{3.6}$$

$$\begin{cases}\partial_+ T_\mathrm{R} = (\mathrm{e}^{-ad\Phi}\bar{\Psi}_+ + \mathrm{e}^{-ad\Phi}\mu)T_\mathrm{R}, \\ \partial_- T_\mathrm{R} = -(\partial_-\Phi + \bar{\Psi}_- + \nu)T_\mathrm{R},\end{cases} \tag{3.7}$$

式中，

$$\Phi = \sum_i \varphi^i H_i, \bar{\Psi}_+ = \sum_{ij}\mathrm{sign}(i-j)K_{ij}\Psi_i^+ E_j, \bar{\Psi}_- = \sum_{ij}\mathrm{sign}(i-j)K_{ij}\Psi_i^- F_j,$$

而 μ 和 ν 由(3.3)式给出．

为以后应用，我们在这里写出作用量(3.4)所定义的正则 Poisson 括号．它们是

$$\begin{aligned}
& \{\partial_0\varphi^i(x), \varphi^j(y)\} = \frac{2}{\kappa}(K^{-1})^{ji}\delta(x-y), \\
& \{\frac{\kappa}{2}\sum_l \mathrm{sign}(l-i)\Psi_l^\pm(x)K_{li}, \Psi_j^\mp(y)\} = \delta_{ij}\delta(x-y), \\
& \{\varphi^i(x), \varphi^j(y)\} = \{\partial_0\varphi^i(x), \partial_0\varphi^j(y)\} = \{\varphi^i(x), \psi_j^\pm(y)\} = \{\psi_i^+(x), \psi_j^-(y)\} = 0,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

式中 $\partial_0=\frac{1}{2}(\partial_+ + \partial_-)$（相应地 $\partial_1=\frac{1}{2}(\partial_+ - \partial_-)$）. 从(3.8)式还容易求出

$$\{\partial_0\varphi^i(x),\omega^j(y)\}=-\frac{2}{\kappa}\delta_{ij}\omega^j(y)\delta(x-y),$$

进而

$$\{\partial_0\varphi^i(x),[\omega^j(y)]^{\frac{1}{2}}\}=-\frac{1}{\kappa}\delta_{ij}[\omega^j(y)]^{\frac{1}{2}}\delta(x-y). \tag{3.9}$$

在本节最后，我们讨论一下方程(3.5)的共形对称性质. 假定坐标 x_+，x_- 作如下共形变换

$$x_+\to f(x_+),\qquad x_-\to h(x_-), \tag{3.10}$$

那么方程组(3.5)不变的条件为

$$\varphi^i(x)\to\tilde{\varphi}^i(x)=\varphi^i(x)+\frac{1}{2}\sum_j(K^{-1})^{ji}\log f'(x_+)h'(x_-), \tag{3.11a}$$

$$\psi_i^+(x)\to\tilde{\psi}_i^+(x)=(f'(x_+))^{-\frac{1}{2}}\psi_i^+(x), \tag{3.11b}$$

$$\psi_i^-(x)\to\tilde{\psi}_i^-(x)=(h'(x_-))^{-\frac{1}{2}}\psi_i^-(x_+,x_-). \tag{3.11c}$$

所以，场 $\varphi^i(x)$ 的共形权为(0,0)，但不是 primary 场，ψ_i^+ 的共形权为 $(-\frac{1}{2},0)$，ψ_i^- 的共形权为 $(0,-\frac{1}{2})$，两者均为 primary 场. 这种整数-半整数共形谱的出现正是我们将这种模型命名为玻色超共形 Toda 模型的原因.

四、r 矩阵和基本 Poisson 关系

在主阶化下，方程(2.16)变成

$$e^{\Phi}T_R=T_L. \tag{4.1}$$

以 $e^{-\frac{1}{2}\Phi}$ 左乘上式，得

$$T\equiv e^{-\frac{1}{2}\Phi}T_L=e^{\frac{1}{2}\Phi}T_R. \tag{4.2}$$

因此，我们可分别用 $e^{-\frac{1}{2}\Phi}$ 和 $e^{\frac{1}{2}\Phi}$ 对(3.6)和(3.7)两个线性系作规范变换，同时将光锥坐标换回到普通的时空坐标，结果都得到

$$\begin{cases}\partial_0 T=\frac{1}{2}A_0T,A_0=\partial_1\Phi+e^{-\frac{1}{2}ad\Phi}(\bar{\Psi}_+ +\mu)-e^{\frac{1}{2}ad\Phi}(\bar{\Psi}_- +\nu), & (4.3a)\\ \partial_1 T=\frac{1}{2}A_1T,A_1=\partial_0\Phi+e^{-\frac{1}{2}ad\Phi}(\bar{\Psi}_+ +\mu)+e^{\frac{1}{2}ad\Phi}(\bar{\Psi}_- +\nu). & (4.3b)\end{cases}$$

利用上节给出的 Poisson 括号容易求出

$$\begin{aligned}\{A_1(x)\underset{,}{\otimes}A_1(y)\}=&\frac{1}{\kappa}\sum_{ij}\mathrm{sign}(i-j)\{\psi_i^+K_{ij}[\omega_j]^{\frac{1}{2}}(E_j\otimes H_j-H_j\otimes E_j)\\&+\psi_i^-K_{ij}[\omega_j]^{\frac{1}{2}}(F_j\otimes H_j-H_j\otimes F_j)+\frac{1}{2}[\omega_i\omega_j]^{\frac{1}{2}}[([E_i,E_j]\otimes(H_i+H_j)\\&-(H_i+H_j)\otimes[E_i,E_j])+((H_i+H_j)\otimes[F_i,F_j]-[F_i,F_j]\otimes(H_i+H_j))\\&+2K_{ij}(E_i\otimes E_j-E_j\otimes E_i+F_i\otimes F_j-F_j\otimes F_i)]\}\delta(x-y).\end{aligned} \tag{4.4}$$

另一方面，对于 $r\in\mathscr{G}\otimes\mathscr{G}$，我们有

$$[r,A_1(x)\otimes 1+1\otimes A_1(y)]\delta(x-y)=\sum_i \partial_0\phi[r,H_i\otimes 1+1\otimes H_i]\delta(x-y)+$$

$$+\sum_{ij}\mathrm{sign}(i-j)\psi_i^+K_{ij}[\omega_j]^{\frac{1}{2}}[r,E_j\otimes 1+1\otimes E_j]\delta(x-y)$$

$$+\sum_{ij}\mathrm{sign}(i-j)\psi_i^-K_{ij}[\omega_j]^{\frac{1}{2}}[r,F_j\otimes 1+1\otimes F_j]\delta(x-y)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{ij}\mathrm{sign}(i-j)[\omega_i\omega_j]^{\frac{1}{2}}[r,[E_i,E_j]\otimes 1+1\otimes[E_i,E_j]-$$

$$[F_i,F_j]\otimes 1-1\otimes[F_i,F_j]]\delta(x-y). \tag{4.5}$$

令(4.4)和(4.5)相等，即

$$\{A_1(x)\underset{,}{\otimes}A_1(y)\}=[r,A_1(x)\otimes 1+1\otimes A_1(y)]\delta(x-y), \tag{4.6}$$

我们有

$$[r,H_i\otimes 1+1\otimes H_i]=0, \tag{4.7a}$$

$$[r,E_j\otimes 1+1\otimes E_j]=\frac{1}{\kappa}(E_j\otimes H_j-H_j\otimes E_j), \tag{4.7b}$$

$$[r,F_j\otimes 1+1\otimes F_j]=\frac{1}{\kappa}(F_j\otimes H_j-H_j\otimes F_j), \tag{4,7c}$$

$$[r,[E_i,E_j]\otimes 1+1\otimes[E_i,E_j]-[F_i,F_j]\otimes 1-1\otimes[F_i,F_j]]$$

$$=\frac{1}{\kappa}\{[E_i,E_j]\otimes(H_i+H_j)-(H_i\otimes H_j)\otimes[E_i,E_j]+2K_{ij}(E_i\otimes E_j-E_j\otimes E_i)$$

$$+(H_i+H_j)\otimes[F_i,F_j]-[F_i,F_j]\otimes(H_i+H_j)+2K_{ij}(F_i\otimes F_j-F_j\otimes F_i)\}. \tag{4.7d}$$

(4.7a—c)正是求通常的 Toda 模型的 r 矩阵时遇到的方程[3]. (4.7d)与前三个方程并不相互独立，可以简单地通过 Jacobi 等式及(4.7b,c)推出(4.7d). 因此我们得出一个重要结论，即我们的模型与通常的 Toda 模型具有相同的 r 矩阵，

$$r=-\frac{1}{\kappa}\sum_{\alpha>0}(E_\alpha\otimes F_\alpha-F_\alpha\otimes E_\alpha)+\lambda C, \tag{4.8}$$

其中 λ 是一个任意常数，C 是 Casimir 元

$$C=\sum_{ij}(K^{-1})^{ij}H_i\otimes H_j+\sum_{\alpha>0}(E_\alpha\otimes F_\alpha+F_\alpha\otimes E_\alpha), \tag{4.9}$$

$$[C,X\otimes 1+1\otimes X]=0,\forall\ X\in\mathscr{G}. \tag{4.10}$$

若令 r 满足经典 Yang-Baxter 方程，则 r 中的 λ 只能取两个特定的值，它们给出

$$r^+=-\frac{1}{\kappa}\{\sum_{ij}(K^{-1})^{ij}H_i\otimes H_j+2\sum_{\alpha>0}E_\alpha\otimes F_\alpha\}, \tag{4.11a}$$

$$r^-=\frac{1}{\kappa}\{\sum_{ij}(K^{-1})^{ij}H_i\otimes H_j+2\sum_{\alpha>0}F_\alpha\otimes E_\alpha\}. \tag{4.11b}$$

利用(4.3)式，可将(4.6)式积分，结果为[1]

$$\{T(x) \underset{,}{\otimes} T(x)\} = \frac{1}{2}[r, T(x) \otimes T(x)]. \tag{4.12}$$

注意(4.12)中 $T(x)$是超定域的,即

$$T(x) = T(x,y)T(y). \tag{4.13}$$

若取归一化 $T(0)=1$,则 T 可视为 transport 矩阵.

五、手征算子 $\xi(x)$,$\bar{\xi}(x)$及其交换代数

现在我们来研究模型(3.5)的共形性质.选定 $\mathscr{G}$ 的一个有限维表示 ρ,其最高(低)权矢量记为$<\lambda_{\max}^{(\rho)}|$($<\lambda_{\min}^{(\rho)}|$).由(3.6)及(3.7)易得

$$\partial_{-} < \lambda_{\max}^{(\rho)}|T_{\mathrm{L}}(x) = 0, \qquad \partial_{+} < \lambda_{\min}^{(\rho)}|T_{\mathrm{R}}(x) = 0, \tag{5.1a}$$

因此,场

$$\xi^{(\rho)}(x) \equiv < \lambda_{\max}^{(\rho)}|T_{\mathrm{L}}(x), \quad \bar{\xi}^{(\rho)}(x) \equiv < \lambda_{\max}^{(\rho)}|T_{\mathrm{R}}(x) \tag{5.1b}$$

分别是 x_{+}和 x_{-}的手征函数.

为计算手征函数 $\xi(x)$和 $\bar{\xi}(x)$满足的交换代数(这里我们略去了上标(ρ)),我们给出

$$\begin{aligned}\{T(x) \underset{,}{\otimes} T(y)\} = {} & \frac{1}{2}T(x) \otimes T(y) \\ & \cdot \{[T^{-1}(y) \otimes T^{-1}(y) r T(y) \otimes T(y) - r]\theta(x-y) \\ & + [T^{-1}(x) \otimes T^{-1}(x) r T(x) \otimes T(x) - r]\theta(y-x)\},\end{aligned} \tag{5.2}$$

$$\{\Phi(x) \underset{,}{\otimes} T(y)\} = -\frac{1}{\kappa}\sum_{ij}(K^{-1})^{ij}\theta(y-x)H_i \otimes T(y)T^{-1}(x)H_j T(x), \tag{5.3}$$

$$\{T(x) \underset{,}{\otimes} \Phi(y)\} = \frac{1}{\kappa}\sum_{ij}(K^{-1})^{ij}\theta(x-y)T(x)T^{-1}(y)H_i T(y) \otimes H_j. \tag{5.4}$$

这些关系式的证明是简单的.利用(5.3)～(5.5)式,易得

$$\begin{aligned}\{T_{\mathrm{L}}(x) \underset{,}{\otimes} T_{\mathrm{L}}(y)\} = {} & \frac{1}{2}T_{\mathrm{L}}(x) \otimes T_{\mathrm{L}}(y) \\ & \cdot \{[T^{-1}(y) \otimes T^{-1}(y)(r + \frac{1}{\kappa}\sum_{ij}(K^{-1})^{ij}H_i \otimes H_j) \\ & \cdot T(y) \otimes T(y) - r]\theta(x-y) + [T^{-1}(x) \otimes T^{-1}(x)(r - \frac{1}{\kappa}\sum_{ij}(K^{-1})^{ij}H_i \otimes H_j) \\ & \cdot T(x) \otimes T(x) - r]\theta(y-x)\}.\end{aligned} \tag{5.5}$$

因此,利用定义(5.1b)以及

$$< \lambda_{\max}^{(\rho)}| \otimes < \lambda_{\max}^{(\rho')}|r^{\pm} = \mp\frac{1}{\kappa} < \lambda_{\max}^{(\rho)}| \otimes < \lambda_{\max}^{(\rho')}|\sum_{ij}(K^{-1})^{ij}H_i \otimes H_j$$

可得

$$\{\xi(x) \underset{,}{\otimes} \xi(y)\} = -\frac{1}{2}\xi(x) \otimes \xi(y)[r^{+}\theta(x-y) + r^{-}\theta(y-x)]. \tag{5.6a}$$

类似地，

$$\{\bar{\xi}(x) \underset{,}{\otimes} \bar{\xi}(y)\} = -\frac{1}{2}\xi(x) \otimes \bar{\xi}(y) r^-, \tag{5.6b}$$

$$\{\bar{\xi}(x) \underset{,}{\otimes} \xi(y)\} = -\frac{1}{2}\bar{\xi}(x) \otimes \xi(y) r^+, \tag{5.6c}$$

$$\{\bar{\xi}(x) \underset{,}{\otimes} \bar{\xi}(y)\} = -\frac{1}{2}\bar{\xi}(x) \otimes \bar{\xi}(y)[r^- \theta(x-y) + r^+ \theta(y-x)]. \tag{5.6d}$$

我们看到，这些交换关系与通常的 Toda 场论中相应算子满足的代数形式上完全相同[1]. 但由于我们的模型含有比 Toda 场论更多的场量，手征算子 $\xi(x)$和 $\bar{\xi}(x)$实际上并没有穷尽所有的手征算子，故尔交换代数(5.6a—d)也只是完整的交换代数的一部分.

六、手征算子 $\zeta(x)$，$\bar{\zeta}(x)$及完整的交换代数

为了得到完整的手征算子集合，我们注意到由于 $\mu\in N^{(2)}$，$\nu\in N^{(-2)}$，它们将分别湮没次低权和次高权态，

$$<\lambda_{\min}^{(\rho)} + \alpha^i | \mu = 0, \quad <\lambda_{\max}^{(\rho)} - \alpha^i | \nu = 0, \tag{6.1}$$

式中

$$<\lambda_{\min}^{(\rho)} + \alpha^i | E_j = \delta_{ij} < \lambda_{\min}^{(\rho)} |, < \lambda_{\min}^{(\rho)} - \alpha^i | F_j = \delta_{ij} < \lambda_{\min}^{(\rho)} |. \tag{6.2}$$

利用(2.11c—d)和 $B=e^{\Phi}$ 这一事实，可将(3.6)第二式和(3.7)第一式改写为

$$\partial_- T_L = -(\partial_- \Psi_+ + e^{ad\Phi}\nu) T_L, \tag{6.3}$$

$$\partial_+ T_R = (\partial_+ \Psi_- + e^{-ad\Phi}\mu) T_R. \tag{6.4}$$

作规范变换 $T_L \to e^{\Psi_+} T_L$，$T_R \to e^{-\Psi_-} T_R$，我们有

$$\partial_- (e^{\Psi_+} T_L) = -\{\sum_{l>0} \frac{l}{(l+1)!}(ad\Psi_+)^l (e^{ad\Phi}\bar{\Psi}_-) + e^{ad\Psi_+} e^{ad\Phi}\nu\}(e^{\Psi_+} T_L),$$

$$\partial_+ (e^{-\Psi_-} T_R) = \{\sum_{l>0} \frac{(-1)^l \cdot l}{(l+1)!}(ad\Psi_-)^l (e^{-ad\Phi}\bar{\Psi}_+) + e^{-ad\Psi_-} e^{-ad\Phi}\mu\}(e^{-\Psi_-} T_R).$$

$$\tag{6.5}$$

因此，

$$\partial_- \zeta_i^{(\rho)}(x) = 0, \qquad \partial_+ \bar{\zeta}_i^{(\rho)}(x) = 0,$$

$$\zeta_i^{(\rho)}(x) \equiv < \lambda_{\min}^{(\rho)} - \alpha^i | e^{\Psi_+} e^{\frac{1}{2}\Phi} T(x), \bar{\zeta}_i^{(\rho)}(x) \equiv < \lambda_{\min}^{(\rho)} + \alpha^i | e^{-\Psi_-} e^{-\frac{1}{2}\Phi} T(x). \tag{6.6}$$

利用[10]的方法，我们知道，模型(3.5)具有 $2n$ 个手征自由度(W_n^2 代数的维数)，因此，独立的手征算子个数应为 $2n$(对每个手征部分). 由于对确定的表示 ρ，次高权和次低权态常常不唯一，故我们得到的手征算子集合$\{\xi^{(\rho)}, \zeta_i^{(\rho)}\}$、$\{\bar{\xi}^{(\rho)}, \bar{\zeta}_i^{(\rho)}\}$所含算子个数比独立算子个数要多. 在具体计算手征交换代数时我们将给出独立算子的一种取法.

象上节一样，我们先给出如下的定理，

$$\{e^{\Psi_+(x)} \underset{,}{\otimes} T(y)\} = -\frac{1}{\kappa}\{\sum_i [\omega_i(x)]^{\frac{1}{2}} \sum_n \frac{1}{(n+1)!}[ad\Psi_+(x)]^n$$

$$F_i \otimes T(y)T^{-1}(x)E_iT(x)\}(e^{\Psi_+(x)} \otimes 1)\theta(y-x),$$

$$\{T(x) \underset{,}{\otimes} e^{\Psi_+(y)}\} = \frac{1}{\kappa}\{\sum_i[\omega_i(x)]^{\frac{1}{2}}\sum_n \frac{1}{(n+1)!}T(x)T^{-1}(y)$$

$$\cdot E_iT(y) \otimes (ad\Psi_+(y))^nF_i\}(1 \otimes e^{\Psi_+(y)})\theta(x-y),$$

$$\{e^{-\Psi_-(x)} \underset{,}{\otimes} T(y)\} = \frac{1}{\kappa}\{\sum_i[\omega_i(x)]^{\frac{1}{2}}\sum_n \frac{(-1)^n}{(n+1)!}[ad\Psi_-(x)]^n$$

$$E_i \otimes T(y)T^{-1}(x)F_iT(x)\}(e^{-\Psi_-(x)} \otimes 1)\theta(y-x),$$

$$\{T(x) \underset{,}{\otimes} e^{-\Psi_-(y)}\} = -\frac{1}{\kappa}\{\sum_i[\omega_i(y)]^{\frac{1}{2}}\sum_n \frac{(-1)^n}{(n+1)!}T(x)T^{-1}(y)$$

$$\cdot F_iT(y) \otimes [ad\Psi_-(y)]^nE_i\}(1 \otimes e^{-\Psi_-(y)})\theta(x-y). \tag{6.7}$$

这些定理可简单地从 $\psi_i^\pm$ 与 T 的 Poisson 括号推得,而后者又可利用 T 的超定域性和模型的 Lax pair 求出. 例如

$$\begin{cases} \{\psi_i^+(x),(\partial_y - \frac{1}{2}A_1(y))T(y)\} = 0, \\ \{\psi_i^+(x),T(y)\} = 0, x > y \end{cases} \tag{6.8}$$

给出

$$\{\psi_i^+(x),T(y)\} = -\frac{1}{\kappa}[\omega_i(x)]^{\frac{1}{2}}T(y)T^{-1}(x)E_iT(x)\theta(y-x). \tag{6.9}$$

类似可得 $\{\psi_i^-,T\}$ 和 $\{T,\psi_i^\pm\}$,并通过直接计算得(6.7).

下面我们来求 $\{\zeta_i(x) \underset{,}{\otimes} \zeta_j(y)\}$. 按定义,

$$\{\zeta_i(x) \underset{,}{\otimes} \zeta_j(y)\} = <\lambda_{\max}^{(\rho)} - \alpha^i| \otimes <\lambda_{\max}^{(\rho')} - \alpha^j|e^{\Psi_+(x)} \otimes e^{\Psi_+(y)} \cdot$$

$$\cdot \{e^{\frac{1}{2}\Phi(x)}T(x) \underset{,}{\otimes} e^{\frac{1}{2}\Phi(y)}T(y)\} + e^{\Psi_+(x)}e^{\frac{1}{2}\Phi(x)} \otimes 1\{T(x) \underset{,}{\otimes} e^{\Psi_+(y)}\} \cdot$$

$$\cdot 1 \otimes e^{\frac{1}{2}\Phi(y)}T(y) + 1 \otimes e^{\Psi_+(y)}e^{\frac{1}{2}\Phi(y)}\{e^{\Psi_+(x)} \underset{,}{\otimes} T(y)\}e^{\frac{1}{2}\Phi(x)}T(x) \otimes 1$$

$$+ \{e^{\Psi_+(x)} \underset{,}{\otimes} e^{\Psi_+(y)}\}e^{\frac{1}{2}\Phi(x)}T(x) \otimes e^{\frac{1}{2}\Phi(y)}T(y)). \tag{6.10}$$

将(5.5)、(6.7)前两式代入(6.10),并注意

$$<\lambda_{\max}^{(\rho)} - \alpha^i| \otimes <\lambda_{\max}^{(\rho')} - \alpha^j|r^+ = -\frac{1}{\kappa} <\lambda_{\max}^{(\rho)} - \alpha^i| \otimes <\lambda_{\max}^{(\rho')} - \alpha^j|$$

$$\cdot (\sum_{kl}(K^{-1})^{kl}H_k \otimes H_l + 2E_j \otimes F_j), \tag{6.11a}$$

$$<\lambda_{\max}^{(\rho)} - \alpha^i| \otimes <\lambda_{\max}^{(\rho)} - \alpha^j|r^- = \frac{1}{\kappa} <\lambda_{\max}^{(\rho)} - \alpha^i| \otimes <\lambda_{\max}^{(\rho')} - \alpha^j|$$

$$\cdot (\sum_{kl}(K^{-1})^{kl}H_k \otimes H_l + 2F_i \otimes E_i), \tag{6.11b}$$

我们得到

$$\{\zeta_i(x) \underset{,}{\otimes} \zeta_j(y)\} = -\frac{1}{2}\zeta_i(x) \otimes \zeta_j(y)[r^+\theta(x-y) + r^-\theta(y-x)]$$

$$+ <\lambda_{\max}^{(\rho)} - \alpha^i| \otimes <\lambda_{\max}^{(\rho')} - \alpha^j|\{e^{\Psi_+(x)} \underset{,}{\otimes} e^{\Psi_+(y)}\}e^{\frac{1}{2}\Phi(x)}T(x) \otimes e^{\frac{1}{2}\Phi(y)}T(y).$$

上式中最后一项中的括号可写为

$$\begin{aligned}&<\lambda_{\max}^{(\rho)}-\alpha^{i}|\otimes<\lambda_{\max}^{(\rho')}-\alpha^{j}|\{e^{\Psi_{+}(x)}\underset{,}{\otimes}e^{\Psi_{+}(y)}\}\\&=<\lambda_{\max}^{(\rho)}-\alpha^{i}|\otimes<\lambda_{\max}^{(\rho')}-\alpha^{j}|\{\Psi_{+}(x)\underset{,}{\otimes}\Psi_{+}(y)\}\\&=\{\psi_i^{+}(x),\psi_j^{+}(y)\}<\lambda_{\max}^{(\rho)}|\otimes<\lambda_{\max}^{(\rho')}|.\end{aligned}\tag{6.12}$$

对于不同的 i 和 j，$\{\psi_i^{+}(x),\psi_j^{+}(y)\}$没有定义(回想(3.8式)，故 $\zeta_i(x)$不是表征交换代数的一个好基底，为解决这一问题，对每个表示 ρ，我们定义

$$\zeta^{(\rho)}(x)=\sum_{\text{possible } i}\zeta_i^{(\rho)},\tag{6.13}$$

并类似定义 $\bar{\zeta}^{(\rho)}$. 于是 Poisson 括号$\{\zeta_i(x)\underset{,}{\otimes}\zeta_j(y)\}$可以改写成

$$\{\zeta(x)\underset{,}{\otimes}\zeta(y)\}=-\frac{1}{2}\zeta(x)\otimes\zeta(y)[r^{+}\theta(x-y)+r^{-}\theta(y-x)].\tag{6.14a}$$

类似可得

$$\{\zeta(x)\underset{,}{\otimes}\bar{\zeta}(y)\}=-\frac{1}{2}\zeta(x)\otimes\bar{\zeta}(y)r^{-},\tag{6.14b}$$

$$\{\bar{\zeta}(x)\underset{,}{\otimes}\zeta(y)\}=-\frac{1}{2}\bar{\zeta}(x)\otimes\zeta(y)r^{+},\tag{6.14c}$$

$$\{\bar{\zeta}(x)\underset{,}{\otimes}\bar{\zeta}(y)\}=-\frac{1}{2}\bar{\zeta}(x)\otimes\bar{\zeta}(y)[r^{-}\theta(x-y)+r^{+}\theta(y-x)].\tag{6.14d}$$

此外，$\zeta(x)$，$\bar{\zeta}(x)$与上节的 $\xi(x)$，$\bar{\xi}(x)$间还有不平凡的耦合，

$$\{\xi(x)\underset{,}{\otimes}\zeta(y)\}=-\frac{1}{2}\xi(x)\otimes\zeta(y)[r^{+}\theta(x-y)+r^{-}\theta(y-x)],\tag{6.15a}$$

$$\{\zeta(x)\underset{,}{\otimes}\xi(y)\}=-\frac{1}{2}\zeta(x)\otimes\xi(y)[r^{+}\theta(x-y)+r^{-}\theta(y-x)],\tag{6.15b}$$

$$\{\xi(x)\underset{,}{\otimes}\bar{\zeta}(y)\}=-\frac{1}{2}\xi(x)\otimes\bar{\zeta}(y)r^{-},\tag{6.15c}$$

$$\{\bar{\zeta}(x)\underset{,}{\otimes}\xi(y)\}=-\frac{1}{2}\bar{\zeta}(x)\otimes\xi(y)r^{+},\tag{6.15d}$$

$$\{\bar{\xi}(x)\underset{,}{\otimes}\zeta(y)\}=-\frac{1}{2}\bar{\xi}(x)\otimes\zeta(y)r^{+},\tag{6.15e}$$

$$\{\zeta(x)\underset{,}{\otimes}\bar{\xi}(y)\}=-\frac{1}{2}\zeta(x)\otimes\bar{\xi}(y)r^{-},\tag{6.15f}$$

$$\{\bar{\xi}(x) \underset{,}{\otimes} \bar{\zeta}(y)\} = -\frac{1}{2}\bar{\xi}(x) \otimes \bar{\zeta}(y)[r^{-}\theta(x-y) + r^{+}\theta(y-x)], \quad (6.15g)$$

$$\{\bar{\zeta}(x) \underset{,}{\otimes} \bar{\xi}(y)\} = -\frac{1}{2}\bar{\zeta}(x) \otimes \bar{\xi}(y)[r^{-}\theta(x-y) + r^{+}\theta(y-x)]. \quad (6.15h)$$

方程(5.6),(6.14)和(6.15)构成了系统(3.5)的完整的经典交换代数.

七、顶角算子

在 $\mathscr{G}$ 的给定表示下,手征算子 $\xi^{(\rho)}(x)$,$\bar{\xi}^{(\rho)}(x)$,$\dot{\zeta}^{(\rho)}(x)$和 $\bar{\zeta}^{(\rho)}(x)$均为行矢量. 我们将证明,这些行矢量的第一分量正是经典的顶角算子. 为简单起见,我们将只讨论右手征算子 $\xi^{(\rho)}(x)$及 $\zeta^{(\rho)}(x)$.

先看 $\xi^{(\rho)}(x)$. 它的第一个分量为

$$\xi^{(\rho)1}(x) \equiv < \lambda_{\max}^{(\rho)} | e^{\frac{1}{2}\Phi} T | \lambda_{\max}^{(\rho)} >. \quad (7.1)$$

利用(5.6a)易得

$$\{\xi^{(\rho)1}(x), \xi^{(\rho')1}(y)\} = \frac{1}{2\kappa}\sum_{ij}(K^{-1})^{ij}(\lambda_{\max}^{(\rho)})_i(\lambda_{\max}^{(\rho)})_j \cdot \xi^{(\rho)1}(x)\xi^{(\rho')1}(y)\operatorname{sign}(x-y). \quad (7.2)$$

定义 $Q_{\xi}^{(\rho)}(x) = \ln\xi^{(\rho)1}(x)$,我们有

$$\{Q_{\xi}^{(\rho)}(x), Q_{\xi}^{(\rho')}(y)\} = \frac{1}{2\kappa}(\lambda_{\max}^{(\rho)}, \lambda_{\max}^{(\rho')})\operatorname{sign}(x-y). \quad (7.3)$$

对于 n 秩李代数 $\mathscr{G}$,存在 n 个基本表示,各个表示的最高权间是线性无关的. 因此,我们可以定义一个 n 维矢量 Q_{ξ},便得

$$Q_{\xi}^{(\rho)}(x) = (\lambda_{\max}^{(\rho)}, Q_{\xi}(x)) \equiv \sum_{ij}(\lambda_{\max}^{(\rho)})_i Q_{\xi}^{j}(x)(K^{-1})^{ij}. \quad (7.4)$$

这样,从 Q_{ξ} 的各分量间的 Poisson 括号

$$\{Q_{\xi}^{i}(x), Q_{\xi}^{j}(y)\} = \frac{1}{2\kappa}K_{ij}\operatorname{sign}(x-y). \quad (7.5)$$

以及 $Q_{\xi}^{(\rho)}$ 的定义式

$$\xi^{(\rho)1}(x) = \exp[(\lambda_{\max}^{(\rho)}, Q_{\xi}(x))]. \quad (7.6)$$

即可知,$\xi^{(\rho)1}(x)$是经典顶角算子[1]. 这样的经典顶角算子有 n 个. 类似可证,算子

$$\zeta^{(\rho)1}(x) = \zeta^{(\rho)}(x) | \lambda_{\max}^{(\rho)} > \quad (7.7)$$

也是经典顶角算子,因为

$$\{Q_{\zeta}^{i}(x), Q_{\zeta}^{j}(y)\} = \frac{1}{2\kappa}K_{ij}\operatorname{sign}(x-y), \quad (7.8)$$

且有

$$\zeta^{(\rho)1}(x) = \exp[(\lambda_{\max}^{(\rho)}, Q_{\zeta}(x))]. \quad (7.9)$$

这样的算子又有 n 个. 总的顶角算子数为 $2n$,正好是 W_n^2 代数的维数[11].

八、讨 论

本文研究了 WZNW 模型的二阶共形约化导致的新可积模型的可积及共形性质. 对一般的整数阶化,我们给出了模型的运动方程和 Lax pair 表示,进而在主阶化下得到了相应的 r 矩阵、基本 Poisson 括号、手征算子的交换代数及经典顶角算子. 这些结果奠定了进一步研究这类模型的量子群对称性和 W 代数对称性的基础.

作为一个初步尝试,许多有关问题本文并未涉及. 例如,尽管我们获得了手征交换代数(5.6)、(6.14)、(6.15),但代数中两个手征部分的不平庸的耦合现象我们却未做解释. 另外,由于本文的模型具有一些和通常的 Toda 模型十分相似的特点,比如相同的 r 矩阵和相似的交换代数等等,我们有理由期望有关 Toda 模型已经取得的丰富的研究成果可以推广到本文的模型,例如可通过 Dressing 变换来研究模型的量子群对称性[4],通过 Lax 线性方程来构造相应 W 代数的协变高阶微分方程[1]等等. 我们期望这些问题能在不远的将来获得圆满解决.

作者对侯伯宇教授的热情指导和有益讨论表示感谢.

参 考 文 献

[1] O. Babelon, *Phys. Lett.*, **215B**(1988), 523, Preprint PAR LPTHE89/29.

[2] L. D. Faddeev and L. Takhtajan, Hamiltonian mathods in the theory of solitons, Springer Verlag(1987).

[3] O. Babelon and C. M. Viallet, Integrable models, Yang-Baxter equations and quantum groups, Cambridge University Press(1991).

[4] O. Babelon and D. Bernard, *Phys. Lett.*, **B260**(1991), 81.

[5] A. Bilal and J-L. Gervais, *Phys. Lett.*, **B206**(1988), 412; *Nucl. Phys.* **B314**(1989), 646; *Nucl. Phys.*, **B318**(1989), 579.

[6] J. Balog, L. Feher, L. O' Raifeartaigh, P. Forgacs and A. Wipf, *Ann. Phys.*, **203**(1991), 76.

[7] L. O'Raifeartaigh and A. Wipf, DIAS-STP-90-19, ETH-TH/90-20;
L. O'Raifeartaigh, DIAS-STP-90-43, DIAS-STP-90-45;
L. O'Raifeartaigh, P. Ruelle, I. Tsutsui and A. Wipf, DIAS-STP-91-03;
L. Feher, L. O'Raifeartaigh, P. Ruelle, I. Tsutsui and A. Wipf, DIAS-STP-91-17.

[8] J. Fuchs, Phys. Lett. B262 (1991)249, F. A. Bias, T. Tjin, P. van Driel, *Nucl. Phys.*, **B357**(1991), 632.

[9] L. Chao, NWU/IMP/910525.

[10] Hou Bo-yu and Chao Liu, NWU/IMP/911115.

[11] Hou Bo-yu and Chao Liu, NWU/IMP/911117.

From Integrability to Conformal Symmetry: Bosonic Superconformal Toda Theories

ZHAO LIU

(*Institute of Modern Physics, Northwest University, Xi'an* 710069)

ABSTRACT

In this paper we study the new conformal integrable models obtained from conformal reductions of WZNW theory associated with second order constraints, these models are called bosonic superconformal Toda models due to their conformal spectra and their resemblance to the usual Toda theories. From the reduction procedure we get the equations of motion and the linearized Lax equations for such systems in a generic gradation of the underlying Lie algebra. Then, in the special case of principal gradation, we derive the classical r-matrix, fundamental Poisson relation, exchange algebra of the chiral operators and find out the classical vertex operators. The result shows that our model may play a similar role with respect to the ordinary Toda theories in which one may obtain various conformal properties of the model from its integrability.