第 18 卷 第 1 期　高能物理与核物理　Vol. 18, No. 1
1994 年 1 月　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　Jan., 1994

自对偶场与规范场相互作用理论的 Faddeev-Jackiw 量子化

缪炎刚[1)]　刘耀阳
（中国科学技术大学近代物理系　合肥 230026）

1992 年 8 月31日收到

摘　要

本文采用 Faddeev-Jackiw 量子化方法，讨论了二维时空中一种自对偶场与规范场的相互作用理论。通过与 Dirac 方法的比较，建立了这两种方法的等价性。

关键词　量子化，规范理论，手征对称性。

对约束系统的量子化，传统的做法是采用 Dirac 方法[1]。在这种量子化过程中，首先，由初级约束诱导出次级约束；其次，根据约束的 Poisson 括号代数，将所有的约束划分为两类：第一类和第二类；最后，引入 Dirac 括号代替 Poisson 括号。然而，Faddeev 和 ackiw[2] 指出：Dirac 方法对约束系统的量子化不是强制性的，并且提出了另一种量子化方法，通常称之为 Faddeev-Jackiw 方法。它避免将约束划分为初级的和次级的以及第一类的和第二类的。最近，Kulshreshtha 和 Müller-Kirsten[3] 已将这种方法应用于一种单个自对偶场理论，即规范非不变的线性自对偶约束理论[4]。随后，本文作者[5]也采用 Faddeev-Jackiw 方法讨论了这个理论的规范不变形式[6]的量子化。我们发现了一类带有普遍性的现象，即存在称之为“虚变量”的多余自由度[5]。因此，对具有规范不变性的理论，在采用 Faddeev-Jackiw 量子化时，适当地消除这类多余自由度是至关重要的。

在本文中，我们将 Faddeev-Jackiw 方法的应用扩展到自对偶场与规范场存在相互作用的理论，具体处理一个自对偶场与规范场手征耦合的二维模型[7]。我们将会看到，关键的问题是写出拉氏量的正则 1 形式。此外，通过比较由 Faddeev-Jackiw 方法和 Dirac 方法给出的量子理论，对上述具体模型我们建立了这两种量子化方法的等价性。

本文讨论的模型由如下的拉氏量描述[7]

$$\mathscr{L} = \dot{\phi}\phi' - (\phi')^2 + \frac{1}{2}(\dot{A}_1 - A_0')^2 + c\phi'(A_0 - A_1) - \frac{1}{2}c^2A_1^2, \tag{1}$$

其中 c 是一个具有质量量纲的实参数，点和撇分别代表对时间 t 和空间 x 的微商。这个

1）中国高等科学技术中心（世界实验室）协联成员。

表达式不是明显 Lorentz 不变的。但是，它描述了一个 Lorentz 不变的理论。它的量子谱具有相对论不变性，并且只包含一个质量为 c 的玻色子。

首先，对这个模型进行哈密顿分析。同 ϕ，A_0 和 A_1 分别共轭的动量定义为

$$\pi_\phi \equiv \partial\mathscr{L}/\partial\dot{\phi} = \phi', \tag{2}$$

$$\pi^0 \equiv \partial\mathscr{L}/\partial\dot{A}_0 = 0, \tag{3}$$

$$\pi^1 \equiv \partial\mathscr{L}/\partial\dot{A}_1 = \dot{A}_1 - A_0'. \tag{4}$$

因此，哈密顿量表示成

$$\begin{aligned}\mathscr{H} &= \pi_\phi\dot{\phi} + \pi^\mu\dot{A}_\mu - \mathscr{L}\\ &= (\phi')^2 + \frac{1}{2}(\pi^1)^2 + \pi^1 A_0' + \frac{1}{2}c^2A_1^2 - c\phi'(A_0 - A_1).\end{aligned} \tag{5}$$

按照 Faddeev-Jackiw 方法[2]，我们写出相应于(1)式的一阶拉氏量

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_1 &= \dot{\phi}\phi' + \pi^1\dot{A}_1 - \mathscr{H}\\ &= \dot{\phi}\phi' + \pi^1\dot{A}_1 - (\phi')^2 - \frac{1}{2}(\pi^1)^2 - \frac{1}{2}c^2A_1^2 - c\phi'A_1 - A_0'(\pi^1 + c\phi),\end{aligned} \tag{6}$$

其中已丢掉一项空间全微商。由于 A_0 和 π^0 不是一对正则变量，我们可以将 (6) 式中 A_0' 作为一个拉氏乘子。因此，我们得到一个约束条件

$$\pi^1 + c\phi = 0. \tag{7}$$

将 $\phi = -\frac{1}{c}\pi^1$ 代入(6)式，一阶拉氏量约化为

$$\mathscr{L}_1 = \pi^1\dot{A}_1 + \frac{1}{c^2}(\partial_1\pi^1)\dot{\pi}^1 - \frac{1}{c^2}(\partial_1\pi^1)^2 - \frac{1}{2}(\pi^1)^2 - \frac{1}{2}c^2A_1^2 + (\partial_1\pi^1)A_1. \tag{8}$$

Faddeev-Jackiw 方法的第二步是将 $\mathscr{L}_1$ 写成正则 1 形式。为此，我们引入一个新的变量

$$B_1 = A_1 - \frac{1}{c^2}\partial_1\pi^1, \tag{9}$$

将(8)式对角化

$$\tilde{\mathscr{L}}_1 = \pi^1\dot{B}_1 - \tilde{\mathscr{H}}(\pi^1, B_1), \tag{10}$$

其中正则哈密顿为

$$\tilde{\mathscr{H}}(\pi^1, B_1) = \frac{1}{2}(\pi^1)^2 + \frac{1}{2c^2}(\partial_1\pi^1)^2 + \frac{1}{2}c^2B_1^2. \tag{11}$$

然后，我们再引入两个相空间变量

$$(\xi_\alpha) = (\pi^1, B_1),\ \alpha = 1,2, \tag{12}$$

可以得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\xi_1,\xi_2)\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{d}\xi_1/\mathrm{d}t\\ \mathrm{d}\xi_2/\mathrm{d}t\end{bmatrix} &\equiv \frac{1}{2}\xi f^0\dot{\xi}\\ &= \frac{1}{2}(\pi^1\dot{B}_1 - B_1\dot{\pi}^1).\end{aligned} \tag{13}$$

因此，将(10)式表示成正则 1 形式(丢掉一项时间全微商)

$$\mathscr{L}_1 = \frac{1}{2}\xi f^0 \dot{\xi} - \mathscr{H}(\xi), \tag{14}$$

其中 f^0 是一个辛矩阵

$$f^0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{15}$$

它的逆为

$$(f^0)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{16}$$

至此,我们可以写出正则变量 π^1 和 B_1 的 Faddeev-Jackiw 括号. 它们是[2]

$$\begin{aligned} \{\pi^1(x,t),\pi^1(y,t)\}_{FJ} &= \{\xi_1,\xi_1\}_{FJ} \\ &= -(f^0)^{-1}_{11}\delta(x-y) \\ &= 0, \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} \{\pi^1(x,t),\ B_1(y,t)\}_{FJ} &= \{\xi_1,\xi_2\}_{FJ} \\ &= -(f^0)^{-1}_{21}\delta(x-y) \\ &= -\delta(x-y), \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} \{B_1(x,t),\ \pi^1(y,t)\}_{FJ} &= \{\xi_2,\xi_1\}_{FJ} \\ &= -(f^0)^{-1}_{12}\delta(x-y) \\ &= \delta(x-y), \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} \{B_1(x,t),B_1(y,t)\}_{FJ} &= \{\xi_2,\xi_2\}_{FJ} \\ &= -(f^0)^{-1}_{22}\delta(x-y) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{20}$$

将 Faddeev-Jackiw 括号用算子的对易关系代替

$$\{A,B\}_{FJ} \to -i[A,B], \tag{21}$$

我们就得到相应的量子理论.

根据 Faddeev-Jackiw 方法,哈密顿运动方程的形式是[2]

$$\dot{\xi}_\alpha = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \xi_\beta}\{\xi_\beta \xi_\alpha\}_{FJ}. \tag{22}$$

在本文考虑的模型中，上式具体化为

$$\dot{\pi}^1 = -c^2 B_1, \tag{23}$$

$$\dot{B}_1 = \pi^1 - \frac{1}{c^2}\partial_1\partial_1\pi^1. \tag{24}$$

它们等价于如下的二阶微分方程

$$(\square + c^2)B_1 = 0. \tag{25}$$

这表明量子理论的谱只包含一个质量为 c 的玻色子.

为了便于同 Dirac 方法给出的量子理论[7]进行比较，我们将(9)式代入(17)--(20)式,得到独立变量 π^1, A_1 的 Faddeev-Jackiw 括号

$$\{\pi^1(x,t),\pi^1(y,t)\}_{FJ} = 0, \tag{26}$$

$$\{\pi^1(x,t),A_1(y,t)\}_{FJ} = -\delta(x-y), \tag{27}$$

$$\{A_1(x,t),\pi^1(y,t)\}_{FJ}=\delta(x-y),\tag{28}$$

$$\{A_1(x,t),A_1(y,t)\}_{FJ}=-(2/c^2)\partial_x\delta(x-y).\tag{29}$$

它们与参考文献[7]中的 Dirac 括号完全一致。对哈密顿方程(23)和(24)式作同样的讨论，我们得到：场量 A_1 满足与 B_1 相同的运动方程，即

$$(\square+c^2)A_1=0.\tag{30}$$

这个结果在参考文献 [7] 中已由 Dirac 方法得到。因此，对(1)式描述的自对偶场与规范场的相互作用理论，Faddeev-Jackiw 方法与 Dirac 方法的等价性是显而易见的。

本文的意义在于将 Faddeev-Jackiw 量子化从单个自对偶理论推广到自对偶场与规范场有相互作用的理论。通过引入一种特殊的相空间变量变换，将该约束系统的一阶拉氏量变换成正则 1 形式，从而实现了 Faddeev-Jackiw 量子化并证明了 Faddeev-Jackiw 方法与 Dirac 方法对该系统是等价的。

参　考　文　献

[1] P.A.M. Dirac, Lectures on Quantum Mechanics. Belfer Graduate School of Science, Yeshiva Univ. Press, 1964.

[2] L. Faddeev and R. Jackiw, *Phys. Rev. Lett.*, **60**(1988)1692.

[3] D.S. Kulshreshtha and H.J. W. Müller-Kirsten, *Phys. Rev.*, **D45**(1992)R393.

[4] P.P. Srivastava, *Phys. Rev. Lett.*, **63**(1989)2791.

[5] Y.G. Miao and Y.Y. Liu, *Chinese Phys. Lett.* **10**(1993)5.

[6] P. P. Srivastava, *Phys. Lett.*, **B234**(1990)93.

[7] S. Ghosh and P. Mitra, *Phys. Rev.*, **D44**(1991)1332.

Faddeev-Jackiw Quantization of a Theory of Self-Dual Fields Interacting with Gauge Fields

Miao Yangang　　Liu Yaoyang

(Department of Modern Physics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026)

Received on August 31, 1992

Abstract

The Faddeev-Jackiw quantization method is applied to the two-dimensional model of self-dual fields interacting chirally with gauge fields. It is compared with Dirac's method and the equivalence of the two methods is established.

Key Words Quantization, Gauge theories, Chiral symmetries.